Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 :

1) Soit $(A,M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $M^2 = A$

donc $AM = M^2 M$
$= M^3$
$= M M^2$
$\boxed{AM = MA}$

2) • Supposons que A est inversible :
on $M^2 = A$
$M^2 A^{-1} = I_n$

$M M A^{-1} = I_n$
$M(MA^{-1}) = I_n$

donc M est inversible et $M^{-1} = MA^{-1}$

A est inversible $\Rightarrow$ M est inversible (1)

• Supposons que M est inversible :
on $M^2 = A$
$M = AM^{-1}$
$I_n = A(M^{-1}M^{-1})$
donc A est inversible et $A^{-1} = M^{-1}M^{-1}$
M est inversible $\Rightarrow$ A est inversible (2)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Par (1) et (2) :

$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow M \text{ est inversible}}$

3) a) $A^2 = AA$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = -I_2}$$

on pose $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x) = x^2 + 1$

donc $P(A) = A^2 + I_2 = 0$

P est un polynôme annulateur de A

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

λ est valeur propre de $A \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

on $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda^2 + 1 > 0$

donc $P(\lambda)$ n'admet pas de solution

donc A n'admet pas de valeur propre

$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

3) b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $M^2 = A$

on $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

donc $M^2 = A \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ ab + bd = 1 \\ ca + cd = -1 \\ cb + d^2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a^2 = -bc \\ ab + bd = 1 \\ c(a+d) = -1 \\ bc = -d^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a^2 = d^2 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = -1 \\ -bc = d^2 \end{cases}$

(*) $\iff \begin{cases} a = d \\ 2ba = 1 \\ 2ca = -1 \\ -bc = d^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -d \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -bc = d^2 \end{cases}$

$M^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a = d \\ \text{et } b = -c \end{cases}$

donc $\boxed{M^2 = A \text{ alors } a = d \text{ et } b = -c}$

3) c) ~~Reprenons l'équation (*) dans 3) b)~~

~~donc $\begin{cases} a = d \\ 2ba = 1 \\ 2ca = -1 \\ -bc = d^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = d \\ ab = \frac{1}{2} \\ ac = -\frac{1}{2} \\ -bc = d^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} d = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$~~

on remar que si $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

alors $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

Si $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

on a donc de solution de M

4) a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux

$Sp(A) = \{0\}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

on pose E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$

$E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\dim(E_0) = 1 \neq 3$

donc $\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable}}$

4) b) $M^4 = M^2 M^2$

$= AA$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M^4 \neq 0}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en lycée

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$M^6 = M^4 M^2$$
$$= M^4 A$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4)c) $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* : M^p = 0\}$

donc $M^{p-1} \neq 0$ et $M^{p-2} \neq 0 \dots M^1 \neq 0$ (car si $M=0$ alors $M^2=0$ donc $A=0$ or c'est faux)

on f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique

donc $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $f^k \neq 0$

$\exists u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0\}$ tel que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $f^k(u) \neq 0$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(u) = 0$

je n'arrive pas à conclure ...

4)d)

5)a) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = I_n$

on pose $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x) = x^2 - 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $P(M) = M^2 - I_n = 0$

donc $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } M}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

λ est valeur propre de $M \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 1 = \lambda$ ou $\lambda = -1$

donc $\boxed{Sp(M) \subset \{-1, 1\}}$

5) b) Soit $x \in \ker(f - id) \cap \ker(f + id)$

donc $f(x) = x$ car $x \in \ker(f - id)$

or $f(x) = -x$ car $x \in \ker(f + id)$

donc $x = -x$

$x = 0$

donc $\ker(f - id) \cap \ker(f + id) \subset \{0\}$

et $\{0\} \subset \ker(f - id) \cap \ker(f + id)$ car $\ker(f - id)$ et $\ker(f + id)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

donc $\ker(f - id) \cap \ker(f + id) = \{0\}$ (1)

