Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 22	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$,

$$\mathrm{Im}(J_n) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

Donc $\underline{rg(J_n) = 1}$

Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n-1$

Donc $\underline{0 \text{ est valeur propre et } \dim(E_0(f)) = n-1}$

b) $$J_n V_n = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\ \vdots\\ n\end{pmatrix} = n V_n$$

De plus, $V_n \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

$\boxed{\text{Donc } V_n \text{ est vecteur propre de } J_n}$

c) $\sum\limits_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(J_n) \leq n$ donc $n-1+\dim(E_n(J_n)) \leq n$

où $\dim(E_n(J_n)) \geq 1$

donc $\dim(E_n(J_n)) = 1$

Ainsi, $\dim(E_0(J_n)) + \dim(E_n(J_n)) = n$ donc J_n n'admet pas d'autres valeurs propres que 0 et n

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\boxed{\text{Donc } Sp(J_n) = \{0 ; n\}}$

2) f_n est une fonction polynômiale
donc f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$

3) a) $\forall i \in [\![1;n]\!], \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\partial_i f_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{2}{n} \cdot x_i - 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$= \frac{2}{n}\left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

b) $(x_1, \dots x_n)$ est point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n(f)(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{n}\left(x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 0 \\ \frac{2}{n}\left(x_2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{2}{n}\left(x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ \vdots \\ x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première ligne aux autres, on obtient

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n \end{cases}$$

La deuxième ligne nous suffit pour conclure que

$\boxed{\text{les points critiques de } f_n \text{ sont les points de la forme } (a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n}$

4) a) $\forall (k,i) \in [\![1;n]\!]^2$, $k \neq i$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\underline{\partial^2_{i,k}(f)(x) = -\frac{2}{n^2}}$$

$\forall k \in [\![1;n]\!]$,

$$\underline{\partial^2_{k,k}(f)(x)} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \underline{\frac{2(n-1)}{n^2}}$$

b) Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2(f_n)(x) = \begin{pmatrix} \frac{2(n-1)}{n^2} & \cdots & -\frac{1}{n^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{2(n-1)}{n^2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n)$$

En particulier, si a est point critique,

$$\nabla^2(f_n)(a, \dots, a) = \frac{2}{n^2}(nI_n - J_n)$$

d) J_n est diagonalisable (car $\sum_{\lambda \in Sp(J_n)} J_n = n$)

Donc il existe une matrice P inversible et une matrice $P = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, n)$ telles que $J_n = PDP^{-1}$

Ainsi, $\nabla^2 f_n(a, \dots, a) = \frac{2}{n^2}(nPP^{-1} - PDP^{-1})$

$$= P\left(\frac{2}{n}I - \frac{2}{n^2}D\right)P^{-1}$$

$$= PMP^{-1} \text{ où } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $Sp(M) = \{\frac{2}{n} ; 0\}$

M étant semblable à $\nabla^2 f_n(a, \dots, a)$,

$$\boxed{Sp(f_n(a, \dots, a)) = \{\frac{2}{n} ; 0\}}$$

Or, le fait que $\underline{0 \in Sp(f_n(a, \dots, a))}$ nous empêche de conclure quant aux éventuels extremums de f_n

5) a) Soient $x=(x_1, \dots, x_n)$ et $u=(1, \dots, 1)$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$0 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

6) a)
```
def f_2(x, y) :
    z = (1/2)*(x**2 + y**2) - ((1/2)*(x+y))**2
    return z
```

b) La surface n° 1 car son minimum est atteint en ~~ses~~ points critiques

Exercice 2

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

b) Soit $D \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $D'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 22	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

D est donc constante

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $D(x) = D(1) = 2\arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$

c) On applique la formule de Taylor-Young à la fonction $u \mapsto \arctan(u)$ entre 0 et x à l'ordre 1.

