Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 24	Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) Toutes les colonnes de J_n sont proportionnelles et non nulles donc $\underline{rg(J_n) = 1}$

donc $Ker(J_n) \neq \{0\}$, ce qui implique J_n est non inversible et que $\underline{0 \in Sp(J_n)}$

Soit $X \in Ker(J_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

donc $J_n X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow X = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $Ker(J_n) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

donc $\underline{dim(Ker(J_n))} = dim\left(Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) = \underline{n-1}$

b) $J_n V_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n V_n$ et $V_n \neq 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc V_n est vecteur propre de J_n

c) On a donc $\{0, n\} \subset Sp(J_n)$

or $\dim(\text{Ker}(J_n)) = n - 1$

donc par théorème de non-dépassement

$$\sum_{\lambda \in Sp(J_n)} \dim(\text{Ker}(J_n - \lambda I_n)) \leq n = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$$

On a même l'égalité puisque J_n est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

Or nécessairement $\dim(\text{Ker}(J_n - n I_n)) \geq 1$ car $V_n \in \text{Ker}(J_n - n I_n)$

donc nécessairement J_n a au plus 2 valeurs propres qui sont 0 et n,
ie $\boxed{Sp(J_n) = \{0, n\}}$

2) $(x_1, \dots x_n) \longmapsto x_k^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ comme produit d'applications coordonnées

donc par somme et produits,
$(x_1, \dots x_n) \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

de plus $x \longmapsto x^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc par composition,
$(x_1, \dots x_n) \longmapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$

donc par somme, $\boxed{b_n \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^n}$

3)a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, Soit $x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

alors $\partial_i b_n(x) = \frac{2x_i}{n} - \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{2}{n}\left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$

3) b) Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point critique de f_n

alors $\nabla f(a) = 0$, ie $\begin{cases} \partial_1 f(a) = 0 \\ \vdots \\ \partial_n f(a) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right.$$

d'où nécessairement $a = (a_1, \dots, a_1)$

donc $\boxed{a \text{ est point critique de } f_n \Leftrightarrow a = (\lambda, \dots, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}}$

4) a) f_n étant $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}$ et

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 ; \forall x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

si $i \neq j$:

$\partial^2_{i,j} f_n(x) = \partial^2_{j,i} f_n(x)$ par le théorème de Schwartz

$= \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n} \cdot 1\right) = \boxed{-\frac{2}{n^2} = \partial^2_{i,j} f_n(x) = \partial^2_{j,i} f_n(x)}$

si $i = j$: $\boxed{\partial^2_{i,j} f_n(x) = \partial^2_{i,i} f_n(x) = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$

4) b) On a donc pour tout a point critique de f_n

$$\nabla^2 f_n(a) = \begin{pmatrix} \frac{2}{n}(1-\frac{1}{n}) & & \left(-\frac{2}{n^2}\right) \\ & \ddots & \\ \left(-\frac{2}{n^2}\right) & & \frac{2}{n}(1-1/n) \end{pmatrix} = \frac{2}{n} I_n - \frac{2}{n^2} J_n$$

donc pour tout a point critique de f_n, $\boxed{\nabla^2 f_n(a) = \frac{2}{n^2}(n I_n - J_n)}$

c)
```
n = int(input('entrez la valeur de n:'))
I = np.eye(n)
J = np.ones(n)
Hessienne = (2/(n**2))*(n*I - J)
```

5) a) on pose $u = (x_1, \ldots x_n)$

et V_n le vecteur ne contenant que des 1 (cette fois ci en ligne)

les deux vecteurs sont dans $\mathbb{R}^n$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique,

$$|\langle u, V_n \rangle| \leq \|u\| . \|V_n\|$$

donc par passage au carré (avec la croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$),

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k . 1\right)^2 = \left(|\langle u, V_n \rangle|\right)^2 \leq \|u\|^2 \|V_n\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)$$

donc $\boxed{\forall (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

d) Les valeurs propres de J_n sont 0 et n par la question 1

Soit X un vecteur propre de J_n associé à 0

alors $\frac{2}{n^2}(n I_n - J_n) X = \frac{2}{n} . I_n X - \frac{2}{n^2} J_n X = \frac{2}{n} X$ donc $\underline{\frac{2}{n} \in Sp(\nabla^2 f(a))}$

(car $X \neq 0$)

On calcule ensuite $\frac{2}{n^2}(n I_n - J_n) Y$ où Y est un vecteur propre de J_n associé à n