De plus soit $x \in \mathbb{R}^n$, soit $z \in \ker(f - id)$ et $t \in \ker(f + id)$

donc $f(z) = z$ $f(t) = -t$

donc donc $f(z) + f(t) = z - t$

$f(z + t) = z - t$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists ! (z,t) \in \ker(f - id) \times \ker(f + id)$

tel que $\quad x = z + t \qquad (2)$

Par (1) et (2) :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \ker(f - id) \oplus \ker(f + id)}$$

5) c) d'après 5) a) et 5) b) $Sp(f) \subset \{-1, 1\}$

et $\quad \dim(\ker(f - id)) + \dim(\ker(f + id)) = \dim(\mathbb{R}^n)$

~~Prouvons que 1 et -1 sont valeurs propres de M et f :~~
~~Supposons que 1 ne soit pas valeur propre de M~~
~~donc $M - I_n$ est inversible~~

Si 1 et/ou -1 sont valeurs propres de f alors la somme des dimension de leur sous-espace propre est égale à la dimension de $\mathbb{R}^n$ donc

f est diagonalisable

donc $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$

5) d) M est dialonalisable de valeurs propres potentielles 1 et -1. $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tel que

$$P^{-1} M P = D \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \forall i \in [\![1, n]\!] \ \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

$M = P D P^{-1}$

donc | l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = I_n$ est l'ensemble des matrices semblables aux matrices diagonales où tous les éléments sont égaux à 1 ou à -1 |

6)a) $S_p(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tel que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts

donc A admet n valeurs propres distinctes
et $A \in M_n(\mathbb{R})$
donc A est diagonalisable

$\boxed{\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que :
$A = PDP^{-1}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de $D}$

6)b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$

• Supposons que $M^2 = A$
donc $N^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP$
$= P^{-1}MMP$
$= P^{-1}M^2P$
$= P^{-1}AP$
$N^2 = D$ par 6)a)

• Supposons que $N^2 = D$
donc $(P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = (P^{-1}AP)$ par 6)a)

$P^{-1}M^2P = P^{-1}AP$
$PP^{-1}M^2PP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$
$M^2 = A$

donc $\boxed{M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D}$

6)d) Supposons que A admet aumoins une valeur propre strictement négative
donc $\lambda_1 < 0$ car $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$

• Supposons que $M^2 = A$
alors $N^2 = D$ et N est diagonale par 6)c)
or λ_1 est un des coefficient de D
par 6)a)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

cependant comme N est diagonale alors N^2 est une matrice diagonales avec que des coefficients positifs sur sa diagonale

or $N^2 = D$ et D admet aumoins un coefficient strictement négatif sur sa diagonale

donc on a une contradiction

donc $M^2 \neq A$

Si $\boxed{A \text{ admet aumoins une valeur propre strictement négative alors } M^2 = A \text{ n'admet pas de solution}}$

6)e) À l'inverse si A n'admet aucune valeur propre strictement négative alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$

et $\exists N \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $N^2 = D$ avec $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ les coefficient de la matrice diagonale N

(on peut car on a supposé que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2, \dots \leq \lambda_n$)

donc par 6) b) $\exists M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = A$

De plus $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$

$\boxed{\text{donc l'ensemble des solutions dans le cas où } Sp(A) \subset \mathbb{R}_+ \text{ est l'ensemble des matrices semblables aux matrices diagonales } N \text{ tel que } N^2 = D}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) a) A est symétrique donc Diagonalisable

$\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonal et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que $A = P D {}^tP$ avec $P^{-1} = {}^tP$ et D une matrice diagonale avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est coefficients diagonaux

on pose $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

on pose $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on peut car $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i > 0$

donc $\Delta^2 = D$

on pose alors $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que :

$M = P \Delta {}^tP$

donc $M^2 = (P \Delta {}^tP)(P \Delta {}^tP)$

$M^2 = P \Delta^2 {}^tP$ car ${}^tP = P^{-1}$

$M^2 = P D {}^tP$

$M^2 = A$

de plus ${}^tM = {}^t(P \Delta {}^tP)$

$= {}^t(P(\Delta {}^tP))$

$= {}^t(\Delta {}^tP) {}^tP$

$= {}^t({}^tP) {}^t\Delta {}^tP$

$= P {}^t\Delta {}^tP$

$= P \Delta {}^tP$ car Δ est diagonale donc ${}^t\Delta = \Delta$

${}^tM = M$

donc M est symétrique

et M admet pour valeur propre $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ qui sont strictement positive car $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_i > 0$

donc $\boxed{\text{il existe } M \text{ symétrique avec des valeurs propres strictement positives telles que } M^2 = A}$

