Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM - Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème I

Partie I

1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^2 = A$ d'où :

$$A M = M^2 \cdot M = M^3$$

et : $M A = M \cdot M^2 = M^3$

ainsi :

$$AM = MA$$

2)

- Soit M est inversible ; on a $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $MB = I = BM$ (qu'on note aussi M^{-1}) alors :

$$AB = M^2 \cdot B = M \cdot MB = M$$

d'où $AB \cdot B = MB = I_n$

(*) donc A est inversible d'inverse $(M^{-1})^2$

- Soit A est inversible : il existe donc A^{-1} et on a : $A \cdot A^{-1} = I_n$

$\iff$

$$M^2 \cdot A^{-1} = I_n$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et on a :

d'après 1) $AM = MA$

d'où

$$AMA^{-1} = MAA^{-1}$$

$\Leftrightarrow$

$$AMA^{-1} = M$$

de plus si A est inversible

On admet la deuxième partie de la question

3)

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

d'où : $A^2 = -I_2$ et :

$$A^2 + I_2 = 0$$

$P : x \longmapsto x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A

A n'est donc pas diagonalisable

car en notant E l'ensemble des racines de P

on a : $S_p(A) \subset E$ et P n'a pas de racines réelles

3) b)

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'où $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

2/

si M^2 est solution de $M^2 = A$

on a :

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} a^2+bc = 0 \\ ab+bd = 1 \\ ac+dc = -1 \\ bc+d^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = d^2 = -bc \\ ab+bd = 1 \\ ac+dc = -1 \end{cases}$$

si $a = -d$

alors :

on a $\begin{cases} a^2 = d^2 = -b \\ b \cdot 0 = 1 \\ c \cdot 0 = -1 \end{cases}$ absurde !

si $a = d$

alors :

$$\begin{cases} a^2 = d^2 = -bc \\ 2ab = 1 \\ 2ac = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = d^2 = -bc \\ 2a = b \\ 2a = -c \end{cases}$$

$\implies$

$a = d$ et $b = -c$

CCL : si M vérifie $M^2 = A$
alors $a = d$ et $b = -c$

3) c)

Posons M solution de $M^2 = A$

on a :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI + bA$$

On cherche donc

$aI + bA$ tel que :

$$(aI + bA)^2 = A$$

d'où :

$$a^2 I + ab A - b I = A$$

$\iff$

$$(a^2 - b) I + ab A = A$$

$\iff$

$$\begin{pmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 - b & 0 \\ 0 & a^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\iff$

$$\begin{cases} a^2 = b \\ ab = 1 \\ -ab = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{b} = \cancel{\sqrt{b}} \\ a^2 = b \end{cases}$$

~~pour $a = 1 = b$~~

~~on a :~~

~~$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui commente~~

~~en effet ;~~

~~$M \cdot M =$~~

On admet les solutions exactes

4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) a) A est triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale donc 0 est son unique valeur propre

Or $A \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$ d'où

<u>A n'est pas diagonalisable</u>

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM-LYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4) b-)

$$M^4 = M^2 \cdot M^2$$
$$= A^2$$

$$A^2 = A \cdot A$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

d'où $M^4 \neq 0$

$$M^6 = A^3$$

et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$$M^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

4) c) Soit u, ~~ℓ~~ tq $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $f^k(u) \neq 0$

Et prenons $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(u) = 0$ (où $f^0(u) = u$)

on applique f^{p-1} on a :

$f^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(u) = 0\right)$

$\Leftrightarrow$

$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{k+p-1}(u) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\lambda_0 f^{p-1}(u) = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$

il reste donc :

$\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k f^{\cancel{k+p-1}}(u) = 0$

en appliquant f^{p-2} on trouve :

$\lambda_1 = 0$

en réitérant le processus on a aura

$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$

d'où la famille $(u, \dots, f^{p-1}(u))$ est libre

4) d) la famille $(u, \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

5)

