POITREAU

LOÏC

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOÏC

20 / 20

Ecricome Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 09

Numéro de table 073

~~$\mathcal{J}_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$~~

$$I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + n(I_n)(A)$$

or $\lim_{A \to +\infty} -\frac{A^n}{e^A} = 0$

d'où $I_{n+1}(A) = n(I_n(A)$

$\underline{I_{n+1} = n\mathcal{J}_n}$ car $\mathcal{J}_n$ converge en $+\infty$ d'après q.5

7) $I_{n+1} = n I_n$

$$I_n = \frac{1}{n} I_{n+1}$$

J'admets le résultat

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Partie 3

81 - f_n est continue par morceaux sauf peut être en 0

- $\forall x \leq 0,\ f_n(x) = 0 \geq 0$

- $\forall x \geq 0,\ \frac{1}{(n-1)!} \geq 0\ ,\ x^{n-1} \geq 0$ et $e^{-x} \geq 0$

donc $f_n(x) \geq 0$

- Donc $f_n(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$

- $\forall x \leq 0,\ \int_{-\infty}^{0} f_n(x) = 0$

et $\forall x \geq 0,\ \int_0^x f_n(x)dx = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-1}$

$= \frac{1}{(n-1)!} I_n(A)$

$= \frac{1}{(n-1)!} (n-1)! = \boxed{1}$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx + \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$

$= 0 + 1$

$= \boxed{1}$

- <u>Donc f est une densité de probabilité</u>

a) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$

$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

$= \frac{1}{(n-1)!} \quad I_{n+1}$

$= \frac{1}{(n-1)!} \quad n I_n$

$= \frac{1}{(n-1)!} \quad n\,(\cancel{n}\,n-1)!$

$= \cancel{n}\ \boxed{n}$

b) $E(X^2) = \cancel{\int_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\,dx$

$= \int_0^{+\infty} x^{n+1} f_n(x)\,dx$

$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1}\, e^{-x}$

$= \frac{1}{(n-1)!} \quad I_{n+1}$

$= \frac{1}{(n-1)!} \quad (n!)$

$= n$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$=$

b) $F_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k$

donc $E(F_N) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k\right)$

$= \frac{1}{N} \times N \times E(Y_k)$

$= E(Y_k) = \boxed{m}$

$V(F_N) = V\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} Y_k\right)$

$= \frac{1}{N^2} N \, V(Y_k)$ par independance de Y

$= \frac{1}{N} \times m$

c) $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

$= P(|F_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{m}{N\varepsilon^2}$

d) $m = \cancel{100}\ 3$

donc $\frac{m}{N\varepsilon^2}$ est un majorant de $P(|F_n - m| \geq \varepsilon)$

e) $P(|F_{10} - 10| \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{3}{600 \frac{1}{100}}$

$P(|n - 10| \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{3,}{6}$

$P(|n - 10|) \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{1}{2}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOIC

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table 073

Exercice 3
Partie 1

1)a) $f(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \underline{1}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \underline{1}$ car $\lambda = 1$

b)
$F(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $P(T \leq 3) = F(3) = \underline{1 - e^{-3}}$

d) $P_{(T \geq 1)}(T \geq 2) = P(T \geq 2)$
$= 1 - P(T \leq 2)$
$= 1 - (1 - e^{-2})$
$= \underline{e^{-2}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2)a) $f_U = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [0,1] \\ \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [0,1] \end{cases}$

$F_U = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $P(X \leq x) = P(-\ln(U) \leq x)$
$= P(\ln(U) \geq -x$
$= P(U \geq e^{-x})$

c) $P(X \leq x) = 0$
car d'apres la fonction de repartition de U $\forall x \leq 0$
$F_U = 0$

Partie 2

3(a) $I_1(A) = \int_0^A e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^A = -e^{-A} + 1$

b) $\lim_{A \to +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$

Donc I_1 converge et vaut 1

4) $I_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x}\,dx$

on pose $u'(x) = e^{-x}$ $u(x) = -e^{-x}$

$v(x) = x^n$ $v'(x) = n x^{n-1}$

Donc $I_{n+1}(A) = [x^n - e^{-x}]_0^A + \int_0^A e^{-x} n x^{n-1}\,dx$

$$= A^n - e^{-A} + n\, I_n(A)$$

$$= -A^n \frac{1}{e^A} + n\, I_n(A)$$

5) $I_{n+1} - I_n = \int_0^A x^n e^{-x}\,dx - \int_0^A x^{n-1} e^{-x}\,dx$

$$= \int_0^A x^n e^{-x}(1 - x^{-1})\,dx$$

$$= \int_0^A x^n e^{-x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)dx$$

or $\forall x \in [0,A]$, $1 - \frac{1}{x} \geq 0$

et $x^n e^{-x} \geq 0$

donc en intégrant entre 0 et A $I_{n+1} - I_n \geq 0$

$I_{n+1}(A) \geq I_n(A)$

Donc $I_n(A)$ est decroissante et d'après le theoreme des gendarmes si $I_n(A)$ admet une limite finie