7) b) i) M_1 et M_2 sont symétriques ayant pour valeurs propres $a_1, \dots, a_m$ pour M_1 et $b_1, \dots, b_m$ pour M_2 qui sont strictement positive

$$\boxed{\begin{array}{l} M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont diagonalisables} \\ \exists (P_1, P_2) \in (M_m(\mathbb{R}))^2 \text{ orthogonales et } (D_1, D_2) \in (M_m(\mathbb{R}))^2 \text{ diagonales} \\ \text{telles que } M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \text{ et } M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1} \\ \text{avec } a_1, \dots, a_m \text{ les coefficients diagonaux de } D_1 \text{ et } b_1, \dots, b_m \text{ les coefficients diagonaux de } D_2 \end{array}}$$

ii) $P = P_1^{-1} P_2$

$$D_1^2 P = (P_1^{-1} M_1 P_1)(P_1^{-1} M_1 P_1)(P_1^{-1} P_2)$$
$$= (P_1^{-1} M_1^2 P_1) P_1^{-1} P_2$$
$$= (P_1^{-1} M_2^2 P_2) \quad \text{car } M_1^2 = M_2^2$$
$$= P_1^{-1} P_2 (P_2^{-1} M_2^2 P_2)$$
$$= P (P_2^{-1} M_2^2 P_2)$$
$$= P (P_2^{-1} M_2 P_2)(P_2^{-1} M_2 P_2)$$

$$\boxed{D_1^2 P = P D_2^2}$$

Comme D_1 et D_2 sont diagonaux alors D_1^2 et D_2^2 le sont aussi et leurs coefficients diagonaux sont au carré, or leur coefficient diagonaux sont $a_1, \dots, a_m$ et $b_1, \dots, b_m$

donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2 \quad a_i^2 (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2}$

iii) Par ii) : $\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2 \quad a_i^2 (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$

admettons le résultat

donc $\forall (i,j) \in [\![1, m]\!]^2 \quad a_i (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$

donc $\boxed{D_1 P = P D_2}$

iv) $D_1 P = P D_2$ par iii)

$$(P_1^{-1} M_1 P_1)(P_1^{-1} P_2) = (P_1^{-1} P_2)(P_2^{-1} M_2 P_2)$$

$$P_1^{-1} M_1 P_2 = P_1^{-1} M_2 P_2$$

$$P_1 P_1^{-1} M_1 P_2 P_2^{-1} = P_1 P_1^{-1} M_2 P_2 P_2^{-1}$$

$$\boxed{M_1 = M_2}$$

Partie 2 :

8) ① $\forall (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \quad (A,B) = tr({}^tAB)$

on $tr({}^tAB) \in \mathbb{R}$

donc $(\,,\,)$ est une application de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

② $\forall (A,B,C) \in (M_n(\mathbb{R}))^3 \quad \forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}(\lambda A + \beta B, C) &= tr({}^t(\lambda A + \beta B) C) \\ &= tr((\lambda {}^tA + \beta {}^tB) C) \\ &= tr(\lambda {}^tAC + \beta {}^tBC) \\ &= \lambda tr({}^tAC) + \beta tr({}^tBC) \quad \text{car } tr \text{ est linéaire}\end{aligned}$$

$$(\lambda A + \beta B, C) = \lambda (A,C) + \beta (B,C)$$

donc $(\,,\,)$ est linéaire sur la première variable

③ $\forall (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \quad (A,B) = tr({}^tAB)$

on on pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

donc ${}^tA = (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on pose $({}^tAB) = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $({}^tBA) = (d_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$

donc $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,j}$

et $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!] \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i}\, a_{k,j}$

donc $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}$ et $d_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i}\cdot a_{k,i}$

en particulier

$$tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, b_{k,i}$$

et $tr({}^tBA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}\cdot a_{k,i}$

