Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 15

Session : 2024

Épreuve de : Maths ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1. Soit P une matrice de permutation,
on a $P_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = \sigma(j) \\ 0 & si\ i \neq \sigma(j) \end{cases}$

On a donc $P_{j,i} = \begin{cases} 1 & si\ i = \sigma(j) \\ 0 & si\ i \neq \sigma(j) \end{cases}$ les termes de ${}^tP$

On veut montrer que ${}^tP\,P = I_n$
Soit $R_{i,j}$ les coefficients de ${}^tPP$,

On a $\forall j = i$,

$\cancel{R_{i,j} = P_{ij} \times}$ $R_{i,i} = P_{1,i} \times P_{1,i} + \dots + P_{n,i}$

$= 0 + 0 + \dots + P_{\sigma(i),i} \times P_{\sigma(i),i} + 0 + \dots + 0$

$= 1 \quad$ car $P_{\sigma(i),i} = 1$

Soit $\forall i \neq j$,

$R_{i,j} = P_{1,i}\, P_{1,j} + P_{2,i}\, P_{2,j} + \dots + P_{n,i}\, P_{n,j}$

$= 0 + \dots + P_{\sigma(i),i} \times 0 + \dots + P_{\sigma(j),i} P_{\sigma(j),j} + 0 + \dots + 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$ $= 0$

donc <u>^tPP est une matrice orthogonale.</u>

Aussi, soit $P_{j,i}$ le terme de i-ème ~~colonne~~ ligne et j-ème colonne de ^tP par transposée de P, on a alors :

$P_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } \neq \sigma(j) \end{cases}$ donc ^tP est aussi une matrice de permutation

2. Soit Q une matrice de Hadamard avec $Q_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne.

On $({}^tQQ)_{i,j} = \begin{cases} Q_{1,i}Q_{1,i} + \dots + Q_{n,i}Q_{n,i} & \text{si } i=j \\ Q_{1,i}Q_{1,j} + \dots + Q_{n,i}Q_{n,j} & \text{si } i\neq j \end{cases}$

$Q_{i,j} = 1$ ou -1

donc $({}^tQQ)_{i,j} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (Q_{j,i})^2 = n & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases}$

car $Q_{1,i}Q_{1,j} + \dots + Q_{n,i}Q_{n,j}$ par orthogonalité des vecteurs colonnes de Q. donc <u>$^tQQ = nI_n$</u>

Aussi, $\forall [i,j] \in [\![1,n]\!]^2$, $Q_{i,j} = 1$ ou -1 donc <u>$Q_{i,j}^2 = 1$</u>

Soit $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $Q_{i,j}^2 = 1$ donc $Q_{i,j} = 1$ ou -1

et ${}^tQQ = nI_n$,

on a $({}^tQQ)_{i,j} = \begin{cases} n = \sum_{j=1}^{n} (Q_{j,i})^2 & \text{si } i = j \\ 0 = Q_{1,i}Q_{1,j} + \dots + Q_{n,i}Q_{n,j} & \text{sinon} \end{cases}$

$\iff Q_{1,i}Q_{1,j} + \dots + Q_{n,i}Q_{n,j} = 0$

$\iff$ les colonnes de Q sont 2 à 2 orthogonales

Donc Q est une matrice de Hadamard.

3. Soit ~~Q~~ H une matrice de Hadamard,

on ~~${}^tQG$~~ ${}^tHH = nI_n$

$\iff \dfrac{{}^tH}{n} H = I_n$

$\iff \dfrac{{}^tH}{n} = H^{-1}$

$\iff \left(\dfrac{{}^tH}{n}\right)^{-1} = H$

$\iff$ donc $n({}^tH)^{-1}$ est une matrice de Hadamard

$H_{i,j} = 1$ ou -1 et ses colonnes sont orthogonales.

Or H est une matrice carrée donc ses lignes sont aussi orthogonales 2 à 2 donc les colonnes de ${}^tH$ sont orthogonales ~~2~~ 2 à 2 or tous les coefficients de H appartiennent à $\{-1, 1\}$ donc ceux de ${}^tH$ aussi donc ${}^tH$ est une matrice de Hadamard.

4. ~~Le~~ Soit $(PH)_{i,j} = P_{i,1}H_{1,j} + \dots + P_{i,n}H_{n,j}$

$= 0 + \dots + P_{i,\sigma(i)}H_{\sigma(i),j} + \dots + 0$

$= H_{\sigma(i),j} = -1$ ou 1

Ainsi, ${}^t(PH) = {}^tH\,{}^tP$

$\Leftrightarrow {}^t(PH)PH = {}^tH\,{}^tP P H = {}^tH I_n H$
$= {}^tH H = n I_n$

donc ${}^t(PH)PH = nI$ et $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2, ((PH)_{i,j})^2 = 1$
donc PH est une matrice de Hadamard.