$\frac{2}{n^2}(n I_n - J_n) Y = \frac{2}{n} I_n Y - \frac{2}{n^2} J_n Y = \frac{2}{n} Y - \frac{2}{n} Y = 0$ donc $\underline{0 \in Sp(\nabla^2 f(a))}$

(car $Y \neq 0$)

$\boxed{\text{Comme } 0 \in Sp(\nabla^2 f(a)), \text{ on ne peut pas conclure quand à la nature du point critique } a}$

b) par 5) a), $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ x = (x_1, \ldots x_n)$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = f_n(x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ f_n(x) \geq 0$ donc

$\underline{f_n \text{ admet un minimum global sur } \mathbb{R}^n}$ égal à 0

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 46	Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On $f_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ avec a point critique de f_n

or $a = (\lambda, \ldots \lambda) \in \mathbb{R}^n$

donc $f_n(a) = \frac{n}{n}\cdot\lambda^2 - \left(\frac{1}{n}\lambda\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\underline{f_n(x) \geq f_n(a) = 0}$

<u>Donc le minimum global de f_n est atteint en chacun de ses points critiques</u>

6) a)

```
def f_2(x,y):
    z = (1/2)*(x**2 + y**2) - (((1/n)*(x+y))**2)
    return z
```

b) la figure correspondante est nécessairement la première, car les deux autres ont un nombre fini de minimum là où f_2 admet une infinité de points critiques

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 2 :

1/a) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$ par le cours

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$

donc f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

ie $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}}$ (car $\arctan(1) = \pi/4$)

c)

arctan étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de

Taylor Young à l'ordre 1, ce qui donne au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x) \quad (\text{avec } f(x) = \arctan(x))$$

ie $\arctan(x) \underset{0}{=} \arctan(0) + x \cdot \frac{1}{1+x^2} + o(x)$

donc $\frac{\arctan(x)}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{1+x^2} + o(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

donc $\boxed{\arctan(x) \underset{0}{\sim} x}$

2) a) On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x$ aussi

et $f(-x) = \dfrac{2}{\pi(e^{-x}+e^{x})} = f(x)$ donc <u>f est paire</u>

Il nous suffit d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

or $\dfrac{1}{\pi(e^{x}+e^{-x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi e^{x}} > 0$

donc $\dfrac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi} e^{-x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} e^{-x}\,dx$ converge comme intégrale de référence $(1>0)$

donc par critère ~~de comparaison~~ d'équivalence des intégrales de fonction continues et positives,

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\,dx \quad \text{converge}$$

donc par parité de f, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\,dx \quad \text{converge}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, <u>$f(x) > 0$</u> par positivité de l'exponentielle

et <u>f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$</u> comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x}+e^{-x} > 0$)

enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\,dx$ converge

et $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(e^{x}+e^{-x})}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{x}}{\pi(1+(e^{x})^2)}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \frac{2}{\pi}\left[\arctan(e^{x})\right]_B^A = \frac{2}{\pi}\left[\pi/2 - 0\right] = \underline{1}$$

(car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc par continuité de arctan sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan(e^{x}) = \arctan(0) = 0$

par les 3 points précédents, $\boxed{f \text{ peut être considérée comme une densité}}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{A \to -\infty} \frac{2}{\pi} [\arctan(e^t)]_A^x$ par avant

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(e^x)}$

4) a) F est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x)$ existe car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(e^x)^2} > 0$

donc F est $\mathcal{C}^0$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection (par le théorème de la bijection) dans $f(\mathbb{R}) = I$

où $I =]\lim_{x \to -\infty} F(x), \lim_{x \to +\infty} F(x)[=]0,1[$

b)

comme $U = F(X)$ et $X(\Omega) = \mathbb{R}$
alors $U(\Omega) =]0,1[$ par avant

et Soit $x \in]0,1[$
(si $x \geq 1$, $P(U \leq x) = 1$ et si $x \leq 0$, $P(U \leq x) = 0$)
$P(U \leq x) = P(F(X) \leq x) = P(\arctan(e^X) \leq \frac{\pi}{2} x)$

$= P(e^X \leq \tan(\pi/2\, x))$ par croissance stricte de tan sur $]0,1[$

$= P(X \leq \ln(\tan(\pi/2\, x)))$

$= F(\ln(\tan(\pi/2\, x))) = x$

donc $\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}}$

c) Par la question précédente, $F^{-1} : \begin{cases}]0,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\tan(\pi/2\, x)) \end{cases}$

donc :

