Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 23	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique. A étant symétrique elle est diagonalisable.

Donc par la formule de changement de base il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$\boxed{D = P^{-1}AP}$ Les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$ sont donc les valeurs propres de A.

2. $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice symétrique.

Cherchons les valeurs propres de A :

Les colonnes 2 et 3 de A sont égales donc $rg(A) < 3$ alors A est non-inversible.

Donc $0 \in Sp(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow \exists X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(A - \lambda I_3) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - y - z = 0 \\ -x - \lambda y = 0 \\ -x - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - \lambda z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -x - \lambda y = 0 \\ (1-\lambda)x - y - z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - \lambda z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y + (-1 - (1-\lambda))z = 0 \end{cases}$$
$L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda) L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - \lambda z = 0 \\ -y + (\lambda - 2)z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - \lambda z = 0 \\ -y + (\lambda - 2)z = 0 \\ (\lambda - \lambda(\lambda - 2))z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - \lambda z = 0 \\ -y + (\lambda - 2)z = 0 \\ (-\lambda^2 + 3\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si
$-\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 3) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ $\boxed{\text{Donc } Sp(A) = \{0; 3\}}$

2. Donc $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{3} |\lambda_k|$

$= 3 + 0$

$= 3$

$$\boxed{\mathcal{E}(A) = 3}$$

3.

```
def energie (A):
    D= al.eigvals
    n,p=np.shape (A)
    E = 0
    for i in range (n):
        E = E + np.abs ( D[i,i])
    return (E)
```

4. a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & - & - & a_{n,n} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & - & - & b_{n,1} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ b_{n,1} & - & - & b_{n,n} \end{pmatrix}$

~~La trace de~~ Le premier coefficient de la diagonale du produit AB vaut alors $a_{1,1} \times b_{1,1} + a_{1,2} \times b_{2,1} + a_{1,3} \times b_{3,1} \cdots + a_{1,n} b_{n,1}$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \times b_{j,1}$$

Or la trace vaut la somme de tous les coefficients diagonaux de AB.

Ainsi $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right)$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{j,i}$$

4.b) De même $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,i}$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}$ en ~~inver~~ échangeant les sommes

$= Tr(AB)$

$\boxed{Tr(BA) = Tr(AB)}$

Une matrice et sa transposée ont la même diagonale.
~~Donc pour trouver le coefficient de~~

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,n} \\ a_{1,2} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Donc le 1° coefficient de la diagonale de ${}^tAA$ est donné par

$a_{1,1}a_{1,1} + a_{2,1}a_{2,1} + \dots + a_{n,1}a_{n,1} = \sum_{j=1}^{n} (a_{j,1})^2$

$\boxed{\text{Donc } Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{j,i})^2}$

si $Tr({}^tAA) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{j,i})^2 = 0$

or $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \; (a_{i,j})^2 \geqslant 0$ —

Donc par somme de valeurs positives ou nulles, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{j,i})^2 \geqslant 0$
en particulier
$\boxed{Tr({}^tAA) = 0 \Longleftarrow a_{j,i} = 0 \; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4. c) Si A et B sont semblables alors il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$, par la formule de changement de base.

Ainsi, $AP = PB \Longrightarrow Tr(AP) = Tr(PB)$

$\Longrightarrow Tr(PA) = Tr(PB)$ par Q 4.b)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\, a_{j,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\, b_{j,i}\right)$$

5. a) $\cancel{\boxed{|tr(A)| = |\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}|}}$

Si A est symétrique alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$ (Q1)

Donc A et D sont semblables, donc par Q 4.c $tr(A) = tr(D)$

$tr(D) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ où λ_k sont les valeurs propres de A $\forall k = \{1, \dots n\}$.

