

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Maths 2 Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{(n,n)}(x) = P(X_{(n,n)} \leq x) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \quad \text{par mutuelle indépendance des } X_i$$

$$\text{donc } \underline{F_{(n,n)}(x) = (F(x))^n}$$

F étant une fonction de répartition de variables à densité, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points donc par produit,

$$x \mapsto (F(x))^n \text{ est aussi } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

donc par dérivation et prolongement arbitraire au point où F n'est pas $\mathcal{C}^1$, une densité de $X_{(n,n)}$ est :

$$\underline{f : x \mapsto n F'(x) (F(x))^{n-1} = n f(x) (F(x))^{n-1}}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{(n,1)}(x) = P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right)$$

$$= 1 - P\left(\min_{1 \leq i \leq n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \quad \text{par mutuelle indépendance}$$

donc $\underline{F_{(m,1)}(x) = 1 - (1 - F(x))^m}$

par les mêmes raisons qu'en a), $F_{(m,1)}(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points due par dérivation et prolongement arbitraire, une densité de $X_{(m,1)}$ est :

$f_{(m,1)} : x \mapsto m f(x) (1 - F(x))^{m-1}$

2) a) On a par l'énoncé que $\forall (i, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $Y_{i,x}(\omega) \in \{0, 1\}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_{i,x} = 1) = P(X_i \leq x)$

car $[Y_{i,x} = 1] \subset [X_i \leq x]$ et $[X_i \leq x] \subset [Y_{i,x} = 1]$

donc $P(Y_{i,x} = 1) = F(x)$

et $P(Y_{i,x} = 0) = P(X_i > x) = 1 - P(X_i \leq x) = 1 - F(x)$

donc $\boxed{Y_{i,x} \subset \beta(F(x))}$ pour tout (i, x) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Supposons $[X_{(m,n)} \leq x]$ réalisé

donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[X_{(m,i)} \leq x]$ est réalisé par l'énoncé

ie $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[Y_{i,x} = 1]$ est réalisé

donc $[\sum_{i=1}^m Y_{i,x} \geq n]$ est réalisé

donc $[X_{(m,n)} \leq x] \subset [\sum_{i=1}^m Y_{i,x} \geq n]$

Réciproquement supposons $[\sum_{i=1}^m Y_{i,x} \geq n]$ réalisé

cela implique nécessairement que l'événement $[X_i \leq x]$ est réalisé

k fois $\underset{\text{au plus}}{1}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (sinon la somme des $Y_{i,x}$ serait inférieure

a) k) donc nécessairement $[X_{(m,k)} \leq x]$ est réalisée

$$\text{donc } \underbrace{\left[\sum_{i=1}^m Y_{i,x} \geq k \right] \subset [X_{(m,k)} \leq x]}$$

$$\text{donc finalement, } [X_{(m,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^m Y_{i,x} \geq k \right]$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a donc } F_{(m,k)}(x) = P(X_{(m,k)} \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^m Y_{i,x} \geq k\right)$$

la variable $Y_{i,x}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $F(x)$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^m Y_{i,x} \sim \mathcal{B}(m, F(x)) \text{ par le cours}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{(m,k)}(x) = P(X_{(m,k)} \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^m Y_{i,x} = k \cup \sum_{i=1}^m Y_{i,x} = k+1 \cup \dots\right)$$

$$\begin{aligned} F_{(m,k)}(x) &= P\left(\bigcup_{l=k}^m \left(\sum_{i=1}^m Y_{i,x} = l\right)\right) \\ &= \sum_{l=k}^m P\left(\sum_{i=1}^m Y_{i,x} = l\right) \quad \text{par union disjointe} \\ &= \sum_{l=k}^m \binom{m}{l} F(x)^l (1-F(x))^{m-l} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{(m,k)}(x) = \sum_{l=k}^m \binom{m}{l} F(x)^l (1-F(x))^{m-l}$$