$I_{n+1}(A)$ admet egalement une limite finie

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, On note $p(n)$: $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \underbrace{n}_{\text{un entier finie}}$

pour $n = 1$ on a

$I_1(A) = 1$ et 1 est une limite finie

<u>donc P(1) est vraie.</u>

On suppose qu'à un certain rang n on a

$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = p = I_n$

Verifions $\int_0^{+\infty} x^{n} e^{-x} dx = p = I_{n+1}$

Or $I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + n\,\mathcal{I}_n(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} n$

<u>Donc P(n) entraine P(n+1)</u>

<u>Conclusion</u> : P(1) est vraie, P(n) est heredetaire et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n converge

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOIC

20 / 20

Écricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table C73

11)

$g(x) = \frac{1}{n} = g(U_n)$

et $g(1) = e - e^{-1}$

$= 2,7 - 0,4$

$= 2,3 \geq 0$

ainsi $g(u_1) = 1$

d'où $g(0) \leq g(u_1) \leq g(1)$

$0 \leq u_1 \leq 1$ par la monotonie de g

13/a)

b) Un est decroissante et minoré par 0 donc elle converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

14) c) On peut émettre que U_n converge vers σ en $+\infty$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOÏC

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 073

(c) donc $\forall x \leq 0$, $g(x) - 2x \leq 0$

$g(x) \leq 2x$

$\forall x \geq 0$ $\quad g(x) - 2y \geq 0$

$\underline{g(x) \geq 2x}$

6) a) $f(x) - g(x) = e^{x} + e^{-x} - e^{x} + e^{-x}$

$\underline{= e^{-x} + e^{-x}}$

et exponentielle est toujours positif donc par produit

$e^{-x} + e^{-x} \geq 0$

$2e^{-x} \geq 0$

donc $f(x) - g(x) \geq 0$

$\underline{f(x) \geq g(x)}$

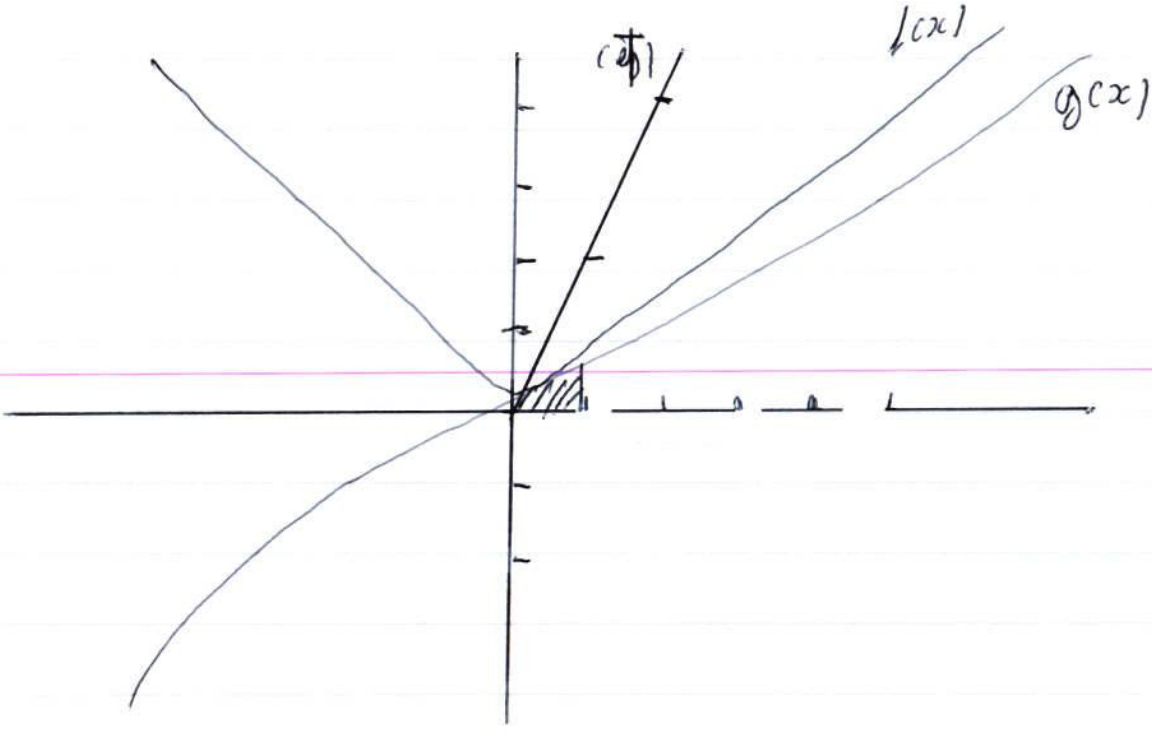
NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) On en deduit que la courbe Cf est au dessus de Cg