Donc $|tr(A)| = |tr(D)|$

$= |\sum_{k=1}^{n} \lambda_k|$ et par l'inégalité triangulaire

$|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

$\boxed{\text{Donc } |tr(A)| \leq \mathcal{E}(A)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5.b) Si A est symétrique, alors ${}^tA = A$

Ainsi
$$\begin{aligned} {}^tAA &= AA \\ &= A^2 \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PDDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

Donc par Q 4.c) comme A^2 et D^2 sont semblables
$tr(A^2) = tr(D^2)$

Or $D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Donc } tr(A^2) = tr(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2}$$

6. La matrice associée à ce tableau est :

$A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6.b) $tr(A) = 2+2+2$
$= 6$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc $tr(A^2) = 3 \times 6$
$= 18$

A étant symétrique, on sait que $tr(A^2) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k^2$

$\Leftrightarrow 18 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

0 est une valeur propre évidente de A.

~~Cherchons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq$~~

On remarque que $A^2 - 3A = 0_3$ donc que

$P(X) = X^2 - 3X$ est un polynome annulateur de A

Donc $Sp(A) \subset \{ \lambda^2 - 3\lambda = 0 \}$
$\subset \{ 0, 3 \}$

Vérifions que 3 est valeur propre de A:

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$ ~~cette matrice~~ $rg(A - 3I_3) = 1$

Donc $A - 3I_3$ est non inversible, 3 est valeur propre de A

$Sp(A) = \{0, 3\}$.

$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}(A) &= |0| + |3| + |3| \\ &= 6 \end{aligned} \quad \text{Donc on retrouve bien l'énergie de A selon python}}$

Partie 2) $(U * A) X = \begin{pmatrix} uAX_1 + VAX_1 \\ V.AX_2 + wAX_2 \end{pmatrix}$

7.a)
```
def prod2K(u,v,w,A):
    ~~Af~~
    n,p = np.shape (A)
    M = np.zeroes (2*n, 2*n)   # une matrice vide de la dimension
                               souhaitée pour U * A #
    ~~for i in range (n):~~
        ~~for j in range (n):~~
            ~~M[i,j]~~
    for i in range (n)
        for j in range (n)
            M[i,j] = u * A[i,j]
    for i in range (n+1, 2*n):
        for j in range (n)
            M[i,j] = V* A[i,j]
    for i in range (n)
        for j in range(n+1, 2*n ):
            M[i,j] = V* A[i,j]
    for i in range ( n+1,2*n):
        for j in range (n+1, 2*n ):
            M[i,j] = w * A[i,j]
    return (M)
```

7.b) prod2k (1, -1, 2 , -3* np.eyes(2,2) + np.ones(2,2))

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

8. $Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

8.a) $U * A = \begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$

$$(U*A)Y = \begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} uaAX + vbAX \\ vaAX + wbAX \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ua+vb)AX \\ (va+wb)AX \end{pmatrix}$$

Or $AX = \mu X$

Donc $(U*A)Y = \begin{pmatrix} (ua+vb)\mu X \\ (va+wb)\mu X \end{pmatrix}$

$$= \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8.b) $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} uaX + vbX \\ vaX + wbX \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et X sont des vecteurs propres de U et A respectivement

donc ~~an~~ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X \neq \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_{2n} \end{pmatrix}$

Ainsi $Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

On sait aussi que $U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ua + vb \\ va + wb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$

Donc $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} \lambda a X \\ \lambda b X \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (U * A)Y = \mu\lambda \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (U * A)Y = \mu\lambda Y$

donc Y étant non-nul, c'est bien un vecteur propre de $(U * A)$ associé à la valeur propre $\mu\lambda$

9.a) $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ Donc U et A sont deux matrices symétriques, alors elles sont diagonalisable.

Donc il existe une base de 2 vecteurs propres de U appartenant à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et une base de n vecteurs propres de A appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Notons ces base $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$ et $(X_1, \dots X_n)$

9.b) $F = (X_1, X_2, \dots X_n)$ forme une famille libre de n vecteurs.

Donc $\forall a \neq 0$ $(aX_1, \dots aX_n)$ forme encore une famille libre.