5) a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$M^2 = I_n$

$M^2 - I_n = 0$

d'où : $P : x \longmapsto x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de M

$P(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$

d'où

$Sp(M) \subset \{-1 ; 1\}$

5) b-) $x \in \mathbb{R}^n$

Soit $x \in Ker(f - id) \cap Ker(f + id)$
alors :

$f(x) = -x$ et $f(x) = x$

$\iff$

$-x = x$

$\iff$

$2x = 0$

donc $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

d'où $Ker(f - id) \cap Ker(f + Id) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

d'où $Ker(f - id) + Ker(f + id) = Ker(f - id) \oplus Ker(f + id)$

par Théorème du rang :

$Dim(\mathbb{R}^n) = \cancel{Dim}\, Ker(f - id)) + Img(f - id)$

si $x \in Im(f - id)$

alors

$x = f(y) - y$

$f(x) = y - f(y) = -x$

$\iff$

$f(x) + x = 0$

$x \in Ker(f + id)$

donc $Ker(f + id) \subset Im(f - id)$

On admet l'égalité des dimensions et on a :

$$\ker(f-Id) \oplus \ker(f+Id) = \mathbb{R}^n$$

5) c)

$\ker(f-Id)$ est le sous espace propre associé à 1

$\ker(f+Id)$ celui associé à -1

Or ce sont les seules valeurs propres de M

par 5)b-) on déduit qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formé de vecteur propre de f

donc f est diagonalisable

et donc : M est diagonalisable

5)d) d'après cela il existe

P et P^{-1} des matrices de passage (P passe de la base canonique à celle des vecteurs propres de M) tels que

$M = PDP^{-1}$

où $D = \mathrm{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{\mathrm{Dim}(\ker(f+Id)) \text{ fois}} ; \underbrace{1, \dots, 1}_{\mathrm{Dim}(\ker f-Id) \text{ fois}})$

ainsi : si $M^2 = I_n$

alors

M est bien semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varepsilon_i = 1 \text{ ou } \varepsilon_i = -1$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6)

6) a) Comme

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_n$$

alors A possède n valeurs propres distinctes. Or elle est de taille n donc elle est diagonalisable.

Dès lors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = PDP^{-1}$

où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

C'est à dire $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

6) b)

• Soit $M^2 = A$

$$N^2 = N \cdot N = P^{-1}MPP^{-1}MP$$

$$= P^{-1}M^2P = P^{-1}AP$$

d'où

$$N^2 = P^{-1}(PDP^{-1})P = D$$

$$\boxed{N^2 = D}$$

• Soit $N^2 = D$

$$M = PNP^{-1}$$

$$M^2 = (PNP^{-1})(PNP^{-1})$$

$$= PN^2P^{-1}$$

$$M^2 = PDP^{-1}$$

$\Leftrightarrow$

$M^2 = A$

ainsi par double implication

$$\underline{M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D}$$

6) c) si $M^2 = A$

On a : $AM = MA$

autrement dit

si $N^2 = D$ alors $AM = MA$

et $N^2 = D$

donc $ND = DN$

$AM = MA$

or $AM = PDP^{-1} \cdot PNP^{-1}$

$AM = PDNP^{-1}$

et : $MA = PNDP^{-1}$

$M^3 = PNDP^{-1}$

$\Leftrightarrow$

DN est diagonale car D est diagonale.

or si On a :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{1,1} & \cdots & n_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ n_{n,1} & \cdots & n_{n,n} \end{pmatrix}$$

$= \cancel{\lambda_1}$

6) d)

elle n'admet pas de solution dans le cas de figure, car

$N = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, si $\lambda_i < 0$ alors $\sqrt{\lambda_i}$ n'est pas défini

donc $M^2 = A$ n'admet pas de solution si A a au moins une valeur propre négative (stricte)