7)



8) b) $\int_0^1 f(x)\,dx = [e^x - e^{-x}]_0^1 = e^1 - e^{-1} - 1 + 1$
$= e^1 - \frac{1}{e}$

l'air de la courbe f entre 0 et 1 est $e^1 - \frac{1}{e}$

~~9) a) $f'(x) = -2x$~~

~~b) $f(x) - 2 - x^2 =$~~

9) a) $h'(x) = f'(x) - 2x$

$= e^{x} + e^{-x} - 2x$

Or on a vue que f etait convexe donc au dessus de toutes ces tangentes

ainsi $f(x) - 2 - x^2 \geq 0$

$f(x) \geq 2 + x^2$

c) $h'(x) = g'(x) - 2 - x^2$

$= e^{x} + e^{-x} - 2 - x^2$

d) $\forall x \leq 0$, $g(x)$ est concave donc ~~au dessus de~~ en dessous de ces tangentes

d'ou $g(x) - (2x - \frac{1}{3}x^3) \leq 0$

$g(x) \leq 2x + \frac{1}{3}x^3$

$\forall x \geq 0$, $g(x)$ est convexe donc au dessus de ces tangentes

ainsi $g(x) - (2x + \frac{1}{3}x^3) \geq 0$

$g(x) \geq +2x + \frac{1}{3}x^3$

Partie 2

1c)- $g(x)$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$,

$-\frac{1}{n} \in g(]-\infty;+\infty[)$

-Donc d'après le theoreme de bijection $g(x) = \frac{1}{n}$

admet une unique solution noté U_n

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $u_n \geq 0$

pour $n = 1$ on a :

$0 \leq u_1 \leq 1$

donc $P(1)$ est vraie

On suppose $U_n \geq 0$: Verifions $U_{n+1} \geq 0$

or $g(U_n) = \frac{1}{n}$

donc $g(U_n) \geq 0$ et $U_n \geq 0$

donc et $\forall x \geq 0$, $g \geq 0$

J'admets $u_n \geq 0$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOIC

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/09

Numéro de table C73

Exercice 2

1) de la forme $u(x) + v(x) = v'(x) + u'(x)$

$u(x) = e^{x}$ $\quad$ $u'(x) = e^{x}$

$v(x) = e^{-x}$ $\quad$ $v'(x) = -e^{-x}$

d'où $f'(x) = e^{x} - e^{-x} = g(x)$

pour $g'(x)$:

$u(x) = e^{x}$ $\quad$ $u'(x) = e^{x}$

$v(x) = -e^{-x}$ $\quad$ $v'(x) = e^{-e}$

$g'(x) = u'(x) + v'(x) = e^{x} + e^{-x} = f(x)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2)a) $\lim_{x\to-\infty} e^{x}-e^{-x} = -\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x} - e^{-x} = +\infty$

car $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

3)~~a~~)

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

car $g'(x)$ et une somme de deux fonction exponentielle et $e^{x} \geq 0$

donc $e^{x} + e^{-x} \geq 0$

3)a) - $g(x)$ et strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$

- $0 \in f(]-\infty;+\infty[)$

- Donc d'après le théorème de bijection $g(x)=0$ admet une unique solution notée α.

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

cc) $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$

donc

	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

d) $f'(x) = e^x - e^{-x}$

$f''(x) = e^x + e^{-x}$

D. $e^x \geq 0$ car la exponentielle est toujours positif

$e^{-x} + e^x \geq 0$

$f''(x) \geq 0$

Donc f est convexe

5) $y = g'(0)(x-0) + g(0)$

~~f(0) = 0~~ $\quad g(0) = 2$

~~et f(0) = x~~ $\quad g'(0) = 0$

donc $y = 2x$

(b) $g(x) - y = e^{x} - e^{-x} - 2x$

Cependant ~~f~~ $g''(x) = f'(x)$

et $\forall x \leq \alpha$, $f'(x) \leq 0$

$\forall x \geq \alpha$, $f'(x) \geq 0$

Donc $\forall x \leq \alpha$, $g''(x) \leq 0$ donc en dessous de toutes ces tangentes car concave

et $\forall x \geq \alpha$, $g''(x) \geq 0$ donc au dessus de toutes ces tangentes car convexe

d'où

	$-\infty$ $\quad\quad$ α	$+\infty$
$g(x)-y$	$-$	$+$
	~~f~~ $g(x) \leq y$	$g(x) \geq y$
	g est en dessous de la droite y	g est au dessus de la droite y

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOÏC

écricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 09

Numéro de table 073

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $p(n)$: $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

pour $n=1$ on a

$C_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{5^{1-1}} M^{1-1} C_1 = C_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

donc $P(1)$ est vraie.