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 24	**Session :** 2024

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

```
def X():
    p = rd.random()
    return np.log(np.tan((np.pi)/2)*p))
```

5) a) $E(X)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^x+e^{-x}}\,dx$ converge

or $\frac{x}{e^x+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{e^x} \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx$ converge
(on reconnait $\Gamma(2)$)

donc par critère d'équivalence des intégrales de fonctions continues et positives,

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x+e^{-x}}\,dx$ converge

de même en $-\infty$: $\frac{x}{e^x+e^{-x}} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{x}{e^{-x}}$

et $\frac{x}{e^{-x}} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge

(comme intégrale de Riemann de paramètre $2>1$)

donc par critère de négligeabilité, $\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{e^{-x}}\,dx$ converge

donc $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{-x}}\,dx$ converge (car $x \mapsto \frac{x}{e^{-x}}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$ converge par critère d'équivalence.

finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$ converge, donc $\boxed{E(X) \text{ existe}}$

$$E(X) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{x}}{1+(e^{x})^2}\,dx$$

$$\cancel{= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xe^{x}}{1+e^{2x}}}$$

~~on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+e^{2x})$ deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ et $A \leq 0 \leq B$~~

~~donc par intégration par parties,~~

$$\cancel{\frac{1}{\pi}\int_{A}^{B} \frac{2xe^{x}}{1+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{\pi}\Big([x\ln(1+e^{2x})]}$$

b) $E(X^2)$ existe $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument par le théorème de transfert appliqué à $x \mapsto x^2$

$\iff \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2e^x}{1+e^{2x}} dx$ converge

or $g : x \mapsto x^2 \cdot \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ est paire donc il nous suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$

or $\frac{x^2}{x^2(e^x+e^{-x})} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $\frac{x^2}{e^x+e^{-x}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge comme intégrale de Riemann de paramètre $2>1$

donc par critère de négligeabilité, $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+e^{-x}} dx$ converge donc

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+e^{-x}} dx$ converge ($x \mapsto \frac{x^2}{e^x+e^{-x}}$ étant C^0 sur $\mathbb{R}$)

donc par parité de g, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{e^x+e^{-x}} dx$ converge

donc $\boxed{E(X^2) \text{ existe}}$

6) a) a) $t \mapsto t^2 e^{-nt}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$

et $t^4 e^{-nt} = \frac{(nt)^2 t^2 e^{-nt}}{n^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc par critère de négligeabilité,

$\int_1^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$ converge donc $\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt \text{ converge}}$

On pose $u = nt = \varphi(t)$

φ est C^1 sur $\mathbb{R}$, strictement croissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (et $du = ndt$)

Le changement de variable est licite et conserve la convergence

et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^3} u^2 e^{-u} du = \frac{\Gamma(3)}{n^3} = \frac{2}{n^3}$

donc $\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} = \frac{2}{n^3}}$

~~b) Montrons par récurrence sur p que $\forall p \in \mathbb{N}$,~~

~~$\mathcal{H}_p$: " $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt$ "~~

~~est vraie.~~

~~initialisation pour $p=0$~~

~~$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt$$~~

~~$$= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$~~

~~$$= \int_0^{+\infty} t^2 \left(\frac{e^{-3t}}{1+e^{-2t}} + \frac{1}{e^t + e^{-t}} \right) dt = I + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2\cdot 0+3)t}}{1+e^{-2t}} dt$$~~

~~hérédité~~

b) Soit $p \in \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt$ converge par la question précédente

donc $$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (e^{-2t})^k \right) dt$$ par linéarité de l'intégrale convergente

$$= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \left(\frac{1-(-e^{-2t})^{p+1}}{1+e^{-2t}} \right) dt$$ par somme de série géométrique

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2}{e^t + e^{-t}} - (-1)^{p+1} \cdot \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}} dt + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt$$ par linéarité de l'intégrale convergente

donc $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t} dt = I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt}$$

c) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$

alors $$\frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} \leq t^2 e^{-(2p+3)t}$$

donc par croissance de l'intégrale convergente à borne croissante,

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2p+3)} dt = \frac{2}{(2p+3)^2} \text{ par a).}$$

or $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{2}{(2p+3)^2} = 0$ donc par encadrements,

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}} dt = 0}$$

d) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ par la formule de Huygens

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note F_Y la fonction de répartition de Y

$X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$x \leq 0 \Rightarrow P(Y \leq x) = 0$

