Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

1) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j$

$$(P\,{}^tP)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} P_{i,k}\,{}^tP_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (P_{i,k})\, P_{j,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\delta_{i,\sigma(k)})\,(\delta_{j,\sigma(k)})$$

Or, par définition du symbole de Kronecker,

$$\forall (k,i) \in [\![1;n]\!]^2\ \delta_{i,\sigma(k)} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq \sigma(k) \\ 1 \text{ si } i = \sigma(k) \end{cases}$$

σ réalise une bijection dans $[\![1;n]\!]$ donc $\exists!\, k \in [\![1;n]\!], \sigma(k) = i$ et $\exists!\, l \in [\![1;n]\!], \sigma(l) = j$ où $k \neq l$

Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j$, $(P\,{}^tP)_{i,j}$ est une somme de termes nuls donc vaut 0

$$\forall i \in [\![1;n]\!], (P\,{}^tP)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{i,k})^2$$

$$= 0 + 0 + \dots + 1^2 + 0 \dots + 0 = 1$$ (en procédant de la même manière

Ainsi, $P\,{}^tP = I_n$ donc P est orthogonale

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De plus, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$,

$$P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

Je n'aboutis pas

2) Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hamarad

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$,

$$({}^tQQ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^tQ_{i,k} Q_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} Q_{k,i} Q_{k,j}$$

Si $i=j$, on a bien $\sum_{k=1}^{n} (r)^2$ où $r \in \{-1;1\}$

$$= n$$

Si $i \neq j$, ses vecteurs colones sont 2 à 2 orthogonaux et $\sum_{i=1}^{n} {}^tQ_{i,k} Q_{k,j}$ est le produit scalaire de la i-ème colone avec la j-ème colone donc cette somme vaut 0

Ainsi, ${}^tQ Q = n I_n$

De plus, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $Q_{i,j} = r$ où $r \in \{-1;1\}$

et Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$,

$$Q_{i,j}^2 = 1$$

Donc Q est une matrice de Hamarad implique que ${}^tQQ = n I_n$ et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $Q_{i,j} = 1$

De plus, si l'on suppose que $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2$,

$$({}^tQQ)_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ ~~1~~n \text{ si } i = j \end{cases} \quad \text{et que } Q_{i,j}^2 = 1,$$

on en dédit grâce à la deuxième supposition que tous les termes de Q valent 1 ou -1

~~Q est bien une matrice carré car lorsque l'on la multiplie par sa transposée, on~~

La première supposition nous permet de dire que ses vecteurs colones sont orthogonaux

Ainsi, Q ~~est~~ une matrice de Hadamard

$$\overset{\Longleftrightarrow}{} \quad {}^tQQ = nI_n \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2, \; Q_{i,j} = 1$$

3) ${}^tH$ est évidemment une matrice carrée dont tous les coefficients valent 1 ou -1

La question 2) nous permet d'affirmer que

$${}^tHH = nI_n$$

Donc

$${}^t({}^tHH) = {}^t(nI_n)$$

Donc

$${}^tH({}^{t\,t}H) = nI_n$$

Donc les vecteurs colones de H sont orthogonaux

Ainsi, ${}^tH$ est bien une matrice de Hadamard

4) $\forall (i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$,

$$(PH)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} P_{i,k} H_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} H_{k,j}$$

Donc pour l'unique $u \in [\![1 ; n]\!]$, $\delta_{i,\sigma(u)} = 1$,

on a $\delta_{i,\sigma(u)} H_{u,j} = H_{u,j}$ où $j \in [\![1 ; n]\!]$
$= n \in \{1 ; -1\}$ par définition de H

De plus, ${}^t(PH)\, PH = {}^tH\, {}^tP P H = {}^tH H = n I_n$ ce qui prouve que les vecteurs colonnes de PH sont orthogonaux

Et PH est évidemment carrée par produit

Donc PH est une matrice de Hamadamard

De la même façon, les coefficients de HP valent 1 ou -1, ${}^t(HP) HP = {}^tP\, {}^tH H P = n\, {}^tP P = n I_n$
ce qui prouve que les vecteurs colonnes de HP sont orthogonaux

Donc HP est une matrice de Hamadamard

$\forall (i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$,

$$(DH)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k} H_{k,j} = D_{i,i} H_{i,j} = ab$$ où $(a, b) \in [\![-1 ; 1]\!]^2$
donc $ab \in [\![-1 ; 1]\!]$

Ainsi, les coefficients de DH valent 1 ou -1
DH est une matrice carrée
${}^t(DH)\, DH = {}^tH D^2 H$ où $D^2 = I_n$ (chaque terme mis au carré dans une matrice colone)
Donc ${}^t(DH)\, DH = n I_n$ donc les vecteurs colonnes de DH sont orthogonaux

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC/HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc DH est une matrice de Hadamard