6) e) On nomme cette ensemble S

et on a donc : pour $A = PDP^{-1}$

$S = \{ M \in M_n(\mathbb{R}),\ M = PNP^{-1},\ N = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots \sqrt{\lambda_n}) \}$

7) $A \in S_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques)

7) a) $S_p(A) = \{ \lambda_1, \dots \lambda_n \}$

A est diagonalisable et d'après le théorème spectral, il existe

P telle que
$${}^tP P = I_n$$
et
$$D = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1}(A)) \text{ fois}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \underbrace{\lambda_n \cdots \lambda_n}_{\dim(E_{\lambda_n}(A)) \text{ fois}} \end{pmatrix}$$
telle que :
$$A = P D {}^tP$$
prenons
$$D' = \begin{pmatrix} \underbrace{\sqrt{\lambda_1} \cdots \sqrt{\lambda_1}}_{\dim(E_{\lambda_1}(A)) \text{ fois}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \underbrace{\sqrt{\lambda_n} \cdots \sqrt{\lambda_n}}_{\dim(E_{\lambda_n}(A)) \text{ fois}} \end{pmatrix}$$
alors en posant : $M = P D' {}^tP$ (donc M symetrique) et on remarquant que $D' \cdot D' = D$

on a :
$$M^2 = P D' {}^tP P D' {}^tP$$
$$= P D {}^tP = A.$$
Une matrice M symetrique M de la sorte existe

7) b-)

i) les deux matrice sont symetriques donc diagonalisables d'apres le theoreme spectral.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths EM-LYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\exists P_1$ ~~dans~~ $O_n(\mathbb{R})$ (matrice orthogonale) telle que :

$M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$

de même : $\exists P_2 \in O_n(\mathbb{R})$, $M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$

ii)

$\cancel{D_1^2 P = P_1 D_1^2 P_1^{-1} P_2}$

$\cancel{P D_2^2 = P_1^{-1} P_2 D_2^2}$

$M_1^2 = M_2^2$

$\iff$

$P_1 D_1^2 (P_1^{-1}) = P_2 D_2^2 (P_2^{-1})$

en multipliant par P_2 à droite (des deux équations)

$P_1 D_1^2 P = P_2 D_2^2$ puis par P_1^{-1} à gauche

$D_1^2 P = P D_2^2$

Dès lors, $(D_1^2 P)_{i,j} = (P D_2^2)_{i,j}$

$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 P_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} P_{i,k} b_{k,j}^2$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^2 P_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} P_{i,k} b_j^2$$

En particulier

$$a_i^2 \sum_{k=1}^{n} P_{k,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} P_{i,k}\right) b_j^2$$

En particulier on a :

$$a_i^2 \cdot (P_{i,j}) = (P_{i,j}) b_j^2$$

iii)

si $D_1 P = P D_2$

$$a_i (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j \quad (*)$$

alors par égalité des coefficients on a :

$$D_1 P = P D_2$$

Montrons $(*)$:

On a :

$M_1^2 = A$

$M_2^2 = A$

d'où :

On admet

iv)

On a : par une succession de multiplications

$D_1 P = P D_2$

$\Longleftrightarrow$

$D_1 P_1^{-1} = P D_2 P_2^{-1}$ (par P_2^{-1} à droite)

$P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}$ (Par P_1 à gauche)

$\Longleftrightarrow$

$M_1 = M_2$

Partie 2

On notera les coefficients de ${}^tA$: $a'_{i,j}$ $(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2)$

8) $Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB))$ (car une matrice et sa transposée ont la même trace)

$= Tr({}^tBA) = (B, A)$

$(A,B) = (B, A)$

$(\cdot,\cdot)$ est symétrique

(A, A) correspond à :

$Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a')_{i,k} \; a_{k,i}$

$Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0$

d'où $Tr({}^tAA) = 0$

$\Longleftrightarrow a^2{}_{k,i} = 0$

$a_{k,i} = 0$

d'où $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

$(\cdot,\cdot)$ est définie positive.

