Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 27	Session : 2024

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2)

1)a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(*) f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ comme une fonction constante.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ comme un produit d'une fonction affine et d'une fonction exponentielle, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc continue sur $\mathbb{R}^*$

(**) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad xe^{-x^2/2} \geq 0$
Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

(***) Calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$:

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

D'une part, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx$

$= 0$

Soit $A > 0$, posons $I(A) = \int_0^A f(x)\,dx$

$= \int_0^A xe^{-x^2/2}\,dx$

$I(A) = \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^A$

$= -e^{-A^2/2} + e^0$

or $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A^2/2} = 0$. Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} I(A) = 1$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et par la relation de Chasles,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + 1$
$= 1$

$\boxed{\text{Donc par } (*), (**) \text{ et } (***) \; f \text{ est une densité.}}$

1) b) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$

Donc par la formule de Koenig-Huygens, $E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2$
$= 1$

Le moment d'ordre 2 d'une variable de loi normale centrée et réduite vaut 1.

1) c) Donc, comme $E(Z^2) = 1$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1 \quad \text{avec } f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

, une densité de Z

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{x e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1$$

Or la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x^2/2}$ est paire, donc $x \mapsto x f(x)$ est paire

Donc par convergence des fonctions paires convergentes,

~~$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$ converge et vaut $2\int_0^{+\infty}$~~

$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ par linéarité de la convergence,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \quad \text{par linéarité de la convergence.}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Donc X admet une espérance et $\boxed{E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

2) Soit $x < 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0\, dt \quad \text{car } f(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$= 0$$

Soit $x \geq 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{x} t\, e^{-\cancel{x}t^2/2}\, dt$$

$$= \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x$$

$$= -e^{-x^2/2} + 1$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

3.a) $Z = X^2$

Soit $x < 0$, $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$

$$= \mathbb{P}(X^2 \leq x)$$

$$= 0 \qquad \text{car } [X^2 \leq x] = \emptyset \text{ si } x < 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024
	Épreuve de : Maths EDHEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3.a) Soit $x \geq 0$ $\quad F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$

$$= \mathbb{P}(X^2 \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(|X| \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$$= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{x}) - \mathbb{P}(X \leq -\sqrt{x})$$ ~~car X est une~~

$$= 1 - e^{-(\sqrt{x})^2/2} - 0 \quad \text{car } -\sqrt{x} \leq 0$$

$$= 1 - e^{-x/2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

On De plus $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $X^2(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$

On reconnait donc la fonction de répartition et l'univers d'une variable aléatoire de paramètre $\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Donc } Z = X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3.b)
```
def simulX():
    z = rd.exponential(2)
    X = np.sqrt(z)
    return(X)
```

4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$

4.a) Soit $x < 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\dfrac{X}{\sqrt{n}} \leq x\right)$

$= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{n}\, x)$

$= 0$ car $\sqrt{n}x < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit $x \geq 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{n}\, x)$

$= 1 - e^{-(\sqrt{n}\,x)^2/2}$ car $\sqrt{n}\,x \geq 0$

$= 1 - e^{-n x^2/2}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

4.b) Soit $x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$

Soit $x \geq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 1$ car $\dfrac{x^2}{2} \geq 0$

Donc (Y_n) converge en loi vers une variable presque surement positive.

4. c) Par Q1. c) $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(X)$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Donc (Y_n) admet une espérance, alors par la théorème de Markov, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon} \Rightarrow \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}}$$

or $0 \leq \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{n2}}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}\ \varepsilon} = 0$

Donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$

5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(M_n > x) = \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, \dots X_n > x)$

$= \mathbb{P}((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots \cap (X_n > x))$

$= \mathbb{P}(X_1 > x)\,\mathbb{P}(X_2 > x) \dots \mathbb{P}(X_n > x)$ par indépendance mutuelle.

$= \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X > x)$ car les variables suivent toutes la même loi que X

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(M_n > x) = \mathbb{P}(X > x)^n$

$= [1 - \mathbb{P}(X \leq x)]^n$

$= (1 - F_X(x))^n$

5.a) Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(M_n > x)$
$= 1 - (\mathbb{P}(X > x))^n$

si $x \leq 0$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq x))^n$
$= 1 - 1^n$
$= 0$

si $x \geq 0$ $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1 - (1 - F_X(x))^n$
$= 1 - [1 - (1 - e^{-x^2/2})]^n$

$= 1 - (e^{-x^2/2})^n$

$= 1 - e^{-nx^2/2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = G_n(x)$, (M_n) suit la même loi que Y_n.