On procède de la même façon sans problème pour HD

Ainsi, PH, DH, HP, HD sont toutes des matrices de Hadamard

Soit M une matrice de Hadamard

6) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \; i \neq j,$

$$({}^tMM)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^tM_{i,k} M_{k,j} = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{u} 1 + \sum_{k=1}^{\mu} (-1) = 0$$

où u est le nombre de termes faisant 1 et -1

donc $u + \mu = n$

Ainsi, $n = 2u$ donc n est paire car si u est différent pour 1 et -1, le résultat ne peut pas s'annuler

11) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$

et $A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1}B & & A_{n,n}B \end{pmatrix}$

* $A \otimes B$ est une matrice carrée (de taille $nk \times nk$)

* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $A_{ij}B$ est une matrice ~~d~~contenant des vecteurs égaux à 1 ou -1 (-1 ou 1 multiplié par une matrice de Hadamard)

Donc en formant $A \otimes B$ on a bien des matrices de coefficients égaux à 1 ou -1,

$A \otimes B$ a donc tous ses coefficients égaux à 1 ou -1

* $\forall (i,j) \in [\![1;kn]\!]^2$,

$$\left({}^t(A \otimes B) A \otimes B)\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^t(A \otimes B)_{i,k} \, (A \otimes B)_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (A \otimes B)_{k,i} \, (A \otimes B)_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} \quad A_{k,j}$$

$$=$$

Je n'aboutis pas

13) On montre, par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard de taille 2^m

Soit $(P_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$: " Il existe une matride de Hadamard de taille 2^m "

Initialisation : La question 8 nous confirme

qu'il existe bien une matrice de taille 2.
Donc P_1 est vraie

Hérédité: Supposons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que P_m est vérifiée.

$\exists M \in \mathcal{M}_{2^m}(\mathbb{R})$, M est une matrice de Hadamard

Soit N une matrice 2×2 de Hadamard (qui existe d'après la question 8)

$(M \otimes N)$ est de dimension $2^m 2 = 2^{m+1}$ et est bien de Hadamard (d'après la question précédente), ce qui achève la récurrence

Conclusion, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice de Hadamard dans $M_{2^m}(\mathbb{R})$

Partie II

15) Symétrie: $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\langle u ; v \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} p_k v_k u_k$$

$$= \langle v ; u \rangle$$

Bilinéarité: Soient u_1, u_2 et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle \lambda u_1 + u_2 ; v \rangle = \sum_{k=1}^{n} (\lambda u_{1,k} + u_{2,k}) v_k p_k$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} u_{1,k} v_k p_k + \sum_{k=1}^{n} u_{2,k} v_k p_k$$

$$= \lambda \langle u_1 ; v \rangle + \langle u_2 ; v \rangle$$

$\langle \cdot ; \cdot \rangle$ est donc linéaire pour la première variable, la symétrie nous indique qu'il l'est aussi pour la deuxième.

Positivité : Soit $u \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u ; u \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 p_k$$

Or, $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$, p_k représente une probabilité donc $p_k \geqslant 0$

Donc par somme de termes positifs,

$\langle u ; u \rangle \geqslant 0$

Définition : Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $\langle u ; u \rangle = 0$

$$\langle u ; u \rangle = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 p_k = 0$$

Donc par somme de termes positifs, $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$,

$$u_k^2 p_k = 0$$

l'énnoncé a supposé que $P(A) \neq 0$ donc $p_k \neq 0$

Donc $u_k^2 = 0 \Leftrightarrow u_k = 0$

Finalement, $u = 0$

$\boxed{\text{Donc l'application } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle x ; y \rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n}$

8/16

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

16) Soit $i \in [\![1;l]\!]$.

On résout :

$$\begin{cases} E(a_iZ_i+b_i)=0 \\ V(a_iZ_i+b_i)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_i = \dfrac{-b_i}{E(Z_i)} & \text{par linéarité de l'espérance} \\ V(a_iZ_i)=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_i = \sqrt{\dfrac{1}{V(Z_i)}} \\ b_i = -a_i E(Z_i) \end{cases}$$

Ainsi, par unicité de la variance et de l'espérance, il existe un unique couple $(a_i;b_i) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$E(a_iZ_i+b_i)=0 \text{ et } V(a_iZ_i+b_i)=1$$

17)

$$\langle v ; u_0\rangle = \sum_{k=1}^{n} V_k p_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\})\, V(\omega_1)$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(V=x) = P(\{\omega_k\})$ si V prend la valeur x lorsque ω_k se réalise

Ainsi, $\langle u ; u_0\rangle = E(V)$ par définition de l'espérance

$$\langle v ; w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) v_k w_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) V(\omega_k) W(\omega_k)$$

Ainsi, de la même manière, $\forall k \in \mathbb{N}$, $V(\omega_k)$ et $W(\omega_k)$ représentent la valeur prise par les variables et $\mathbb{P}(\{\omega_k\})$ la probabilité