3) a) $b_{m,l}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme

$$\text{et } \forall z \in \mathbb{R}, \quad b'_{m,l}(z) = l \binom{m}{l} z^{l-1} (1-z)^{m-l} + (m-l) \binom{m}{l} z^l (1-z)^{m-l-1}$$

$$= m \binom{m-1}{l-1} z^{l-1} (1-z)^{m-1-(l-1)} + (m-l) \binom{m}{l} z^l (1-z)^{m-l-1}$$

$$= m \left[\binom{m-1}{l-1} z^{l-1} (1-z)^{m-1-(l-1)} - \binom{m-1}{l} z^l (1-z)^{m-l-1} \right]$$

$$\text{donc } \forall z \in \mathbb{R}, \quad b'_{m,l}(z) = m(b_{m-1,l-1}(z) - b_{m-1,l}(z))$$

b) $a_{m,k}$ est aussi dérivable comme somme de polynômes

$$\text{et } \forall z \in \mathbb{R}, a'_{m,k}(z) = \sum_{l=k}^m b'_{m,l}(z)$$

$$= \sum_{l=k}^m m (b_{m-1,l-1}(z) - b_{m-1,l}(z)) \text{ par la question précédente}$$

$$= m \sum_{l=k}^m [b_{m-1,l-1}(z) - b_{m-1,l}(z)]$$

$$= m (b_{m-1,k-1} - b_{m-1,m}(z)) \text{ par somme télescopique}$$

$$= m b_{m-1,k-1}(z) \text{ car } m = m-1 \text{ et } l = k-1$$

$$\text{donc } \forall z \in \mathbb{R}, a'_{m,k}(z) = m b_{m-1,k-1}(z)$$

c) On a vu en 2)c) que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{(m,k)}(x) = \sum_{l=k}^m \binom{m}{l} F(x)^l (1-F(x))^{m-l} = a_{m,k}(F(x))$$

$F_{(m,k)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc une dérivée de $\frac{F_{(m,k)}(x)}{F_{(m,k)}(x)}$ $F_{(m,k)}$ est

$$f_{(m,k)} : x \mapsto a'_{m,k}(F(x)) F'(x)$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, f_{(m,k)}(x) = m b_{m-1,k-1}(F(x)) f(x) = m \binom{m-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{m-k}$$

4) a) Soit n suffisamment grand

$$\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq L \alpha n \right] = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \cdot \frac{1}{n} \geq \frac{L \alpha n}{n} \right]$$

$$= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \geq \frac{L \alpha n}{n} - F(x) \right]$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 16	Session : 2024
	Épreuve de : Maths 2 Approfondies		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Or pour n assez grand, $L(n) \leq n < L(n) + 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{n}{L(n)} \leq 1 + \frac{1}{L(n)}$
 $\Rightarrow \frac{n}{L(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$

donc pour n assez grand $\frac{n}{L(n)}$ vaut 1

On montre de la même manière que $\frac{L(n)}{n}$ est proche de α pour n assez grand

donc $\frac{L(n)}{n} - F(x)$ est proche de $\alpha - F(x) > \varepsilon$

donc $\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq L(n) \right] \subset \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) > \varepsilon \right]$ pour n assez grand

donc $\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq L(n) \right] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| > \varepsilon \right]$

Par raison de la probabilité, on a donc :

$$0 \leq P(X_{(n,k)} \leq L(n)) \leq P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x)\right| > \varepsilon\right)$$

Or $\forall (i, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, les $Y_{i,x}$ sont mutuellement indépendantes, ont une même espérance égale à $F(x)$ et une même variance donc par la loi faible des grands nombres, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

donc par théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_{(n,k)} \leq L(n)) = 0$

b) Soit $A = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq L(\alpha, n) \right]$ et $B = \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right]$

Montrons que $\bar{A} \subset \bar{B}$ pour n assez grand

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} < L(\alpha, n) \right] \\ &= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) < \frac{L(\alpha, n)}{n} - F(x) \right] \end{aligned}$$

Or pour n assez grand, $\frac{L(\alpha, n)}{n} - F(x)$ est proche de $\alpha - F(x) < -\varepsilon$

donc $\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) < \frac{L(\alpha, n)}{n} - F(x) \right] \subset \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) < -\varepsilon \right]$

mais $\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) < \frac{L(\alpha, n)}{n} - F(x) \right]$

$= \left[-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) > F(x) - \frac{L(\alpha, n)}{n} \right] \subset \left[-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) > \varepsilon \right]$