donc $tr({}^tBA) = tr({}^tAB)$

$(A,B) = (B,A)$

donc $(\,|\,)$ est symetrique

tel que $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$

(4) $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $(A,A) = tr({}^tAA)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2$$

or $\forall (i,k)\in [\![1,n]\!]^2 \quad (a_{k,i})^2 \geq 0$

donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2 \geq 0$

$(A,A) \geq 0$

$(A,A) = 0 \iff tr({}^tAA) = 0$

$(A, A) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (a_{k,i})^2 = 0$

$\iff \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (a_{k,i})^2 = 0$ car $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]$ $(a_{k,i})^2 \geq 0$

$\iff \forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{k,i} = 0$

$(A, A) \iff A = 0$

$(,)$ est définie positive

Par $\boxed{①, ②, ③ \text{ et } ④ : (,) \text{ est un produit scalaire}}$

9) $\|M\|_2 = \sqrt{(M,M)}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (m_{k,i})^2}$ par 8)

On $\forall (p,k) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{k,p} \leq \max_{1 \leq i,j \leq n} ((M)_{i,j})$

$(m_{k,p})^2 \leq \left(\max_{1 \leq i,j \leq n} ((M)_{i,j})\right)^2$

$\sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (m_{k,p})^2 \leq n^2 \max_{1 \leq i,j \leq n} ((M)_{i,j})^2$

$\sqrt{\sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (m_{k,p})^2} \leq n \max_{1 \leq i,j \leq n} |(M)_{i,j}|$ car $n \geq 1$

$$\boxed{\forall M \in M_n(\mathbb{R}) \quad \|M\|_2 \leq n \times \max_{1 \leq i,j \leq n} |(M)_{i,j}|}$$

~~10) Soit $(M_k)_{k \geq 0}$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} (M_k) = L$~~

11) a) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$

$\varphi'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2x^2}$

$\iff 1 \geq \frac{1}{x^2}$

$\iff x^2 \geq 1$

$\varphi'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$ ou $x \leq -1$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (\varphi(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (\varphi(x)) = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (\varphi(x)) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (\varphi(x)) = -\infty \end{cases}$

$\varphi(1) = 1 \qquad \varphi(-1) = -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

11) b) on pose $\mathcal{P}(n)$: " si $a > 0$ alors U_n est définie $|U_n| \geq 1$ et U_n a le même signe que a "

$U_1 = \frac{1}{2}\left(U_0 + \frac{1}{U_0}\right)$

$U_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$

U_1 est bien définie car $a > 0$

De plus d'après 11)a) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |\varphi(x)| \geq 1$

donc $|U_1| \geq 1$

et $U_1 > 0$ car $a > 0$ et $\frac{1}{a} > 0$

donc V_1 a le même signe que a

$\mathcal{P}(1)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un entier $m \geq 1$;

$U_{m+1} = \frac{1}{2}\left(U_m + \frac{1}{U_m}\right)$ donc U_{m+1} est bien définie car par hypothèse de récurrence U_m est de même signe que a donc $U_m > 0$

de plus U_{m+1} est donc strictement positive car $U_m > 0$ par hypothèse de récurrence

de plus par 11) $|\varphi(U_m)| \geq 1$

donc $|U_{m+1}| \geq 1$

donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie

$$\begin{cases} \mathcal{P}(1) \text{ est vraie} \\ \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1) \end{cases}$$

Par récurrence : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}(m) \text{ est vraie}}$

11)c) $\forall m \in \mathbb{N}^* \quad U_{m+1} - U_m = \frac{1}{2} U_m + \frac{1}{2U_m} - U_m$

$$= \frac{1}{2U_m} - \frac{1}{2} U_m$$

$$= \frac{1 - U_m^2}{2U_m}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques en Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

. Si $a > 0$:

alors $\forall n \geq 1$ $|U_n| \geq 1$

$U_n \geq 1$ car $\forall n \geq 1$ $U_n > 0$ par 11) b)