Ainsi, on a : $\arctan(x) \underset{0}{=} \arctan(0) \cdot 1 + \frac{1}{1+0^2} \cdot (x-0) + o(x)$

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x + o(x)$$

$\boxed{\text{Donc } \arctan(x) \underset{0}{\sim} x}$

2) a) $\frac{2x^2}{\pi(e^x+e^{-x})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{\pi e^x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée

Or, f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire

On a donc $\frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

avec $\forall x \in [1;+\infty[$ $\frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})} \geq 0$ et $\frac{1}{x^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

qui nous permet de conclure que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

b) * f est positive sur $\mathbb{R}$
* f est continue sur $\mathbb{R}$

Soit $y > 0$. On pose $\frac{2}{\pi}\int_0^y \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\arctan(e^x)\right]_0^y = \frac{2}{\pi}\left(\arctan(e^y) - \frac{\pi}{4}\right)$$

donc $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^y \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

Donc f peut être considérée comme une densité

3) en posant $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x > y$ et $\int_y^x f(t)\,dt$, on a :

$$\int_y^x f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\arctan(e^x) - \arctan(e^y)\right) \xrightarrow[y\to-\infty]{} \frac{2}{\pi}\arctan(e^x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(x)$

4) a) * F est continue sur $\mathbb{R}$.

* F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonction strictement croissantes)

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$\boxed{\text{Donc F est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans }]0;1[}$

b) $U(\Omega) =]0;1[$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{]0;1[\}$, $F_U(x) = 0$ où F_U est la fonction de répartition de U

$\forall x \in]0;1[$,

$$P(U \leq x) = P\left(\frac{2}{\pi}\arctan(e^X) \leq x\right)$$

$$= P\left(\arctan(e^X) \leq \frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= P\left(e^X \leq \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = P\left(X \leq \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right)$$

$$= F\left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right)$$

Or, $\forall x \in]0;1[$,

$$F\left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(e^{\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi x}{2} = x$$

Donc finalement, $F_U(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in]0;1[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Donc $\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)}$

c) Soit $y \in]0;1[$ et $x \in \mathbb{R}$ /

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(e^x) = y \iff \operatorname{Arctan}(e^x) = \frac{\pi}{2}y \iff e^x = \tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$
$$\iff x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$$

On peut donc écrire le script suivant:

u = rd.random()
a = np.log(np.tan(((np.pi)/2)*y))
print a

5) a) $x \mapsto \left|\frac{2x^3}{\pi(e^{-x}+e^{x})}\right|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Or, $\left|\frac{2x^3}{\pi(e^{-x}+e^{x})}\right| \underset{+\infty}{\sim} \left|\frac{2x^3}{\pi e^{x}}\right| \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par croissance comparée

Donc $\left|\frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\right| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge

De plus, $\forall x \in [1; +\infty[$, $\left|\frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\right| \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$

La parité de la fonction $x \mapsto \left|\frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\right|$ nous suffit à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\right| dx$ converge

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})} dx$ converge absolument

Donc X admet une espérence

Or, $x \mapsto \frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})}$ est impaire et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})} dx$ converge,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\pi(e^{x}+e^{-x})} dx = 0$$

$\boxed{\text{Donc } E(X) \text{ existe et } E(X) = 0}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 22	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) De la même manière, $x \mapsto \left|\frac{x^4}{\pi(e^x+e^{-x})}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^4}{\pi(e^x+e^{-x})} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par croissance comparée

On obtient de même la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{\pi(e^x+e^{-x})}dx = E(X^2)$ d'après le théorème de transfert

$\boxed{\text{Donc } E(X^2) \text{ existe}}$

6) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{E(T^2)}{n}$ où $T \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$

Donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{1}{n} \cdot \frac{2!}{n^2} = \frac{2}{n^3}$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt \text{ converge et vaut } \frac{2}{n^3}}$

$\forall p \in \mathbb{N},$
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} (e^{-2t})^k t^2 e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{p} (-e^{-2t})^k t^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-(-e^{-2t})^{p+1}}{1+e^{-2t}} \right) t^2 e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t} + (-1)^p t^2 e^{-t} (e^{2p+2})^{-t}}{1+e^{-2t}} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 . e^{-t} . e^{t}}{(1+e^{-2t}) e^{t}} dt + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t} e^{-(2p+2)t}}{1+e^{-2t}} dt$$ d'après la relation de Chasles

$$= \boxed{I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt}$$

6) d) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (d'après la formule de Koenig Huygens)

$$= E(X^2)$$

Or, $E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{e^{x} + e^{-x}} dx = \frac{2}{\pi} . I$