• HP : $(HP)_{i,j} = H_{i,1}P_{1,j} + \dots + H_{i,n}P_{n,j}$

$= H_{i,\sigma(j)}P_{\sigma(j),j} = H_{i,\sigma(j)} = 1$ ou -1

donc $((HP)_{i,j})^2 = 1$

${}^t(HP)HP = {}^tP\,{}^tH H P = {}^tP\, n I_n P$
$= nI_n$

donc H P est de Hadamard

• DH : $(DH)_{i,j} = D_{i,1}H_{1,j} + \dots + D_{i,n}H_{n,j}$

$= D_{i,i}H_{i,j} = -1$ ou 1
donc $(DH)_{i,j}^2 = 1$

~~Aussi, les colonnes~~ ${}^t(DH)DH$
$= {}^tH\,{}^tD D H$
$= {}^tH\, D^2 H$
$= {}^tH I_n H = nI_n$
donc DH est de Hadamard

• HD : $(HD)_{i,j} = H_{i,1}D_{1,j} + \dots + H_{i,n}D_{n,j}$
$= D_{j,j}H_{i,j} = 1$ ou -1
donc $((HD)_{i,j})^2 = 1$

Aussi, ${}^t(HD)HD = {}^tD\,{}^tH H D = nI_n$
Donc HD est de Hadamard.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 15	**Session :** 2024

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5. \

6. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \end{pmatrix}$

avec T une matrice de Hadamard.

on ${}^tT\,T = n\,I_n$

or ${}^tT = \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 1 & \\ \vdots & \\ 1 & \end{pmatrix}$

donc Soit $({}^tT\,T)_{2,1} =$

//

7. Soit S une matrice de Hadamard,

$\forall (i,m) \in [\![2,n]\!]^2$ avec $i \neq m$, $\sum_{k=1}^{n} (S_{i,k}+1)(S_{m,k}+1)$

$= (S_{i,1}+1)(S_{m,1}+1) + \ldots + (S_{i,n}+1)(S_{m,n}+1)$

$= (S_{i,1}S_{m,1} + S_{i,2}S_{m,2} + \ldots + S_{i,n}S_{m,n}) + \sum_{k=1}^{n} S_{i,k} + S_{m,k} + n$

$= 0 + 0 + n = \underline{n}$ par orthogonalité des colonnes de S.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8. On ~~a~~ d'après la 6. n qui est pair

~~Soit $n = 2$: $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$~~

~~fonctionne.~~

On a $\sum_{k=1}^{n} (S_{i,k}+1)(S_{m,k}+1) = n$

~~or $S_{i,k} = 1$ ou -1 et $S_{i,k}$ aussi~~

. Soit $n = 2$, $\sum_{k=1}^{2} (S_{i,k}+1)(S_{m,k}+1) = 2$

$\Leftrightarrow \cancel{(S_{i,1}+1)}\ \cancel{2\times 2 + (S_{i,2}+1)(S_{m,2}+1) = 2}$

$\Leftrightarrow (S_{i,1}+1)(S_{m,1}+1) + (S_{i,2}+1)(S_{m,2}+1) = 2$

11. Soit $A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1}B & \cdots & A_{n,n}B \end{pmatrix}$

or $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$, $A_{i,j} = 1$ ou -1

donc $A_{i,j}B = B$ ou $-B$ qui sont des blocs de Hadamard donc tous les coefficients sont égaux à 1 ou -1.
Aussi, les colonnes de A sont orthogonales 2 à 2 et de B ~~est~~ aussi donc les colonnes de $A \otimes B$ le seront aussi (je n'arrive pas à le prouver) donc $A \otimes B$ est une matrice de Hadamard.

13. import numpy as np.

```
def test_hadamard(M):
    n,p = np.shape(M)
    if n!=p:
        return -2
    else:
        for i in range(0, n):
            for j in range(0,n):
                if (i**2, j**2) != 1:
                    return -1
        for j in range(0, n):
            for k in range(0,n):
                if np.dot(M[:,k] * M[:,j]) != 0
                    return 0
    return 1.
```

14.
```
import numpy.random as rd

def rand_hadam(m, Nmax):
    n = 4 * m
    for tst in range(0,Nmax):
    matpm = np.ones((n,n), dtype = int)
    for i in range(0, n):
        nb_un = 0

        j = 0
        while 2 * nb_un < n and 2*(j - nb_un) < n:
            val = rd.randint(0,2)
            nb_un += val
            matpm[i,j] = 2* val - 1
            j = j + 1
        if (2* nb_un == n):
            for k in range(j, n):
                matpm[i,k] = -1
    if (test_hadamard(matpm) == 1):
```

return M

return np.zeros((n, n), dtype = int).