Donc $E(VW) = \langle v ; w \rangle$

18) D'après la question précédente, $\forall (i,j) \in [\![1;\ell]\!]^2 / i \neq j$,

$$\langle x_i ; u_0 \rangle = E(X_i) = E(a_i Z_i + b_i) = 0$$

$$\langle x_i ; x_i \rangle = E(X_i^2)$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2 = 1$$

$$\langle x_i ; x_j \rangle = E(X_i X_j)$$

Or, l'indépendance des Zi nous donne que Xi et Xj sont indépendantes

Donc $\langle x_i ; x_j \rangle = E(X_i) E(X_j) = 0$

20) b) On commence par montrer la linéarité de T

Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_{m-1}[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$T(\lambda Q_1 + Q_2) = ((\lambda Q_1 + Q_2)(\alpha_1), \dots, (\lambda Q_1 + Q_2)(\alpha_n))$

$= \lambda((Q_1)(\alpha_1), \dots, Q_1(\alpha_n)) + (Q_2(\alpha_1), \dots, Q_2(\alpha_n))$

$= \lambda T(Q_1) + T(Q_2)$

Donc T est linéaire

De plus, Soit $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[x]$, $T(Q) = 0$

On a donc $(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_n)) = 0$

Donc $\forall i \in [\![1 ; m]\!]$, $Q(\alpha_i) = 0$

Q admet donc m racines

Or, Q est de degré $m-1$

Donc Q est nul

Ainsi, Q est injectif

De plus, $\dim(\mathbb{R}_{m-1}[x]) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$, ce qui nous donne directement la surjectivité

Donc Q est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$

c) La question précédente nous indique donc que tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ admet un antécédent Q où $(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m))$ est égal à ce vecteur.

Ainsi, en prenant le vecteur $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n)$, on sait qu'il en existe un antécédent Q

et $E(Q(Z)) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k P(Z=\alpha_k) = 0$

En reprenant ce même polynôme et en constatant que d'après la question 17), E(VW), on obtient

$E(Q(Z)Z) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k P(Z=\alpha_k) = 0$

Partie III

23) Soient $x = (x_1, \dots, x_{n^2})$ et $y = (y_1, \dots y_{n^2})$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (on note $x+y = ((x+y)_1, \dots (x+y)_{n^2})$

$$\varphi(\lambda x + y) = \left[(\lambda x + y)_{(i-1)n+j}\right]_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$$

$$= \lambda \left[x_{(i-1)n+j}\right]_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} + \left[y_{(i-1)n+j}\right]_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$$

$$= \lambda \varphi(x) + \varphi(y)$$

Donc φ est linéaire

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[x_{(i-1)n+j}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} x_i^2}$$

$$= \|x\|$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 16

Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

24) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2$$

Or, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$,

$$({}^tA A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} {}^tA_{i,k} A_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} A_{k,j}$$

En particulier si $i=j$

$$({}^tA A)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$$

Donc $\mathrm{Tr}({}^tA A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = \|A\|^2$

Donc $\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tA A)}$

~~$\forall (i;j) \in [\![1;n]\!]^2$, on a:~~

~~$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|^2 \geq$~~

27) $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}$,

$$F(\varphi(x)) \leq n \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(x)_{i,j}^2 \right)^{1/2} \text{ (d'après 25)}$$

$$\leq n \|\varphi(x)\|$$

$$\leq n\|x\|$$

Ainsi, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{n^2})^2$,

$$\boxed{|F(\varphi(x) - F(\varphi(y))| \leq n \|x - y\|}$$

~~28) $^{(*)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{n^2}$, l'application $y \mapsto \|x - y\|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ donc $y \mapsto n\|x-y\|$ en admet un aussi,~~

~~Ainsi, $\exists u \in \mathbb{R}^{n^2}$, $|F(\varphi(x) - F\varphi(u))| = \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} |F(\varphi(x)) - F\varphi(u)|$~~

~~Donc $F\varphi$ admet un minimum global~~

~~(*) $F(\varphi)$ est~~

28) $F \circ \varphi$ est ~~d~~définie sur un ensemble fermé borné, à savoir K_n.

De plus, $\lim\limits_{x \to y} n\|x-y\| = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to y} |F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))| = 0$ (par encadrement car une valeur absolue est positive)

Donc $\lim\limits_{x \to y} F(\varphi(x)) = F(\varphi(y))$

Ceci étant valable pour tout y dans $\mathbb{R}^{n^2}$,

$F \circ \varphi$ est continue sur K

Ainsi, $F \circ \varphi$ étant continue sur un ensemble fermé borné, cela suffit à dire que $F \circ \varphi$ admet un maximum et un minimum

Donc F admet un maximum et un minimum sur O_n

29) Pour A une matrice orthogonale, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^{2} \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Or, la question 25) nous montre que $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^{2} \right)^{1/2} \leqslant F(A)$$

De plus, ce minimum est bien atteint en prenant par exemple $F(I_n)$

$\boxed{\text{Donc } M_{\overline{n}} = n}$

34) On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \alpha^2 + 2\beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \\ \beta^2 = 0 \\ 2\alpha\beta = 0 \\ 2\beta^2 + \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

Donc $\beta = 0$ et $\alpha = 1$