5.b)
```
def simulM(n):
    X= np.array([simulX() for k in range(n)]):
    M= X / np.sqrt(n)
    return (M)
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3) 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t)\, dt$

Posons $u = x - t \iff t = x - u$

et $\varphi(u) = x - u$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi'(u) = -1$

$\iff -1 = \dfrac{dt}{du}$

$\iff dt = -du.$

$\varphi(0) = x - 0$, $\varphi(x) = x - x = 0$

Donc par changement de variable.

$$f(x) = 1 + \int_x^0 (x-u) f(u) (-du)$$

$$\iff f(x) = 1 - \int_x^0 (x-u) f(u)\, du$$

$$\iff f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\, du$$

Donc $(*) \iff f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u)\, du$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) a) Soit f une fonction solution de $(*)$ et $(**)$ et continue sur $\mathbb{R}$.

la fonction $x \mapsto \int_0^x (x-u) f(u)\, du$ est l'unique primitive de la fonction $j : u \mapsto (x-u) f(u)$ qui s'annulle en 0, on nomme cette primitive J.

Donc J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive de j, une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (car f est elle-même continue sur $\mathbb{R}$).

Donc par somme de fonctions dérivables,
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (somme de 1 et J.)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 + J'(u)$

2.b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \int_0^x f(u)\,du$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet au moins une primitive dérivable sur, notons F l'une d'entre elles.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = F(x) - F(0)$

f' est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme différence d'une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'une constante $F(0)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 1F'(x) - 0F'(0)$
$= f(x)$

2.c) Notons (E) l'équation différentielle $f''(x) = f(x)$ où f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x^2 - 1 = 0$ son équation caractéristique associée.

$x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est donné par
$\mathcal{S} = \{ x \mapsto Ae^{x} + Be^{-x} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}$

2. d) $f(0) = 1 + \int_0^0 t\, f(\;.-t)\,dt$

$= 1$

$f'(0) = \int_0^0 f(u)\,du = 0$

Donc $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

Donc $f(0) = 1 \iff Ae^{0} + Be^{-0} = 1$
$\iff A + B = 1$

$f'(0) = 0 \iff Ae^{0} - Be^{-0} = 0$
$\iff A - B = 0$

Or $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=B \end{cases} \iff A=B=\frac{1}{2}$

Donc l'unique solution de (*) admet au plus une solution : $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

3) Calculons $1 + \int_0^x t\, f(x-t)\, dt$ avec la fonction trouvée à la Q 2.d :

$$= 1 + \int_0^x t\left(\frac{e^{x-t}+e^{-(x-t)}}{2}\right)dt$$

$$= 1 + \int_0^x t\left(\frac{e^{x-t}+e^{t-x}}{2}\right)dt$$

4. On cherche les fonctions continues telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t\, f(x-t)\, dt$

Or on sait par les questions précédentes que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 1 + \int_0^x t\, f(x-t)\, dt$

$\iff f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$\iff \int_0^x t\, f(x-t)\, dt = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} - 1$

Donc l'unique solution de $f(x) = \int_0^x t\, f(x-t)\, dt$ est $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} - 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 1)

1. a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\forall x \in [0,1]$ $\dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x}$

$$= \frac{a(2+x) + b(2-x)}{(2-x)(2+x)}$$

$$= \frac{2a + ax + 2b - bx}{4 - x^2}$$

Par identification polynomiale, $\dfrac{a}{2-x} + \dfrac{b}{2+x} = \dfrac{1}{4-x^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ a = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{4}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1.b) Donc $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4(2-x)} + \frac{1}{4(2+x)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\ln(2-x) + \ln(2+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\ln(1) + \ln(3)\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)}$$

2) $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x}{(2-x)(2+x)}\,dx$$

Posons $u = 2 - x \iff x = 2 - u$ et $\varphi(u) = 2 - u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = -1 \iff -1 = \frac{dx}{du}$

$\iff dx = -du$

$\varphi(0) = 2$

$\varphi(1) = 1$

Donc par changement de variable,

$$U_1 = \int_2^1 \frac{2-u}{u(4-u)} (-du)$$

$$= -\int_2^1 \frac{2-u}{4u-u^2} du$$

$$= \int_1^2 \frac{2-u}{4u-u^2} du$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(4u-u^2)\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln(8-4) - \frac{1}{2}\ln(4-1)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}\right)$$

Donc $U_1 = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $4U_n - U_{n+2} = 4\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx$

$$\Rightarrow 4U_n - U_{n+2} = \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x^n \, dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,
$4U_n - U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

3.b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 4u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1} \iff u_{n+2} = 4u_n - \frac{1}{n+1}$

Donc par exemple, $u_2 = 4u_0 - 1$ et $u_3 = 4u_1 - \frac{1}{2}$

$= \ln(3) - 1$

$= 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}$

Donc def suite(n):