Or, $\frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt - (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \right)$ où $p \in \mathbb{N}$

Or, on sait que $\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt = 0$

donc $\underset{p \to +\infty}{} (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t(2p+3)}}{1+e^{-2t}} dt \to 0$

Donc $V(X) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\,dt$

Or, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\,dt = \frac{2}{(2k+1)^3}$ (d'après a))

Ainsi, $V(X) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^2}{8}$

$\boxed{\text{Donc } V(X) = \frac{\pi^2}{8}}$

7) a) $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $G(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x))$

(par croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+$)

$= F(\ln(x)) = \frac{2}{\pi}\arctan(x)$

$$\text{Donc } G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

* G est C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0

* $\lim_{x \to 0^+} G(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} G(x)$

Donc G est continue sur $\mathbb{R}$

Donc Y est une variable aléatoire à densité

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,$

$P(M_n \leq x) = P(\prod_{i=1}^{n} Y_i \leq x)$ donc par indépendance

$= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^n$

$\forall x \in \mathbb{R}_-, P(M_n \leq x) = 0$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^n \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$

Exercice 3:

Partie 1:

1) $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, y \rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i, x \rangle$

$= \langle f(y), x \rangle$

Donc f est un endomorphisme symétrique

2) Si $\forall i \in [\![1; p]\!], \lambda_i = 1, \forall x \in E,$

$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, x \rangle u_i = x$

3) Soit $x \in E$

$x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 22	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Comme $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthonormale, les vecteurs ne peuvent pas s'annuler entre eux

Donc $\forall i \in [\![1;p]\!], \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i = 0$

Comme $\forall i \in [\![1;p]\!], \lambda_i \neq 0$ et $u_i \neq 0$ (car famille orthonormale)

$\Leftrightarrow \langle u_i, x\rangle = 0$

Donc $x \in (\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p))^\perp}$

Donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim E - p}$

b) Ainsi, d'après le théorème du rang, $\underline{rg(f) = p}$

et $\underline{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)} = U$

4) $\forall k \in [\![1;p]\!], \quad f(u_k) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, u_k\rangle u_i$

$= \lambda_k u_k$ (car $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormale)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or, $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $u_k \neq 0$

Donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont valeurs propres de f et $\forall k \in [\![1;p]\!]$, u_k en est un vecteur propre associé

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \| y_n - y \| = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - y) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$

Donc par unicité de la limite, le vecteur y est unique

6) $\forall x \in E$, $\|f(x)\|^2 = \| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \|^2$

$= \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i \rangle$

$= \sum_{i=1}^{p} \lambda^2 \langle u_i, x \rangle \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle$

Or, $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle u_i \rangle}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x \rangle^2}$

Or, $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\forall x \in E$,

$\langle u_i, x \rangle \leq \langle u_i, x \rangle^2$

Donc $\forall x \in E, \forall i \in [\![1;p]\!]$,

$$\lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle \leqslant \lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle^2$$

Ainsi, $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \langle x_i, u_i \rangle^2$$

Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\|f(x)\| \leqslant K\|x\|$$

7) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$: " $\|x_n\| \leqslant K^n \|x_0\|$ "

On montre, par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leqslant K^n \|x_0\|$

Initialisation :
On a : $\|x_0\| \leqslant \|x_0\|$ donc P_0 est vraie

Hérédité : Supposons P_n vraie (où $n \in \mathbb{N}$)
Montrons que P_{n+1} est vraie

On a, d'après la question précédente,

$$\|f(x_n)\| \leqslant K\|x_n\|$$

donc $\|x_{n+1}\| \leqslant K\|x_n\|$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$K\|x_n\| \leqslant K \cdot K^n \|x_0\|$$
$$\leqslant K^{n+1} \|x_0\|$$

Donc : $\|x_{n+1}\| \leqslant K^{n+1} \|x_0\|$

Ce qui achève la récurrence

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\|x_n\| \leqslant K^n \|x_0\|}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \geqslant 0$ et $\|x_n\| \leqslant K^n \|x_0\|$

Or, comme $K < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} K^n \|x_0\| = 0$

Donc par encadrement, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

c) $n^2 K^n \|x_0\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée

Donc $K^n \|x_0\| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K^n \|x_0\| \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$