Montrons que $(\cdot,\cdot)$ est linéaire d'un côté pour conclure qu'elle est bilinéaire

Soit $(A,B,C) \in (M_n(\mathbb{R}))^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(A+\alpha C, B) = \sum_{i=1}^{n} \left({}^t(A+\alpha C)(B)\right)_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i} + \alpha c_{k,i} b_{k,i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i} + \alpha \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{k,i} b_{k,i}$$

$$= Tr({}^tAB) + \alpha Tr({}^tCB)$$

$$= (A,B) + \alpha (C,B)$$

$(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire.

Enfin $(\cdot,\cdot)$ ~~est une somme de ne~~ renvoie une somme de nombres réels, elle définit donc une forme :

$(\cdot;\cdot)$ est un produit scalaire

9) posons $s = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |(M)_{i,j}|$ d'où $s^2 = \max\limits_{1 \le i,j \le n} m_{i,j}^2$

et : $\|M\|_2^2 = Tr({}^tMM) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{j,i}^2$

d'où

$$\|M\|_2^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s^2 = s^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$$

$$\|M\|_2^2 \le n^2 \cdot s^2$$

(croissance de la fonction racine)

$$0 \le \|M\|_2 \le n \cdot |s|$$

$$\iff$$

$$\|M\|_2 \le n \cdot \max_{1 \le i,j \le n} |(M)_{i,j}|$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session :

Épreuve de : Maths EM - LYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

10)

Soit M converge par coefficient vers L
alors
On $\lim_{k \to +\infty} M_k = L$

K_1 et K_2 ne dependent pas de k

On aura par Calcul matriciel :

11) $x \in \mathbb{R}^*$

a) $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

φ est C^1 comme somme de fonctions C^1

On a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\varphi'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Car $\varphi'(x) = 0 \iff 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\iff 1 = \frac{1}{x^2}$

$\iff x^2 = 1$

d'où $x = 1$ ou $x = -1$

On a donc :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

11) b-)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; P_n : " si $a > 0$ alors (u_n) est bien définie et $|u_n| \geq 1$ ~~pour~~ pour n non nul et $u_n > 0$ "

~~P_0 : $u_0 \geq a > 0$~~

~~et :~~

$P_1 : u_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > 0$

$a > 0$ d'où $\varphi(a) \geq 1$ (tableau en 11) a))

~~$u_1 = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2a}$~~

d'où $u_1 \geq 1$

$|u_1| \geq 1 > 0$

ainsi P_1 est vraie.

On suppose donc que pour un entier

naturel n non nul quelconque, P_n est vraie.

On a :

$U_n > 0$

$|U_n| \geq 1$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{1}{U_n}\right) = \varphi(U_n)$$

or $U_n = |U_n|$

d'où

$U_n > 0$

$\varphi(U_n) \geq 1 > 0$

$U_{n+1} \geq 1 > 0$

$|U_{n+1}| \geq 1 > 0$

d'où

$U_{n+1} > 0$ et $|U_{n+1}| \geq 1$

en plus d'être définie.

Ce qui achève la récurrence.

P_n

1 1) c) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_n} - \frac{U_n}{2}$

On peut étudier g telle que :

$g(x) = \varphi(x) - x$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \leq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$-\infty$

On en deduit que (U_n) est croissante pour $a<0$
et (U_n) est décroissante pour $a>0$

d) pour $|x|\geq 1$ on a : $\frac{1}{x}<1$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}\leq\frac{1}{2}$$

d'où car $\frac{1}{2x^2}\geq 0$

d'où

$$|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

11) e)

En utilisant l'inégalité des accroissements finis on a : $\forall(x,y)\in \mathbb{R}^*$,