$U_n^2 \geq 1$

$1 - U_n^2 \leq 0$

donc $\forall n \geq 1$ $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$U_{n+1} \leq U_n$

donc $(U_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

. Si $a < 0$;

alors $\forall n \geq 1$ $U_n < 0$ par 11) b)

et $|U_n| \geq 1$

donc $U_n \leq -1$

$U_n^2 \geq 1$

donc $1 - U_n^2 \leq 0$

donc $\frac{1 - U_n^2}{2U_n} \geq 0$ car $\forall n \geq 1$ $U_n < 0$

$\forall n \geq 1$ $U_{n+1} \geq U_n$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante

donc $\boxed{(U_n)_{n\geq 1} \text{ est monotone}}$

18/

Problème 2 :

Partie 1 :

1) on pose $\mathcal{P}(n)$: " I_n converge et $I_n = n!$ "

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du$$

or $\int_0^{+\infty} e^{-u} du$ est une intégrale convergente

$$I_0 = \lim_{y \to +\infty} \left([-e^{-u}]_0^y \right)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(-e^{-y} + 1 \right)$$

$$= 1$$

$$I_0 = 0!$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$:

donc I_n converge

et $I_n = n!$

or $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-u} du$

$$= \int_0^{+\infty} u \, u^n e^{-u} du$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$: On pose :

$t(u) = -e^{-u}$ $\qquad$ $v(u) = u^{n+1}$

$t'(u) = e^{-u}$ $\qquad$ $v'(u) = (n+1) u^n$

t et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$

Par intégration par parties :

$$\int_0^A u^{n+1} e^{-u} du = [-e^{-u} u^{n+1}]_0^A + (n+1) \int_0^A u^n e^{-u} du$$

$$= -e^{-A} A^{n+1} + (n+1) \int_0^A u^n e^{-u} du$$

on $\begin{cases} \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{A^{n+1}}{e^A} \right) = 0 \text{ par croissance comparée} \\ \text{et } I_n \text{ converge et vaut } n! \end{cases}$

donc $\int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u}\,du$ converge et par passage à la limite lorsque A tend en $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u}\,du = (m+1) I_m$$
$$= (m+1)\, m! \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$I_{m+1} = (m+1)!$$

$\mathcal{P}(m+1)$ est vraie

$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \text{ est vraie} \\ \forall m \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1) \end{cases}$

Par récurrence : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \quad I_m = m!}$

2) a) h_n est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, \frac{1}{n}[$ sur $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$ et sur $]\frac{2}{n}, +\infty[$

$\forall t \in]-\infty, 0[\quad h_n'(t) = 0$
$\forall t \in]\frac{2}{n}, +\infty[\quad h_n'(t) = 0$

$\forall t \in]0, \frac{1}{n}[\quad h_n'(t) = n^2$ donc $h_n'(t) \geq 0$
h_n est croissante sur $]0, \frac{1}{n}[$
$\forall t \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\quad h_n'(t) = -n^2$ donc $h_n'(t) \leq 0$
h_n est décroissante sur $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$

Finalement : $\boxed{h_n \text{ est croissante sur }]0, \tfrac{1}{n}] \text{ et décroissante sur }]\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}] \text{ et égale à } 0 \text{ sur }]-\infty, 0] \text{ et sur }]\tfrac{2}{n}; +\infty[}$

(I) d'après ce qu'on vient de faire :
$\forall t \in \mathbb{R} \quad h_n(t) \geq 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 31	**Session :** 2024

Épreuve de : Math en Lyon

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(2) h_n est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, \frac{1}{n}[$

sur $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$ et sur $]\frac{2}{n}; +\infty[$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_0^{2/n} h_n(t)\,dt$

on $\int_0^{1/n} h_n(t)\,dt = \int_0^{1/n} n^2 t\,dt$

et $t \mapsto n^2 t$ est continue sur $[0, \frac{1}{n}]$ donc $\int_0^{1/n} h_n(t)\,dt$ existe

et $\int_{1/n}^{2/n} h_n(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{2/n} n^2\left(\frac{2}{n} - t\right)dt$

On $t \mapsto n^2\left(\frac{2}{n} - t\right)$ est continue sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ donc $\int_{1/n}^{2/n} h_n(t)\,dt$ existe

donc $\int_0^{2/n} h_n(t)\,dt$ existe

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt$ existe et :