(Par les mêmes raisons

donc finalement $\bar{A} \subset \left[-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) > \varepsilon \right] \cup \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) < -\varepsilon \right] \subset \bar{B}$

donc $\bar{A} \subset \bar{B}$

donc

$$\boxed{B \subset A}$$

Par croissance de la probabilité, on a donc :

$$1 \geq P(X_{(n,k)} \leq L(\alpha, n)) \geq P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

par la loi faible des grands nombres

donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, L(\alpha, n))}(x) = 1$

5) a) On a que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$ or $f(x) > 0$ (par x dans I)
 donc F est strictement croissante
 de plus F est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur I et vérifie $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = 1$
 et $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$

car F est la fonction de répartition de X , qui elle a pour densité f

donc F réalise une bijection de I dans $F(I) =]0, 1[$ par le
 théorème de la
 bijection

b) $\alpha \in]0, 1[$ donc $\alpha \in]0, F(x)[$ or $\alpha \in]F(x), 1[$

si $\alpha \in]0, F(x)[$: alors par b),

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(m, L+m)}(x) = 1$ or $\alpha \in]0, F(x)[$ donc
 $F^{-1}(\alpha) \in]a, x[$ par stricte croissante de F

si $\alpha \in]F(x), 1[$: alors par a),

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(m, L+m)}(x) = 0$ or $\alpha \in]F(x), 1[$ donc
 $F^{-1}(\alpha) \in]x, b[$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(m, L+m)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } F^{-1}(\alpha) < x \\ 0 & \text{si } F^{-1}(\alpha) > x \end{cases}$

On remarque une intervention d'inégalité,
 on aurait du trouver l'inverse,
 le résultat est admis

c) On a donc que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(m, L+m)}(x) = F_x(x)$ or F_x est la fonction de répartition
 associée à $F^{-1}(x)$

donc par le cours,

$$X_{(m, L+m)} \xrightarrow{P} F^{-1}(x)$$

6)

def tri(T):

for i in range(0, s):

for j in range(1, i+1):

while T[i] > T[j]:

T[i] = T[j]

T[j] = a

T[j] = T[i]

T[i] = a

return T

7) a)

def X(n, k):

res = ech(n)

Z = ri(res)

return Z

b) les points renvoie une approximation de $F^{-1}(\alpha)$ par $\alpha = 0,01$

en réalisant une simulation de la moyenne empirique de chaque ~~$X_{(i, n)}$~~ $X_{(i, n)}$

c) On peut donc en déduire que les X_i suivent toute une loi de Bernoulli de paramètre $F^{-1}(\alpha)$

d)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths 2 Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

8) a) On pose $P_k : " \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_k \text{ admet pour densité } g_{n,k} "$

Montrons que P_k est vraie par récurrence.

initialisation : pour $k = 1$

$$S_1 = T_1 \sim \mathcal{E}(n\lambda)$$

$$\text{donc une densité de } S_1 \text{ est } f: x \mapsto \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = g_{1,k}(x)$$

donc la récurrence est initialisée pour $k = 1$

hérédité : on suppose P_k vraie pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Montrons que P_{k+1} est vraie

$S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$ or S_k et T_{k+1} sont indépendantes
par le ~~théorème~~ lemme des conditions

et $\forall x \in \mathbb{R}$, une densité de T_{k+1} est

$$f: x \mapsto \begin{cases} (n-k)\lambda e^{-\lambda(n-k)x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } f \text{ est clairement bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq (n-k)\lambda$$

donc par produit de convolution, une densité de S_{k+1} est donnée par

$$g: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} b_{S_k}(t) b_{T_{k+1}}(x-t) dt \quad (\text{en notant } b_{S_k} = g_{n,k} \text{ et } b_{T_{k+1}} \text{ une densité de } T_{k+1})$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(t) b_{T_{k+1}}(x-t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} n \binom{m-1}{n-1} \lambda e^{-\lambda(m-n+1)t} (1-e^{-\lambda t})^{n-1} b_{T_{k+1}}(x-t) dt \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

On pose $u = x - t = \varphi(t)$

φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, strictement décroissante donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $]-\infty, x]$

et $du = -dt$

le changement de variable conserve la convergence

$$\text{et } g(x) = \int_{-\infty}^x n \binom{m-1}{n-1} \lambda e^{-\lambda(m-n+1)(x-u)} (1-e^{-\lambda(x-u)})^{n-1} (n-k) \lambda e^{-(n-k)\lambda u} du$$

$$= n(n-k) \binom{m-1}{n-1} \lambda e^{-\lambda(m-n+1)x} \left(\int_{-\infty}^x e^{\lambda(m-n+1)u} (1-e^{-\lambda(x-u)})^{n-1} \lambda e^{-(n-k)\lambda u} du \right)$$

$$= n(n-k) \binom{m-1}{n-1} \lambda e^{-\lambda(m-n+1)x} \left(\int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda u} du \right)$$