Donc $\sum\limits_n K^n \|x_0\|$ converge

Ainsi, par majoration,

$$\boxed{\sum_n \|x_n\| \text{ converge}}$$

Problème:

Partie I

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+t)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^n} \right) dt$ par linéarité de l'intégrale

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 22

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], (1+t^2)^{n+1} \geq (1+t^2)^n$

Donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$

Donc comme $1 \geq 0$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1]$, $\dfrac{1}{(t^2+1)^n} \geq 0$

Donc comme $0 \leq 1$, $U_n \geq 0$

$\boxed{\text{Donc } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et positive}}$

b) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0)

Donc $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

~~2) a) $\forall x \in [0;1]$, on pose $f \left| \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x/2} \end{array} \right.$~~

~~f est dérivable 2 fois sur $[0;1]$ et~~

~~$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$ et $f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $f \left| \begin{array}{l} [0;1] \longmapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{x}{2}} - 1 - x \end{array} \right.$

f est dérivable sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1]$,

$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0 \iff e^{\frac{x}{2}} \geq 2$

$\iff \ln(2) \leq \frac{x}{2}$ ce qui est faux pour $x \in [0;1]$

Donc f est décroissante sur $[0;1]$

et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Donc $\forall x \in [0;1]$, $e^{\frac{x}{2}} - 1 - x \leq 0$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0;1],\ e^{\frac{x}{2}} \leq x + 1}$

b) On a donc $\forall t \in [0;1]$

$$e^{\frac{t^2}{2}} \leq t^2 + 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$

$$e^{\frac{nt^2}{2}} \leq (t^2+1)^n$$

Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{(t^2+1)^n} \leq e^{-nt^2/2}$$

Enfin, comme $0 \leq 1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2}\, dt}$$

Partie 2:

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$ converge

$t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \text{ converge}}$

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0;1]$,

$$(1+t^2)^n \geq (t^2)^n$$

Donc par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$$

Comme $0 \leq 1$,

$$I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\,dt$$

Or, en posant $y > 1$ et $\displaystyle\int_1^{y} \frac{1}{t^{2n}}\,dt$, on a:

$$\int_1^y \frac{1}{t^{2n}}\,dt = \left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1}\right]_1^y = \frac{y^{-2n+1}}{-2n+1} + \frac{1}{2n-1} \xrightarrow[y \to +\infty]{} \frac{1}{2n-1}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq \dfrac{1}{2n-1}$

Et comme pour $t \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$,

On a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n-1}}$

b) comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$,

on abtient avec l'encadrement de la question précédente

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = I_n + U_n$

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = 0 + \lim_{n \to +\infty} (U_n)$$

(qu'il aurait fallut trouver en question 3)d))

5) a)

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = \lim_{y \to +\infty} \arctan(y) - \arctan(0)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{J_n}{n} = \sum_{n=1}^{N} 2(J_n - J_{n+1}) = 2\left(\sum_{n=1}^{N} J_n - \sum_{n=1}^{N} J_{n+1}\right)$$

$$= 2\left(\sum_{n=1}^{N} J_n - \sum_{n=2}^{N+1} J_n\right) = 2(J_1 - J_{N+1}) = 2\left(\frac{\pi}{2} - J_{N+1}\right)$$

En admettant que $\lim\limits_{N \to +\infty} J_N = 0$ (car ~~pas~~ trouvée)

$$\lim \sum_{n=1}^{N} \frac{J_n}{n} = \pi$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 22	Session : 2024

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{J_n}{n}$ converge et vaut π

d)
```
def suite J(n):
    J = np.pi/2
    for k in range(2, n+1):
        J = 2*k*(J) - 2*(k+1)*J
    return J
```

7) a) X_n compte le nombre de piles obtenus lors des $2n$ premiers lancers dont la probabilité est, à chaque fois, pile

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)}$$

b) Pour que $(X_n = Y_n)$ se réalise, il faut n pile et n face

* On tire n piles : $\binom{2n}{n}$ possibilités
* on tire les n autres : 1 possibilité

De plus, $card(\Omega) = 4^n$ donc $P(X_n = Y_n) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Donc d'après 6), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

a) X_n est une somme de lois de bernoullis valant 1
si pile est réalisé