```
        .
        .
        .
        for k in range (2, n+1, 2):
            u = 4 * u - 1 /((n+1)
    else:
        .
        for k in range (3, n+1, 2):
            u = 4 * u - 1/((n+1)
    return(u):
```

4.a) Soit $x \in [0,1]$, $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0$

$\Rightarrow 3 \leq 4 - x^2 \leq 4$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$ par décroissance de l'inverse

$\Rightarrow \frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}$ car $x^n \geq 0$ $\forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx$ par croissance de l'intégrale avec $0 \leq 1$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}}$$

4.b) Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$

Donc par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, la suite converge vers 0

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4. c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{1}{4(n+1)} \leq U_n$

Or $\frac{1}{4n+4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$

Or la série de terme général $\frac{1}{4n}$ diverge comme produit d'une série harmonique divergente.

Donc par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{1}{4(n+1)}$ diverge.

Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général (U_n) diverge car ~~Un est~~ $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq \frac{1}{4(n+1)}$, soit le terme général d'une série divergente.

5. a) Ce script et le résultat graphique nous montrent que $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times n \times U_n = 1$

Donc que $\lim \frac{U_n}{1/3n} = 1$

Donc on peut conjecturer le résultat ③, $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5. b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$.

Les fonctions définies par $u(x) = \frac{1}{4-x^2}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$

$$u'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \qquad v'(x) = x^n$$

Par le théorème d'intégration par parties,

$$u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x\,x^{n+1}}{(4-x^2)^2(n+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)(4-1)} - \frac{0}{(n+1)4} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx}$$

5. c) Par Q 4. a) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{1}{4(n+1)} \leq \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \quad \frac{-1}{(n+1)3} \leq -\frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leq -\frac{1}{3.(n+1)} \times \frac{n+1}{-2} \quad \text{car } -\frac{(n+1)}{2} < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{6}$$

Problème :

1.a) $a_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0)$ $\quad b_0 = \mathbb{P}(X_0 = 1)$ $\quad c_0 = \mathbb{P}(X_0 = 2)$

$= 0$ $\quad = 1$ $\quad = 0$

Car il y a exactement 1 boule blanche dans A au tirage initial.

1.b) * Si on pioche une noire dans l'urne A et dans la B alors, il y a 1 boule blanche et une boule noire dans A.

~~Donc~~ De même, si on pioche une blanche dans A et dans B.

Donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ Donc $b_1 = \frac{1}{2}$

* Si l'on pioche une blanche de A et une noire dans B, alors A ne contient pas de boule blanche.

Donc $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{4}$

* Si l'on pioche une boule noire dans A et une blanche de B, alors A contient 2 blanches.

Donc $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}$

Donc $a_1 = c_1 = \frac{1}{4}$ $\quad b_1 = \frac{1}{2}$

1.c) $((X_n=0), (X_n=1), (X_n=2))$ forme un système complet d'évènements car il y a seulement 2 boules blanches en jeu, ~~donc A pe~~ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $X_n(\Omega) = \{0,1,2\}$.
De plus, ces 3 évènements sont incompatibles.

1.d) Donc ~~par~~ comme système complet d'évènements, $\forall n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}(X_n=1) + \mathbb{P}(X_n=2) = 1$
$\Rightarrow \boxed{a_n + b_n + c_n = 1}$

2. a) * Si au tirage n, il y a 0 boule blanche dans A, il y en aura forcément 1 au tirage n+1 car il y a 2 blanches et 0 noire dans B.
Donc $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = 0$, $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$ $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = 0$

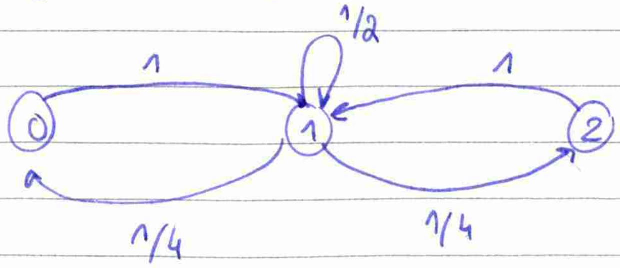
* Si il y a 1 boule dans A au tirage n.
- il y en aura 0 en n+1 si et seulement si on tire une blanche dans A et noire en B
D'où $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- il y en aura 2 au n+1° si et seulement si on tire une noire en A et une blanche en B. D'où $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

- il y en aura une si l'on tire les 2 blanches d'un coup ou les 2 noires d'un coup. D'où $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

* Si il y a 2 blanches en A, il y a 0 noire, donc au tirage n+1, on met une boule blanche de A dans B.
D'où $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 0$ $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1$ $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = 0$

Donc le graphe ci-joint représente notre chaîne de Markov



Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

2. b) D'où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associée au graphe.

2. c) Par la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements $((X_n=0), (X_n=1), (X_n=2))$ $\forall n \geq 1$