Partie 2 :

15. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $z = (z_1, \dots, z_n)$.

on a :

- $$< \lambda x + z, y > = \sum_{k=1}^{n} p_k (\lambda x_k + z_k) y_k$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} p_k y_k z_k$$
$$= \lambda < x, y > + < z, y >$$

donc $< . , . >$ est linéaire à gauche.

- $$< y, x > = \sum_{k=1}^{n} p_k y_k x_k = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k y_k = < x, y >$$

donc $< . , . >$ est symétrique.

- $$< x, x > = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k)^2$$ or $p_1, \dots, p_n$ sont positifs

donc $\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k)^2 \geq 0$

par positivité de la somme
donc $< . , . >$ est positive.

- $$< x, x > = 0 = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k)^2 = p_1 (x_1)^2 + \dots + p_n (x_n)^2 = 0$$

or $p_1, \dots, p_n$ sont strictement positifs

donc $(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = 0 \iff x_1 = \dots = x_n = 0$

donc $< . , . >$ est définie positive

Donc $< . , . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. λ

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 15	**Session :** 2024

Épreuve de : Maths HEC/ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

17. $E(V) = \sum_{k=1}^{n} v_k P(V = v_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k p_k$

$= \sum_{k=1}^{n} (u_0)_k v_k p_k = \langle v ; u_0 \rangle$

car $u_0 = (1, \dots, 1)$

~~On V et W indépendantes donc~~
$\cancel{E(VW) = E(V)\,E(W)}$
$\cancel{= \sum_{k=1}^{n} p_k v_k * \sum_{k=1}^{n} p_k w_k}$

$=$

18. On a $\cancel{x_i = a_i(Z_i(w_1), \dots, Z_i(w_n)) + b_i}$

$E(X_i) = \langle x_i, u_0 \rangle$

$\iff E(a_i Z_i + b_i) = 0 = \underline{\langle x_i, u_0 \rangle}$

$\langle x_i, x_i \rangle = E(X_i^2) = V(X_i)$ car $E(X_i) = 0$ d'après Koenig-Huygens

or $V(X_i) = 1$ donc $\underline{\langle x_i, x_i \rangle = 1}$

$\langle x_i, x_j \rangle = E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j)$
car X_i et X_j sont indépendantes
car Z_i et Z_j sont indépendantes
or $E(X_i) = E(X_j) = 0$
donc $\underline{\langle x_i, x_j \rangle = 0}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

20. a) $E(Z)=0$

donc $E(Z)=\sum_{k=1}^{m} P(Z=\alpha_k)\alpha_k = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_1=\beta_1, \dots, \alpha_m=\beta_m$

b) • Soit $Q \in \mathrm{Ker}(T)$,

$T(Q)=(Q(\alpha_1), \dots, Q(\alpha_m))=(0, \dots, 0)$

donc Q admet m solutions alors que $\deg(Q)=m-1$ donc

$Q=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T)=\{0_{\mathbb{R}_{m-1}[x]}\}$

donc T est injectif

or on est en dimension finie car

$T: \mathbb{R}_{m-1}[x] \to \mathbb{R}^m$ donc $\dim(\mathrm{Im}(T))=m$

donc T est bijectif.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(Q,P)\in(\mathbb{R}_{m-1}[x])^2$,

$T(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q(\alpha_1), \dots, \lambda P+Q(\alpha_m))$

$= \lambda(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_m))+(Q(\alpha_1), \dots Q(\alpha_m))$

$= \lambda T(P)+T(Q)$

donc T est une application linéaire

donc T est un ~~endo~~ isomorphisme de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^m$

c)

21. a)

b) On a $l \geq 2$ ~~$\Leftrightarrow l+r \geq r+2$~~

~~or $l+r \leq n-1$~~ On a $r \in [0, l]$

donc $r \leq l$

$\iff r+l \leq 2l \leq n-1$

$\iff l \leq \frac{n-1}{2}$

22. a) Soit $\cancel{X_i}$ $l = n-1$,

$l + r \leq n-1$

$\iff r \leq 0 \iff r = 0$

donc $\#X_i(\Omega) \leq 2$

or $\#X_i(\Omega) \geq 2$ donc $\#X_i(\Omega) = 2$.