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq\frac{1}{2}\cdot|x-y|$$

On a : $\varepsilon=\varphi(\varepsilon)$ car pour un passage
quand : $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to}U_{n+1}$

d'où en remplaçant x par U_{n-1}
et y par ε il vient :

$$|\varphi(U_{n-1})-\varphi(\varepsilon)|\leq\frac{1}{2}|U_{n-1}-\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|U_n-\varepsilon|\leq\frac{1}{2}|U_{n-1}-\varepsilon|\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|U_{n-2}-\varepsilon|$$

et donc enfin

$$|U_n-\varepsilon|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|U_0-\varepsilon|$$

$$\Leftrightarrow\quad |U_n-\varepsilon|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\varepsilon|$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM - LYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12)

12) a) A est symétrique donc diagonalisable. il existe donc D_0 et P inversible telle que

$$A = P D_0 P^{-1}$$

d'où $D_0 = P^{-1} A P$ (elle est inversible d'inverse $PA^{-1}P^{-1}$ par le calcul)

12) b) ~~A est inversible, donc~~ ~~M_0 est bien dé~~

~~H_k: "M_k est bien défini et D_k, $D_k = P^{-1} M_k P$ est diagonale et inversible et~~

Comme A est inversible, on a par récurrence immédiate :

M_k est bien définie car $\frac{1}{2} A$ et $\frac{1}{2} A^{-1}$ reste inversible (récurrence immédiate).

On a : $D_k = P^{-1} M_k P$

d'où $D_{k+1} = P^{-1} M_{k+1} P$

$$= P^{-1}\left(\frac{1}{2}(M_k + M_k^{-1})\right) P$$

$$D_{k+1} = \frac{1}{2} P^{-1} M_k P + \frac{1}{2} P^{-1} M_k^{-1} P$$

$$D_{k+1} = D_k + \frac{1}{2} P^{-1} M_k^{-1} P$$

On remarque :

$$P^{-1}M_kP\cdot(P^{-1}M_k^{-1}P) = P^{-1}\cdot P = I_n$$

On a donc : $P^{-1}M_k^{-1}P = D_k^{-1}$ et donc :

$$D_{k+1} = \frac{1}{2}\left(D_k + D_k^{-1}\right)$$

~~1)(2)c)~~

~~D_k, converge d'après~~

Problème 2

Partie 1

1)

~~H~~ $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : « I_n converge et $I_n = n!$ »

H_0 : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du$

On pose : $I_{0,A} = \int_0^A e^{-u}\,du = \left[-e^{-u}\right]_0^A$

$= e^0 - e^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1 = 0!$

d'où $I_0 = 0!$

H_0 est vraie

On suppose donc que pour un entier naturel n quelconque, I_n est vraie.
On a donc :

$$I_n = n!$$

On pose $I_{n+1,A} = \int_0^A u^{n+1} e^{-u}\,du$

On procède à une intégration par parties :

$$\int_0^A u^{n+1} e^{-u} du = \left[(n+1) u^n e^{-u}\right]_0^A + (n+1) I_n$$

d'où en faisant tendre A vers $+\infty$ il vient

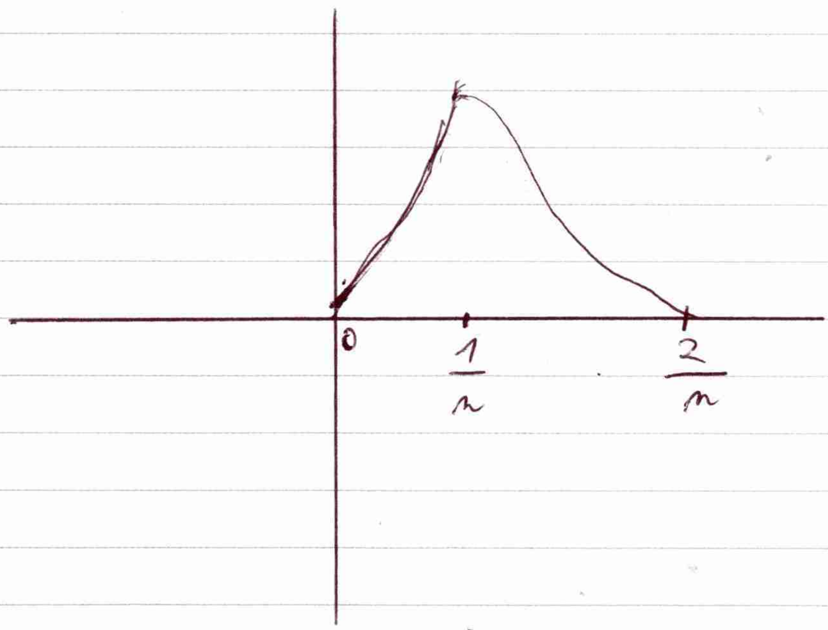
$$\int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-u} du = (n+1) I_n = (n+1)!$$