Non abouti

b) par 2)c) la fonction de répartition de $X_{(m,k)}$ est telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$F_{(m,k)}(x) = \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} F_X(x)^\ell (1-F_X(x))^{m-\ell} \quad \text{où } F_X \text{ est la fonction de répartition associée à chaque } X_i$$

$$= \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (1-e^{-\lambda x})^\ell (e^{-\lambda x})^{m-\ell}$$

=

b) par 8)a), S_k admet pour densité $g_{m,k}$

déterminons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{(m,k)}(x)$ quand $x_i \subset \mathcal{E}(\lambda)$

$$\text{Par 3)c), } f_{(m,k)}(x) = m \binom{m-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} e^{-(m-k)\lambda}$$

$$\text{donc } f_{(m,k)}(x) = m \binom{m-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(m-k+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} = g_{m,k}(x)$$

donc S_k suit la même loi que $X_{(m,k)}$ quand les X_i suivent une loi $\mathcal{E}(\lambda)$

2) S_k suit la même loi que $X_{(m,k)}$ (quand les $X_i \subset \mathcal{E}(\lambda)$)

donc $E(X_{(m,k)})$ et $V(X_{(m,k)})$ existent car $E(S_k)$ et $V(S_k)$ existent

$$\text{et } E(X_{(m,k)}) = E(S_k) = \sum_{i=1}^k E(T_i) \text{ par linéarité de l'espérance}$$

or $T_i \subset \mathcal{E}((m-i+1)\lambda)$ donc $(m-i+1)T_i \subset \mathcal{E}(\lambda)$ par le lemme

$$\text{donc } E(X_{(m,k)}) = \sum_{i=1}^k E(T_i) = \sum_{i=1}^k \frac{E((m-i+1)T_i)}{m-i+1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{m-i+1}$$

$$\text{donc } E(X_{(m,k)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{m-i+1}$$

$$\text{et } V(X_{(m,k)}) = \sum_{i=1}^k V(T_i) \text{ par mutuelle indépendance des } T_i$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{V((m-i+1)T_i)}{(m-i+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m-i+1)^2}$$

$$\text{donc } V(X_{(m,k)}) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(m-i+1)^2}$$

10a) Soit $j \geq 1$ et $x \in [j, j+1]$

$x \geq j$ donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{j}$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{donc } \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \geq 0$$

On admet le membre de gauche de l'inégalité

10) b) On pose $j = \frac{1}{\lambda(m-i+1)}$ et $x = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{m+1}{m-k+1}\right)$

ce qui donne $0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}$ par l'inégalité précédente

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{\lambda(m-i+1)} - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{m+1}{m-k+1}\right) \leq \frac{2}{\lambda^2(m-i+1)^2} \leq \frac{2}{\lambda(m-i+1)}$$

par croissances de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$

en sommant de 1 à k et en ajoutant $\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{m+1}{m-k+1}\right)$,

on obtient bien que :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{I}1, n\mathbb{I}, \quad \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{m+1}{m-k+1}\right) \leq E(X_{(n,k)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{m+1}{m-k+1}\right) + \frac{2}{\lambda}(A)$$
$$\text{ou } A = \left(\frac{1}{m-k+1} - \frac{1}{m+1}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 16	Session : 2024
	Épreuve de : Maths 2 Approfondis		
Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

c) $\forall \alpha \in]0, 1[$, $L(\alpha n) \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Si $L(\alpha n) \in \llbracket 1, n \rrbracket$: alors par l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1}{n-L(\alpha n)+1}\right) \leq E(X_{(n, L(\alpha n))}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1}{n-L(\alpha n)+1}\right) + \frac{2}{\lambda} A$$

$$\text{on } A = \ln\left(\frac{1}{n-L(\alpha n)+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{L(\alpha n)}{n-L(\alpha n)+1}\right) \leq E(X_{(n, L(\alpha n))}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{L(\alpha n)}{n-L(\alpha n)+1}\right) + \frac{2}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{n-L(\alpha n)+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\text{Or } \frac{L(\alpha n)}{n-L(\alpha n)+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha n}{n-L(\alpha n)+1}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-L(\alpha n)+1} = \frac{1}{1-\alpha} \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n-L(\alpha n)+1} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

donc par continuité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et par encadrements,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_{(n, L(\alpha n))}) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$$

1.1) Par la même méthode, il faudrait encadrer $V(X_{(n, L(\alpha n))})$ entre deux termes tendant vers 0 en $+\infty$, ce qui achèverait de

montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_{(n, L(\alpha n))}) = 0$. On admet le résultat