$x > 0 \Rightarrow P(Y \leq x) = P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x))$ car ln croît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $x > 0 \Rightarrow P(X \leq \ln(x)) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$

donc $\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$ comme fonction constante

enfin $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F_Y(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = F_Y(0)$

donc F_Y est continue en 0, donc F_Y est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

donc $\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$ car sa fonction de répartition est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $M_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \leq 0 \Rightarrow P(M_n \leq x) = 0$

$x > 0 \Rightarrow P(M_n \leq x) = P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [Y_i \leq x]\right)$

$= \prod\limits_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$ par mutuelle indépendance des Y_i

$= \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^n$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(M_n \leq x) = G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$P(\frac{n}{M_n} \leq x) = P(M_n \geqslant \frac{x}{n})$

$= 1 - P(M_n \leq \frac{x}{n})$ car M_n est à densité

donc $P(\frac{n}{M_n} \leq x) = \begin{cases} 1 - G_n(\frac{x}{n}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $x > 0$:

a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\frac{n}{M_n} \leq x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - G_n(\frac{x}{n})^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^n$

Exercice 3 :

Partie 1 :

1) Soit $(x, y) \in E^2$, on calcule $\langle f(x), y \rangle$

$= \langle \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle \langle u_i, y \rangle$ par bilinéarité du produit scalaire

$= \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle \langle x, u_i \rangle$ par symétrie du produit scalaire

$= \langle \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i, x \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$

(et f est clairement un endomorphisme de E par bilinéarité du produit scalaire)

2) On suppose $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$

donc $\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle u_i, x \rangle u_i$

alors par le cours, $\boxed{f \text{ est le projeté orthogonal sur } U}$

3) a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$

ie $f(x) = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \langle u_i, x \rangle = 0$ car $(u_1, \dots u_p)$ est orthonormale donc libre

$\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x \perp u_i$

$\iff x \in (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}$ (car par l'énoncé, $\lambda_i \neq 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Vect}(U))^{\perp}}$

comme $\mathrm{Vect}(U)^{\perp} \oplus \mathrm{Vect}(U) = E$

alors $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - p = n - p}$

b) par théorème du rang, puisque f est un endomorphisme de E

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f))$ donc $\boxed{rg(f) = p}$

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$.
donc $\exists y \in E$, tq $f(y) = x)$

$\iff \exists y \in E$, tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, y \rangle u_i = x$

$\iff x \in \mathrm{Vect}(u)$

donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(U)}$

4) Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
Calculons $f(u_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle u_i = \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle u_i + \lambda_j \langle u_j, u_j \rangle u_j$

$= 0 + \lambda_j u_j$ car $(u_1, \dots u_p)$ est une famille orthonormale

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Comme $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $u_j \in (u_1, \ldots u_p)$ qui est orthonormale, $u_j \neq 0$

donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\underline{f(u_j) = \lambda_j \cdot u_j}$ avec $u_j \neq 0$

donc $\boxed{Sp(f) \supset \{\lambda_1, \ldots \lambda_p\}}$

<u>Partie 2</u>

5) Supposons qu'il existe deux vecteurs y_1 et y_2 dans E tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n - y_1\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n - y_2\| = 0$

donc par continuité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n - y_1\|^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n\|^2 + \|y_1\|^2 - 2\langle y_1, y_n \rangle = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n\|^2 + \|y_2\|^2 - 2\langle y_2, y_n \rangle = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n\|^2 - 2\langle y_1, y_n \rangle = -\|y_1\|^2$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \|y_n\|^2 - 2\langle y_2, y_n \rangle = -\|y_2\|^2$

<u>On admet cette question</u>

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) Soit $x \in E$

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle u_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \langle u_j, x \rangle u_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j \langle u_i, x \rangle \langle u_j, x \rangle \langle u_i, u_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x \rangle \lambda_i \langle u_i, x \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 . \langle u_i, x \rangle^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \langle u_i, x \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \left(\langle \sum_{j=1}^{m} \langle u_j, x \rangle u_j, \sum_{k=1}^{m} \langle u_k, x \rangle u_k \rangle \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \|x\|^2$$

donc par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in E \\ \|f(x)\| \leq K \|x\| \end{array}}$$

7) a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$ par récurrence.

l'initialisation est immédiate par la question précédente

<u>hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n\| \leq K^n \|x_0\|$

alors par la question précédente,

$\|x_{n+1}\| = \|f(x_n)\| \leq K \|x_n\| \leq K . K^n \|x_0\| = K^{n+1} \|x_0\|$ par hypothèse de récurrence