$$P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0 \cap X_{n+1}=0) + P(X_n=1 \cap X_{n+1}=0) + P(X_n=2 \cap X_{n+1}=0)$$
$$= 0 + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)\, b_n + 0$$
$$= \frac{1}{4} b_n$$

$$P(X_{n+1}=1) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\, a_n + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\, b_n + P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\, c_n$$
$$= a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$$

$$P(X_{n+1}=2) = 0 + P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) + 0$$
$$= \frac{1}{4} b_n$$

D'où $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n \end{cases}$

3) Si $n = 0$ On avait $U_1 = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}\right)$ et $U_0 = (0 \; 1 \; 0)$

D'où $\begin{cases} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 1 \\ \frac{1}{2} = 1 \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times 0 \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 1. \end{cases}$

Donc les relations de Q 2.c sont vraies $\forall n \in \mathbb{N}$

4. a) $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 0\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + 1\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + 2\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$
$= b_{n+1} + 2c_{n+1}$

4. b) Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + a_n + c_n$

D'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n + \frac{2}{4} b_n$

$= a_n + b_n + c_n$

$= 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$

5. a) $(a_n \; b_n \; c_n)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a_n - b_n + 2c_n$

$(a_{n+1} \; b_{n+1} \; c_{n+1})\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (U_{n+1} V) = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1}$

$= \frac{1}{2} b_n - a_n - \frac{1}{2} b_n - c_n + \frac{1}{2} b_n$

$= -a_n + \frac{1}{2} b_n - c_n$

$= -\frac{1}{2}(2a_n - b_n + 2c_n)$

$= -\frac{1}{2}(U_{n+1} V)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(U_{n+1} V) = -\frac{1}{2}(U_n V)$

$\boxed{(U_n V) \text{ est une suite géométrique de raison } -\frac{1}{2}}$

5. b) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n V = U_0 V \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$= (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= -1\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$\boxed{\text{D'où } 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

6. On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(\ast) \Rightarrow \begin{cases} 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n + 2c_n = 1 & \text{par Q 4.c)} \\ a_n + b_n + c_n = 1 & \text{par Q 1. d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n + 2c_n = 1 \\ 3b_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2c_n = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2c_n + b_n \\ c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$\circledast \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_n = -\left(\frac{-1}{2}\right)^n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \\ c_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ b_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{cases}$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3}\left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right. \\ \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \end{cases}}$$

7. $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{6}$

Donc la ~~variables~~ suite de variables (X_n) converge en loi vers X telle que

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ $\quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 28

Session : 2024

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

8) a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \right.$

8. a) Admettons que $2M^3 = M^2 + M$.

8.b) Donc le polynôme $P(X) = 2X^3 - X^2 - X$ est un polynome annulateur de M.

Donc $Sp(M) \subset \{ 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0 \}$

$\subset \{ \lambda(2\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \}$

or ~~on~~ $\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$ $\quad \lambda_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

Donc $Sp(M) \subset \{0, -\frac{1}{2}, 1\}$

On admettra que $Sp(M) = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$ et qu'une base des, sous espaces propres.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8.c) /

8.d) $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & \frac{1}{2} & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $MP = PD \iff M = PDP^{-1}$ où P est inversible et D est diagonale et contient les valeurs propres de M sur sa diagonale.

Donc M est diagonalisable.

8.e) /

8.f) Montrons par récurrence que la proposition H_n : "$U_n = U_0 M^n$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

H_0 : $U_0 = (0 \ 1 \ 0)$

$U_0 M^0 = U_0 I$ Donc H_0 est vraie

Soit n fixé quelconque. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} l'est aussi.

$U_n = U_0 M^n \Rightarrow U_n M = U_0 M^n M$

$\Rightarrow U_{n+1} = U_0 M^{n+1}$

Donc H_{n+1} est vraie

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = U_0 M^n$

8.g) Sachant que la loi de (X_n) correspond ~~à la~~ au premier coefficient ~~de la variable U_n~~ du vecteur ligne U_n.

On pourrait calculer ce coefficient à l'aide de la formule précédente afin de trouver la loi de $(X_n.)$