Ce qui achève la récurrence

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$

2)

2) a)



2) b) h_n est C^0 comme fonction affine sur $]0, \frac{1}{n}[$ et sur $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ elle est nulle sur $]0, \frac{2}{n}]$ de plus $\forall t \in \mathbb{R}$ $h_n(t) \geq 0$

Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt = 1$

ce qui revient à ~~montrer~~ : calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t \, dt + \int_{1/n}^{2/n} n^2\left(\frac{2}{n} - t\right) dt$$

Or :

$$\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t \, dt = n^2 \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{2/n} n^2\left(\frac{2}{n} - t\right) dt = 2n \cdot \left(2/n - \frac{1}{n}\right) - n^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1/n}^{2/n}$$

$$= (4-2) - n^2\left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$= 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\int_0^{1/n} n^2 t + \int_{\frac{1}{n}}^{2/n} n^2\left(\frac{2}{n} - t\right) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

d'où $f_n(t)$ est une densité de probabilité

2) a-) ~~$\lim_{n \to +\infty}$~~ On a :

si $t \in]0, \frac{1}{n}]$

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(t) = +\infty$$

si $t \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(t) = -\infty$$

sinon

$$\lim_{n \to +\infty} h_n(t) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2024

Épreuve de : Maths. EM-LYON

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

2) c) $\forall n \geqslant 2$

$$\int_0^1 h_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = 1$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 h_n(t)\,dt \neq 1$

Or $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t)\,dt = 1 \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t)\,dt \neq 1$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\,dt \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} h_n(t)\,dt$$

Partie 2

3) S_n est une combinaison linéaire de variables aléatoires qui admettent des moments d'ordre 2, elle en admet donc un également.

Elle possède donc une variance et une espérance :

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = n \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n\lambda}$$

$$E(S_n) = \frac{1}{n\lambda}$$

On a de plus, par indépendance mutuelle :

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n\lambda}$$

$$V(S_n) = \frac{1}{n\lambda}$$

4)

a) $X_i = \lambda Y_i$

d'où $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc coïncide avec $\gamma(1)$

4) b-) On a :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \gamma(n)$$

par stabilité

On pose :

H_n : "λS_n suit $\gamma(n)$"

H_1 : $\lambda S_1 = \lambda Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

donc $\lambda Y_1 \hookrightarrow \gamma(1)$

H_1 est vraie.

On suppose donc que pour un entier naturel n quelconque H_n est vraie.

On a donc :

$\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$

or $\lambda X_{n+1} \hookrightarrow \gamma(1)$

$\lambda S_n + \lambda X_{n+1} = \lambda (S_n + X_{n+1}) \hookrightarrow \gamma(n+1)$

$\Leftrightarrow \lambda S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1)$

ce qui achève la récurrence

CCL : $\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$

4) c)

On utilise le procédé de transformation affine et on a : pour $t > 0$

$$\cancel{f_{S_n}(t) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot f_{\lambda S_n}\left(\frac{t}{\lambda}\right)}$$

$$\cancel{f_{S_n}(t) = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda t)^{n-1}}$$