Ainsi $\forall$ $i \in [\![1,n]\!]$ $F' = \left(Y_1 = \begin{pmatrix} aX_1 \\ bX_1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} aX_2 \\ bX_2 \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} aX_n \\ bX_n \end{pmatrix}\right)$

forme une famille libre de vecteurs propres de $(U * A)$

De même $g = \left(Z_1 = \begin{pmatrix} cX_1 \\ dX_1 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} cX_2 \\ dX_2 \end{pmatrix}, \dots Z_n = \begin{pmatrix} cX_n \\ dX_n \end{pmatrix}\right)$

forme une famille libre de vecteurs propres de $U * A$.

Donc par concaténation de familles libres formées de vecteurs propres de $U * A$, la famille $g' = (Y_1, Z_1, , Y_2, Z_2, \dots Y_n, Z_n)$ est une famille libre

---

9.c) Donc g' est une famille libre formée de $2n$ vecteurs propres de $U * A$.
Donc $\mathrm{card}(g') = 2n = \dim \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$
Donc g' forme une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de $U * A$, ainsi $U * A$ est diagonalisable.

Donc $U * A$ est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les ~~co~~ valeurs propres de $U * A$ que l'on admettra être le produit 1 à 1 des 2 valeurs propres de U et des n valeurs propres de A
notées alors : $\gamma_1 \mu_1, \gamma_2 \mu_1, \gamma_1 \mu_2, \gamma_2 \mu_2 \dots, \gamma_1 \mu_n, \gamma_2 \mu_n$

9. d) Ainsi $\mathcal{E}(U * A) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_1 \mu_k| + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_2 \mu_k|$

$$\cancel{= \sum_{k=1}^{n} \left(|\gamma_1 \mu_k| + |\gamma_2 \mu_k| \right)}$$

$$= |\gamma_1| \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| + |\gamma_2| \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| \left(|\gamma_1| + |\gamma_2| \right)$$

$$= \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E}(U * A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)}$$

10. a) Si un sommet de G_n est relié aux sommets i et j par exemple. Alors dans le graphe G_{2n}, il sera relié aux sommets i, $i+n$, j, $j+n$.

Cependant il n'y a aucune arrête reliant les sommets i et j $\forall (i,j) > n$

~~Donc~~ Alors la diagonale de U vaut ici 1 et 0

~~La valeur v représente le nombre de chemins de longueur v reliant les sommets~~

Par exemple ici, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_8 = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&1 \\ 1&0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$

ici $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Or dans la matrice A_n, chaque coefficient vaut 1 ou 0, de même pour A_{2n} car il n'existe aucun chemin double menant d'une arrête à une autre.

$$\boxed{\text{Ainsi } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ tel que } \forall n \geq 2 \quad A_{2n} = U * A_n}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques & Appliquées ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10.b) par Q 9. d $\mathcal{E}(A_{2n}) = \mathcal{E}(U * A_n)$

$= \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A_n)$

Cherchons les valeurs propres de U :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est valeur propre de (U) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow U - \lambda I_2$ est non-inversible

$\Leftrightarrow \det(U - \lambda I_2) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-1)$

$= 5$

Donc $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Alors $\mathcal{E}(U) = \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$

$= \cancel{\dfrac{-(1+\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})}{2}}$

$= \dfrac{-(1-\sqrt{5}) + (1+\sqrt{5})}{2}$ car $1-\sqrt{5} < 0$ et $1+\sqrt{5} > 0$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E}(A_{2n}) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A_n) = \sqrt{5}\, \mathcal{E}(A_n)}$

Partie 3) $G(A)$ étant non orienté et sans boucle, A est une matrice symétrique dont les coefficients $a_{i,j}$ valent 1 si il existe une arrête $\{i, j\}$, 0 sinon.

Donc La somme de tous les coefficients de A vaut donc

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$ ou encore $\sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}$

Car $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \setminus I^2$, $a_{i,j} = 0$.

Donc ces deux sommes comptent en double le nombre d'arrêtes

Ainsi

$$\boxed{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m}$$

11.b) Il y a n sommets en tout et $n-p$ isolés donc il y a p sommets ~~reliés à~~ de degré minimum 1.
~~Or il y a forcément le même nombre ou plus d'arrêtes que de sommets non isolés~~

12. a) Le graphe étant non-orienté, la matrice A est symétrique donc diagonalisable. Alors il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonalle, par la formule de changement de base.