$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) = \int_0^{1/n} h_n(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{2/n} h_n(t)\,dt$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = n^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{1/n} + n^2 \left[\frac{2}{n}t - \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^{2/n}$$

$$= n^2\left(\frac{1}{2n^2}\right) + n^2\left(\frac{4}{n^2} - \frac{4}{2n^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 1$$

Par ①, ②, ③ : $\boxed{h_n \text{ peut être considérée comme une densitée de probabilitée}}$

2) b) Soit $t \in [0, 1]$

Partie 2 :

3) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) \quad \text{par linéarité de l'espérance}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{E(S_n) = \frac{n}{\lambda}}$$

$$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) \quad \text{car } Y_1, \dots, Y_n \text{ sont indépendantes}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

4) a) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ on pose F la fonction de répartition de $X_i = \lambda Y_i$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P(\lambda Y_i \leqslant x)$
$= P(Y_i \leqslant \frac{x}{\lambda})$ car $\lambda > 0$

* Si $x \geqslant 0$ alors $\frac{x}{\lambda} \geqslant 0$ car $\lambda > 0$

donc $F(x) = 1 - e^{-\lambda(\frac{x}{\lambda})}$
$= 1 - e^{-x}$

* Si $x < 0$ alors $\frac{x}{\lambda} < 0$ car $\lambda > 0$

donc $F(x) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

4) b) On pose $\mathcal{P}(n)$: " $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$ "

$\lambda S_1 = \lambda Y_1 = X_1$

$\lambda S_1 = X_1$

on par 4) a) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

donc $\lambda S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$
$\lambda S_1 \hookrightarrow \gamma(1)$
donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 1$:
$\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$
on $\lambda S_{n+1} = \lambda S_n + \lambda Y_{n+1} = \lambda S_n + X_{n+1}$
par hypothèse de récurrence
on $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$ et $X_{n+1} \hookrightarrow \gamma(1)$ par 4) a)

23/

$Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}$ sont indépendantes

donc $\lambda \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et λY_{n+1} sont indépendantes

Par la stabilité de la loi gamma :

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} Y_i + \lambda Y_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1)$$

$$\lambda S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1)$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

$\begin{cases} \mathcal{P}(1) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)}$

4)c) On pose F_{S_n} la fonction de répartition de S_n et G_n la fonction de répartition de la loi $\gamma(n)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x)$

$= P(\lambda S_n \leq \lambda x)$ car $\lambda > 0$

$= G_n(\lambda x)$ par 4)b)

~~* Si $x \leq 0$ alors $\lambda x \leq 0$ car $\lambda > 0$~~
~~donc $P(\lambda S_n \leq \lambda x) = 0$~~
~~car $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$ par 4)b)~~
~~donc $F_{S_n}(x) = 0$~~

- G_n est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction de répartition) et $x \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{R}$
  Par composition, F_{S_n} est continue sur $\mathbb{R}$ (1)

- G_n est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$
  $x \mapsto \lambda x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
  Par composition, F_{S_n} est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (2)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 31

Session : 2024

Épreuve de : Math EM Lyon

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Par (1) et (2) : $\boxed{S_n \text{ admet une densité}}$

$\forall x \in]-\infty ; 0[\quad f'_{S_n}(x) = \lambda G'_n(\lambda x)$

$= 0$ car $\lambda x < 0$

$\forall x \in]0 ; +\infty[\quad f'_{S_n}(x) = \lambda G'_n(\lambda x)$

$= \lambda \left(\frac{1}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1} \right)$

$= \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1}$

On pose :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

f_{S_n} est une densité de S_n

5) a) D'après le théorème de transfert :

$\frac{1}{S_n}$ admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_n}(t)\,dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_n}(t)\,dt$ converge absolument on $\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{t} f_{S_m}(t)\right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_m}(t) dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda)^m}{(m-1)!} e^{-\lambda t} t^{m-2} dt$

on pose $u = \lambda t$ (changement de variable affine)