$\lambda S_n \hookrightarrow \gamma(n)$

pour trouver S_n on a :

$$f_{S_n}(t) = \lambda \cdot f_{\lambda S_n}(\lambda \cdot t)$$

$$= \lambda \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^{n-1}$$

$\Leftrightarrow$

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^{n-1}$$

si $t = 0$ comme $S_n(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

alors $f_{S_n}(t) = 0$

CCL :

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

5) a)

par théorème de transfert

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot t^{n-2} e^{-\lambda t}\,dt$$

si elle existe on a : sous réserve de

Convergence :

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \cdot t^{n-2} \, dt$$

On pose $\int_0^A e^{-\lambda t} t^{n-2} \, dt$

puis le changement de variable $u = \lambda t$ (affine)

$\int_0^A e^{-\lambda t} t^{n-2} \, dt$

devient :

$$\frac{1}{\lambda^{n-2}} \int_0^{\lambda A} e^{-u} \cdot u^{n-2} \, dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{(n-2)!}{\lambda^{n-2}}$$

d'où

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda}{n-1}$$

Or, cette espérance existe uniquement pour $n > 1$ c'est à dire $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ d'après l'expression de l'intégrale de départ

5) b)

On en déduit que ~~[illegible]~~ admet une moment pour $n \geq 3$ (moment S_n d'ordre 2)

$$E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-3}$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{\lambda^{n-3}} \cdot (n-3)!$$

$$E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : | **Nombre de pages :** | **Session :**

Épreuve de : Maths EM-LYON

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

d'où $V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2}$

$$= \frac{(n-1)\lambda^2 - (n-2)\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{n^2(\lambda^3-\lambda^4) - \lambda^2 + 2\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{+1\cdot\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

6) par procédé de Transformation affine, W_n est à densité et une densité est donnée par :

$$f_{W_n}(t) = \frac{1}{\left|\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right|} \cdot f\left(\frac{t - (-\sqrt{n})}{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \cdot f\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\right)$$

7)

7)a) D'après le Théorème central limite,

$$\frac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

d'où $\frac{1}{n} \cdot \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n) \cdot \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

d'où $\sqrt{n}\, \frac{S_n}{n \cdot \frac{1}{\lambda}} - \cancel{\lambda}\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

d'où
$W_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

d'où Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

7)b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t)\,dt = \mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$
$= \Phi(1) - \Phi(0)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t)\,dt = \Phi(1) - \frac{1}{2}$

donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$

Partie 3

8) $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)$

$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k} = \lambda^n \cdot e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k}$

d'où en appliquant "$\ln$"

$\ell(\lambda, x_1, \dots, x_n) = n \ln(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k$

9) Soit $X \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$

ℓ est C^1 comme composée de fonctions C^1 sur cet ensemble ($\ln$ est définie et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$)

On a :

X est un point critique

$\Leftrightarrow$

$$\nabla \ell(X) = 0$$

Or $\partial_{\lambda} \ell(X) = -\lambda \neq 0$

ℓ n'admet donc pas de points critiques sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$

---

10) On étudie maintenant une fonction à une seule variable.

On a donc :

$$\varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Or si f admet un maximum elle l'admet au point où

$\varphi'(\lambda) = 0$ donc

$$\varphi(\hat{\jmath}) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{n}{\hat{\jmath}} = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$\Leftrightarrow$

$$\hat{\jmath} = n \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

---

11) $E(Z_n) = n \cdot \cancel{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)$

car on l'a calculé

$^3 2 /$

$$n \cdot E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{n}{n-1}\lambda$$

de même

$$V(Z_n) = n^2 \cdot V\left(\frac{1}{S_n}\right)$$

$$V(Z_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2$$

en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$E(Z_n) \longrightarrow 1 \cdot \lambda = \lambda$$

d'où Z_n (qui ne s'exprime pas en fonction de λ) est asymptotiquement sans biais