Montrons par l'absurde que cette matrice est non nulle.
Si $P^{-1}AP$ est nulle alors A s'écrit comme $A = P O_n P^{-1}$
$\Rightarrow A = O_n$

Or il y a au moins 2 sommets non isolés, au moins une arrête dans le graphe donc $A \neq O_n$.

$\boxed{\text{Donc } P^{-1}AP \neq O_n.}$

12. b) D et A sont donc semblable, alors par la partie 1

on a $tr(D) = tr(A)$.
Or $G(A)$ est un graphe sans boucle donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ aucune arrête ne relie le sommet i à lui-même. Donc la diagonale de A vaut 0.

$\boxed{\text{Donc } tr(A) = tr(D) = 0}$

Par Q5.b on a également $tr(D^2) = tr(A^2)$

et par Q 4.b) $tr({}^tAA) = tr \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$

$\Rightarrow tr(A^2) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$ par symétrie de A

Donc $tr(D^2) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$

$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$ car $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$ ou $a_{i,j} = 1$ $\Rightarrow a_{i,j}^2 = a_{i,j}$

$= 2m$ (Q11. a)

13. a) k est un sommet isolé, c'est à dire que la k° ligne et la k° colonne de A valent 0.

Or $E_k = \begin{pmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ \vdots \\ 0_{k-1} \\ 1 \\ 0_{k+1} \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}$

Donc le produit AE_k donne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Alors } E_k \in \ker(A)}$

Comme il y a $n-p$ sommets isolés, il y a au moins $n-p$ vecteurs de la base canonique $(E_1, \dots E_n)$ qui appartiennent au noyau de A.

$\boxed{\text{Donc } \dim(\ker(A)) \geqslant n-p.}$

Si $p < n$, $\Rightarrow n-p > 0$, il y a au moins un sommet isolé.

13. b) Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors $tr(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 2m$

$\boxed{\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m}$ car $\forall$ $k \geqslant p+1$ $\lambda_k = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

13. d $\quad \varepsilon(A) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$

14 a). $\quad Q = {}^tP \Rightarrow {}^tQ = {}^t({}^tP)$

$= P$

Cherchons l'expression de Q^{-1}, cherchons une matrice B telle que $QB = I$

$\Rightarrow {}^tPB = I$

$\Rightarrow P^{-1}B = I$

$\Rightarrow B = P$

Donc l'inverse de Q est P par unicité de l'inverse. $Q^{-1} = P \Rightarrow Q^{-1} = {}^tQ$

Donc en reprenant la Q12. a) $\quad D = P^{-1}AP$

$\Rightarrow A = PDP^{-1}$

$\Rightarrow A = Q^{-1}DQ$

$\Rightarrow \underline{A = {}^tQDQ}$

${}^tYY = {}^t(QX)QX$

$= {}^tX\,{}^tQQX$

$= {}^tX\,Q^{-1}QX$

$= \underline{{}^tXX}$

14.b) $${}^tXAX = {}^tX\,{}^tQDQX$$
$$= {}^t(QX)D(QX)$$
$$= {}^tYDY$$

or ${}^tY = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)$

$${}^tYD = (y_1\lambda_1 + 0 + 0,\ 0 + y_2\lambda_2 + 0, \dots,\ 0 + 0 + \dots + \lambda_n y_n)$$
$$= (y_1\lambda_1,\ y_2\lambda_2,\ \dots\ y_n\lambda_n)$$

$${}^tYDY = (y_1\lambda_1 \quad y_2\lambda_2 \quad \dots \quad y_n\lambda_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= y_1y_1\lambda_1 + y_2y_2\lambda_2 + \dots + y_ny_n\lambda_n$$

$$\Rightarrow \boxed{{}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2}$$

14.c) $${}^tYY = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$$

$$\Rightarrow {}^tYY = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

${}^tXAX = {}^tYDY$ et ${}^tYY = {}^tXX$.