b) \

c) ${}^t(MD)\,\cancel{M}D = {}^tD\,{}^tM\,M\,D$

or $({}^tMM)_{i,j} = M_{1,i}M_{1,j} + \dots + M_{n,i}M_{n,j}$

$= \cancel{X_i(\omega_i)X_j(} 0$ si $i \neq j$

Si $i = j$ $({}^tMM)_{i,i} =$

b) On a $E(X_i) = 0$

$= \alpha_i P(X=\alpha_i) + \beta_i P(X=\beta_i)$

$= \alpha_i \theta_i + \beta_i - \beta_i \theta_i = 0$

$\cancel{\iff \alpha_i \theta_i = \beta_i(\theta_i - 1)}$

$\cancel{\iff \beta_i = \alpha_i \frac{\theta_i}{\theta_i - 1}}$

On a aussi $E(X_i^2) = 1$

$\iff \alpha_i^2 \theta_i + \beta_i^2 (1-\theta_i) = 1$

~~$\Leftrightarrow$~~ $\Big\{$ donc vérifions que

$\alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}$ et $\beta_i = -\frac{1}{\alpha_i}$ fonctionnent

$\alpha_i \theta_i + \beta_i - \beta_i \theta_i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_i \theta_i - \frac{1}{\alpha_i} + \frac{\theta_i}{\alpha_i} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_i \theta - \frac{(1-\theta)}{\alpha_i} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}\, \theta_i - \frac{(1-\theta_i)}{\sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}} = 0$

~~$\Leftrightarrow \sqrt{\theta_i - \theta_i^2} - \sqrt{\theta_i} = 0$~~

$\Leftrightarrow \underline{\sqrt{(1-\theta_i)\theta_i} - \sqrt{(1-\theta_i)\theta_i} = 0}$

donc $\underline{\alpha_i = \sqrt{\frac{1-\theta_i}{\theta_i}}}$ et $\underline{\beta_i = -\frac{1}{\alpha_i}}$

Partie 3 :

23. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{n^2})$
et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{n^2})$

$\varphi(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \left[(\lambda x + y)_{\cancel{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}\ (i-1)n+j} \right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$

~~$= \lambda [(x)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}] + [y_{(}$~~

$= \lambda [x_{(i-1)n+j}] + [y_{(i-1)n+j}]$

par somme de matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$

$= \lambda \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$

donc $\underline{\varphi \text{ est une application linéaire}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 15

Session : 2024

Épreuve de : Maths HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

24. On a $Tr({}^tA\,A) = ({}^tAA)_{1,1} + \dots + ({}^tAA)_{n,n}$

$= (A_{1,1}A_{1,1} + A_{1,2}A_{1,2} + \dots + A_{1,n}A_{1,n}) + \dots + (A_{n,1}A_{n,1} + \dots + A_{n,n}A_{n,n})$

$= \sum_{k=1}^{n} (A_{1,k})^2 + \dots + \sum_{k=1}^{n} (A_{n,k})^2$

$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (A_{j,k})^2 = \sqrt{\langle A, A\rangle}^2 = \underline{\|A\|^2}$

25. $F(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}| \geq \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\right|$

26.

27.

28. Soit $\left|F(\varphi(x)) - F(\varphi(y))\right| \leq n\|x-y\|$

29.

32. On $F(Q) = n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2}\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}}S(Q)\|^2$.

or $\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}}S(Q)\|^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}}S(Q)\|^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow n\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2}\|Q - \frac{1}{\sqrt{n}}S(Q)\|^2 \leq n\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow \underline{F(Q) \leq n\sqrt{n}}$ donc $\max F(Q) \leq n\sqrt{n}$

$\Leftrightarrow \underline{M_n^+ \leq n\sqrt{n}}$

34. Soit $U(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow {}^tU(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$

or on cherche $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que ${}^tUU = I_n$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2+2\beta^2 & 2\alpha\beta-\beta^2 & -\beta^2+2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta-\beta^2 & \alpha^2+2\beta^2 & -2\alpha\beta+\beta^2 \\ 2\alpha\beta-\beta^2 & \beta^2-2\alpha\beta & \alpha^2+2\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+2\beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} +\beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \\ 2\beta^2 + \alpha^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \\ \alpha^2 + 4\alpha\beta = 1 \end{cases}$

Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow \beta = 2\alpha \\ 9\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Si $\alpha = 0$ Impossible car $\alpha^2+4\alpha\beta = 1$

$\Leftrightarrow$ Si $\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou -1

Donc $\underline{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), (1,0), (-1,0)}$ fonctionnent

or $M_3^+ \leq 3\sqrt{3}$ car 3 n'est pas un multiple de 4