12) a) Soit $\varepsilon > 0$

$$\text{On pose } Y = X_{(n, \lambda \alpha n)} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$$

et $\underline{Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+}$ car $\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) > 0$ et $S_{\lambda \alpha n}$ suit la même loi que $X_{n, \lambda \alpha n}$

On applique l'inégalité de Markov à Y^2 ce qui donne :

$$P(Y^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}$$

ie:

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X_{(n, \lambda \alpha n)} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\left(X_{(n, \lambda \alpha n)} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2\right)$$

12) b) On a donc $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \leq P(|Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (V(Y) + (E(Y))^2) \quad \text{par la formule de Huygens}$$

$$\text{or } V(Y) = V(X_{(n, \lambda \alpha n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par 11)}$$

$$\text{et } (E(Y))^2 = \left(E\left(X_{(n, \lambda \alpha n)}\right) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right)^2$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_{(n, \lambda \alpha n)}) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) = 0 \quad \text{par 10 c)}$$

$$\text{donc par continuité de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y)^2 = 0$$

$$\text{donc par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|X_{(n, \lambda \alpha n)} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

$$\text{donc } \boxed{X_{(n, \lambda \alpha n)} \xrightarrow{P} -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)}$$

13) la question 5)c) permet de retrouver ce résultat

$$\text{car } X_{(n, (X+1))} \xrightarrow{P} F^{-1}(\alpha)$$

et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Or F est bijective et $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Partie III

16) On remarque que $Z+1 \in g(p)$

donc $E(Z)$ existe et $E(Z) = -1 + E(Z+1)$

donc $E(Z) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$

et $V(Z) = V(Z+1) = \frac{1-p}{p^2}$

15) ce théorème est plus fort car on a directement car on a l'égalité et non plus l'égalité de loi donc les résultats seront plus précis

16) On remarque que $Z+1 \in g(q)$

donc $E(Z)$ existe et $E(Z) = E(Z+1) - 1$

($\Rightarrow$) $E(Z) = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q}$

de même, $V(Z) = V(Z+1) = \frac{1-q}{q^2}$

16) m.a. Soit $l \in \mathbb{N}$.

$$P(Z \geq l) = P\left(\bigcup_{i=l}^{+\infty} [Z \geq i]\right) = \sum_{i=l}^{+\infty} P(Z=i)$$

comme union disjointe et par σ -additivité

donc $P(Z \geq l) = p \sum_{i=l}^{+\infty} q^i$

$= p \frac{q^l}{p} = q^l$

donc $P(Z \geq l) = q^l$ pour $l \in \mathbb{N}$

$$17) a) \quad P(U_m \geq l) = P\left(\bigcap_{i=1}^m [Z_i \geq l]\right) \\ = \prod_{i=1}^m P(Z_i \geq l) \text{ par mutuelle indépendances des } Z_i$$

donc :

$$P(U_m \geq l) = q^{lm}$$

$$\text{donc } \boxed{\forall l \in \mathbb{N}, P(U_m \geq l) = q^{lm}}$$

$$b) \text{ On a aussi } \underline{U_m(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Soit $l \in \mathbb{N}$

$$[U_m \geq l+1] \cup [U_m = l] = [U_m \geq l]$$

$$\text{donc } P(U_m = l) = P(U_m \geq l) - P(U_m \geq l+1)$$

$$\text{ici } P(U_m = l) = q^{lm} - q^{(l+1)m}$$

$$= q^{lm}(1-q) = pq^{lm}$$

$$\text{donc } \boxed{U_m \subset \mathcal{L}(l_m)}$$

$$17) a) \quad X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [0, +\infty[$$

$$\text{donc } \underline{Z_1(\Omega) = \lfloor m X_1 \rfloor(\Omega) = Z_2(\Omega) = \mathbb{N}}$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad \text{Soit } k \in \mathbb{N}$$

$$P(Z_1 = k) = P(\lfloor m X_1 \rfloor = k) = P(k \leq m X_1 < k+1)$$

$$= F_{X_1}\left(\frac{k+1}{m}\right) - F_{X_1}\left(\frac{k}{m}\right) \quad \text{car } m > 0$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{k+1}{m} \cdot \lambda\right)} - \left(1 - e^{-\frac{\lambda k}{m}}\right)$$

$$= e^{-\frac{\lambda k}{m}} - e^{-\left(\frac{k+1}{m} \cdot \lambda\right)}$$

$$\text{donc } \boxed{Z_1 \subset \mathcal{L}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)}$$

$$= \left(e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)^k \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)$$

On montre de la même manière que

$$\boxed{Z_2 \subset \mathcal{L}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)}$$