15. a/

15. b) On a $\frac{2m}{p} \leqslant \theta$

$$\Rightarrow \frac{2m}{p\sqrt{2m}} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \quad \text{car } \sqrt{2m} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$$

Or par Q 13.b $\theta \leqslant \sqrt{2m} \Rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

Donc $\frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

Ensuite par Q 11. b) on a $1 \leqslant \frac{2m}{p}$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \leqslant \frac{2m}{p^2} \quad \text{car } p > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{p^2}}$$ par croissance de la fonction racine.

Donc on a bien

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1}$$

16. a) La fonction $F(x) = x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ comme somme d'une fonction affine et de la composition d'une fonction polynome de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0,1[$ composée par la fonction racine carrée.

Donc $\forall x \in]0,1[$

$$F'(x) = 1 + \frac{-2x(p-1)}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

$$= 1 - \frac{x(p-1)}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

$$F'(x) \geq 0 \iff 1 \geq \frac{x(p-1)}{\sqrt{(p-1)(1-x^2)}}$$

$$\iff \sqrt{(p-1)(1-x^2)} \geq x(p-1)$$

$$\iff (p-1)(1-x^2) \geq x^2(p-1)^2$$

$$\iff \frac{1-x^2}{x^2} \geq p-1 \quad \text{car } x^2 > 0$$

$$\iff \frac{1}{x^2} - 1 \geq p-1$$

$$\iff \frac{1}{x^2} \geq p$$

$$\iff x^2 \leq 1/p$$

$$\implies x \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

	0		$\frac{1}{\sqrt{p}}$		1
$F'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths 2 Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16.b) F est croissante sur $[0, \sqrt{1/p}]$

Donc comme $\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}}$

$\Rightarrow F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leqslant F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$

$\Rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{2m}} + \sqrt{(p-1)(1-2m)} \leqslant F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$

$\Rightarrow \theta + \sqrt{2m}\sqrt{(p-1)(1-2m)} \leqslant \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$

$\Rightarrow \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)} \leqslant \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)} \leqslant \sqrt{2m}\, F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)}$$

17. a) $m = \frac{n(n-1)}{2}$ $p = n$ donc chaque sommet est relié à tous les autres sauf à lui-même.

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & & & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & 1 \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$

17.b) Cherchons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $(A + 1 I_n) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ⊛

⊛ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots \; x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_n \cdots = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - \cdots - x_n \\ (x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$ Le système n'est pas de Cramer donc $\underline{-1 \in Sp(A)}$

Donc les vecteurs propres de A associés à -1 sont de la forme $X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} -x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$ $(n-1)$ vecteurs

D'où $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\boxed{\text{avec } \dim(E_{-1}(A)) = n-1}$

17.c) Cherchons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $A - (n-1)I_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -(n-1)x_1 + x_2 + \cdots x_n = 0 \\ x_1 - (n-1)x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 - (n-1)x_3 + \cdots x_n = 0 \\ \\ x_1 + \cdots \quad -(n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

17.c) Si on additionne ligne par ligne les ~~co~~ lignes de A on trouve $n-1$ fois le coefficient 1.

Donc $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc $(n-1) \in Sp(A)$

Ainsi
$$\varepsilon(A) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} |-1| + (n-1)$$
$$= (n-1) + (n-1)$$

$$\boxed{\varepsilon(A) = 2(n-1)}$$

Si $p = n$ et $m = \frac{n(n-1)}{2}$ $\quad (1) \Leftrightarrow \frac{2n(n-1)}{2n} + \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)\, n(n-1)(n^2 - n(n-1)}$

$$(1) \Leftrightarrow n-1 + \frac{1}{n}(n-1)\sqrt{n(n(n-(n-1))}$$
$$\Leftrightarrow n-1 + \frac{1}{n}(n-1)\, n\sqrt{1}$$
$$\Leftrightarrow 2(n-1)$$

Donc (1) est une égalité