La récurrence est achevée

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \|x_n\| \leq k^n \|x_0\|}$

b) comme $0<k<1$ par hypothèse (car k est une racine de somme de terme positifs)

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n\|x_0\| = 0$

donc par encadrements, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| = 0$

donc $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers le vecteur nul}}$

c) $\|x_n\| \leq \|x_0\| k^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \|x_0\| k^n$ converge car $|k|<1$

donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 0} \|x_n\| \text{ converge par comparaison}}$

Problème :

1)a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$ donc par croissance de l'intégrale

convergente (l'intégrande étant $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$), $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq 0$

De plus, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt < 0$ pour les mêmes raisons qu'avant

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît

1/b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par 0, $\boxed{\text{elle converge vers } l \geq 0}$

b) Si $x \in [0,1]$, alors x^2 aussi

donc l'égalité précédente donne

$e^{x^2/2} \leq 1 + x^2$

donc $\frac{1}{e^{x^2/2}} \geqslant \frac{1}{1+x^2}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\left(\frac{1}{e^{x^2/2}}\right)^n \geqslant \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ donc par croissance de l'intégrale convergente à bornes croissante (les deux intégrandes étant $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$)

alors $\boxed{U_n \leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \text{ pour tout entier naturel } n}$

c) On sait que si une variable aléatoire $X \hookrightarrow N(0,1)$ alors $\frac{1}{\sqrt{n}} X \hookrightarrow N(0, \frac{1}{n})$

or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{n}}} e^{-\frac{x^2}{2\sqrt{\frac{1}{n}}^2}} dx$

$= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (on reconnait une densité de $\frac{1}{\sqrt{n}} X$)

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi\sqrt{\frac{1}{n}}}}$

c) on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq \sqrt{2\pi\sqrt{\frac{1}{n}}}$

or $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{2\pi\sqrt{\frac{1}{n}}} = 0$

donc par encadrement, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 24

Session : 2024

Épreuve de : Maths approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 2

3) $0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ et $n > 1$ donc par critère d'équivalence,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge car $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est C^0 sur $[0,1]$

donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ converge}}$

4)a) $\forall t \in [1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(t^2)^n}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc par croissance de l'int égale convergente à bornes croissantes, (toutes les intégrales convergent, la première par 3) et la deuxième en vertu du critère de Riemann)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-t^{-(2n+1)}}{2n-1} \right]_1^A = \frac{1}{2n-1}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}}$

b) Par encadrements, il vient que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

$= U_n + I_n$ par linéarité de l'intégrale convergente

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ par 4)b) et 2)d)

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0}$

~~5)a) On pose $u'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $v(t) = 1+t^2$~~

~~Soit $A > 0$.~~

~~u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ donc par intégration par partie,~~

~~$\int_0^A \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \Big[\frac{1}{1+t^2}$~~

Om admet le résultat par manque de temps

5)b) $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim\limits_{A \to +\infty} [\arctan(t)]_0^A = \pi/2$

c) On a donc $\frac{J_n}{n} = \frac{2n(J_n - J_{n+1})}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{J_n}{n} = 2(J_1 - J_{N+1}) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 2J_1 \text{ car } \lim_{N\to+\infty} J_N = 0$$

donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{J_n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = 2J_1 = \pi}$

d)

```
def suite J(n):
    J = np.pi / 2
    for k in range(2, n+1):
        J = J*(1 - 1/(2*n))
    return J.
```

6) Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$

$$J_{0+1} = J_1 = \pi/2 = \pi/2 \cdot \frac{\binom{2\cdot 0}{0}}{4^0}$$

hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $J_{n+1} = \pi/2 \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

$$J_{n+2} = \frac{(2n+1) J_{n+1}}{2n+2} \quad \text{par } 5)a)$$

$$= \frac{(2n+1)}{2n+2} \cdot \pi/2 \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{n!\,n!} \cdot \frac{\pi/2}{4^n}$$

$$= \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!((2(n+1))-n+1)!}}{4\cdot 4^n} \frac{\pi/2}{4^n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{4^n} \cdot \pi/2$$

La récurrence est achevée.

Partie 3 :

7)a) Y_n compte le nombre de succès (obtenir pile) dans une suite de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 1/2$

donc $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2)}$

7) b)

Par symétrie des rôles de X_n et Y_n,

$$\boxed{P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751