$t = \frac{u}{\lambda}$ car $\lambda > 0$

$dt = \frac{1}{\lambda} du$

$\begin{cases} \text{Si } t \mapsto +\infty \text{ alors } u \mapsto +\infty \\ \text{Si } t \mapsto 0 \text{ alors } u \mapsto 0 \end{cases}$

$\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda)^m}{(m-1)!} e^{-\lambda t} t^{m-2} dt$ converge $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{m-2} \left(\frac{1}{\lambda}\right) du$ converge

on $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{m-2} \left(\frac{1}{\lambda}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{(m-1)!} e^{-u} u^{m-2} du$

on $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m-2} du$ converge $\Leftrightarrow m-2 \geq 0$ par 1)

$\Leftrightarrow m \geq 2$

- Si $m \in \{0, 1\}$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m-2} du$ diverge

et donc S_m n'admet pas d'espérance

- Si $m \geq 2$: alors $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{m-2} du$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-u} u^{n-2} du$ converge et vaut $\frac{\lambda}{n-1}$ par 1)

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-2} dt$ converge et vaut $\frac{\lambda}{n-1}$

donc $\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{t} f_{S_n}(t)\right| dt$ converge

$\frac{1}{S_n}$ admet une espérance

D'après le théorème de transfert :

$\forall n \geq 2$ $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_n}(t) dt$

$$\boxed{E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda}{(n-1)}}$$

5) b) De même, d'après le théorème de transfert :
$\frac{1}{S_n}$ admet une variance

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{S_n^2}$ admet une espérance

$\Leftrightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_{S_n}(t) dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f_{S_n}(t) dt$ converge car $t \mapsto \frac{1}{t^2} f_{S_n}(t)$ est positif

$\Leftrightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-u} u^{n-3} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} du$ converge sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec le changement de variable affine $u = \lambda t$)

$\Leftrightarrow$ $n \geq 3$

- Si $n < 3$
$\frac{1}{S_n}$ n'admet pas de variance

- Si $n \geq 3$ $\frac{1}{S_n}$ admet une variance et $E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{(n-1)!} e^{-u} u^{n-3} du$

$E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$ par 1)

$V\left(\frac{1}{S_n}\right) = E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - E\left(\frac{1}{S_n}\right)^2$

$= \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2}$ par 5)a)

$= \frac{\lambda^2(n-1) - \lambda^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)}$

$= \frac{\lambda^2(n-1-n+2)}{(n-1)^2(n-2)}$

$\boxed{\forall n \geqslant 3 \quad V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}}$

6) $W_n = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}$

S_n est à densité
Donc d'après le cours, W_n est à densité
(changement de variable affine)

On pose F_{W_n} la fonction de répartition de W_n

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{W_n}(x) = P\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} \leqslant x\right)$

$= P\left(S_n \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\lambda}(x+\sqrt{n})\right)$

$= F_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}(x+\sqrt{n})\right)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{W_n}(x) = F_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}x + \frac{n}{\lambda}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 31	Session : 2024

Épreuve de : Math Em Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

ainsi en dérivant on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{W_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda} x + \frac{n}{\lambda}\right)$$

$\boxed{f_{W_n} \text{ est une densité de } W_n}$

7) a) $(Y_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variable aléatoire indépendantes et identiques admettant une espérance et une variance non nulle D'après le théorème central-limite :

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{avec } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

on $\begin{cases} V(S_n) = \dfrac{n}{\lambda^2} & \text{d'après 3)} \\ E(S_n) = \dfrac{n}{\lambda} \end{cases}$

donc $\sigma(S_n) = \dfrac{\sqrt{n}}{\lambda}$ et $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}\left(S_n - \dfrac{n}{\lambda}\right)$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n}$$

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = W_n$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\boxed{W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \text{avec} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

~~7) b) Par 7) a) $W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$~~

~~donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(F_{W_n}(x)\right) = \phi(x)$ avec ϕ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$~~

~~$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f_{W_n}(t)\,dt \right) = \phi(x)$~~

Partie 4 :

16) a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$$= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^{-1}}{n+1} \times \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right)$$

$$= \ln(e^{-1}) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$

donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

$$n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

donc $-1 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=}$