On suppose $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

Vérifions $C_{n+1} = \frac{1}{5^{n}} M^{n} C_1$

Or $C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n = \frac{1}{5} M \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

$= \frac{1}{5} M M^{n-1} C_1$

$= \frac{1}{5} M^n C_1$

Donc $P(n)$ entraine $P(n+1)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Conclusion : P(1) est vraie, P(n) est hereditaire et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c)

$$C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^{n} & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^{n} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n}-2^{n} & 5^{n}-2^{n} & 5^{n-1}+2^{n} \end{pmatrix}$$

donc $P(X_n=1) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1}+2^{n})$

$P(X_n=2) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1}-2^{n-1})$

$P(X_n=3) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n}-2^{n})$

11/a) $E(X_n) = \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} (5^{n-1}+2^{n}) + 2 \frac{1}{5^{n-1} \times 3} (5^{n}-2^{n})$

$+ \frac{1}{5^{n-1}} (5^{n}-2^{n})$

$= \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3} (5^{n-1}+2 + 2\times 5^{n} - 2^{n+1} + 3\times 5^{n} - 3\times 2^{n})$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3} = 0$ car $-1 < \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 1$

Donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = 0$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom POITREAU

Prénom (s) LOÏC

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 073

Partie 2

8)a) $P(X_1=1)=1$ donc la probabilité que le chat soit dans la même maison en X_2 est de $\frac{3}{5}$ d'où $\underline{P(X_2=1)=\frac{3}{5}}$

Enfin il sera dans la maison deux ou trois de façon equiprobable

d'où $\underline{P(X_2=2)=\frac{1}{5}}$ et $\underline{P(X_2=3)=\frac{1}{5}}$

b) $E(X) = 1\times\frac{3}{5} + 2\times\frac{1}{5} + 3\times\frac{1}{5}$

$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

$= \boxed{\frac{8}{5}}$

NE RIEN ÉCRIRE

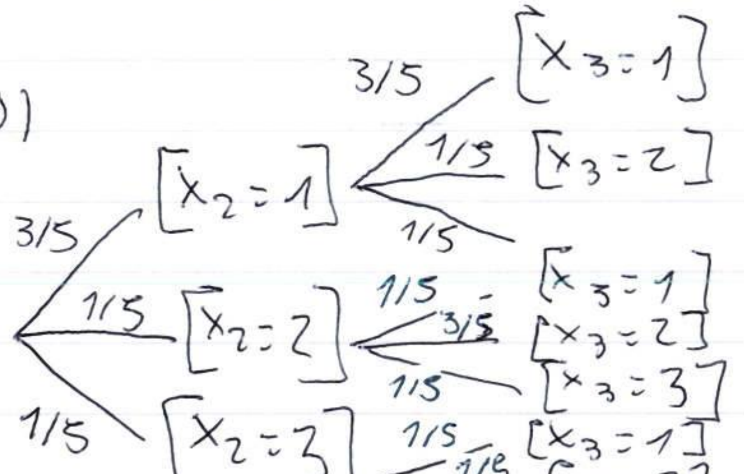
DANS CE CADRE

20 / 20

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5}$$
$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5}$$
$$= \frac{16}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \frac{16}{5} - \frac{64}{25}$$
$$= \frac{80 - 64}{25}$$
$$= \underline{\frac{16}{25}}$$

9)



$\{X_2 = 1 ; X_2 = 2 ; X_2 = 3\}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales ;

$$P(X_3=1) = P(X_2=1 \cap X_3=1) + P(X_2=2 \cap X_3=1) + P(X_2=3 \cap X_3=1)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{9}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25}$$

$$= \boxed{\frac{11}{25}}$$

$$P(X_3=2) = P(X_2=1 \cap X_3=2) + P(X_2=2 \cap X_3=2) + P(X_2=3 \cap X_3=2)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{1}{25}$$

$$= \boxed{\frac{7}{25}}$$

De façon analogue $P(X=3) = \frac{7}{25}$

$$P_{(X_3=3)}(X_2=2) = \frac{P_{(X_2=2)}(X_3=3) \times P(X_3=3)}{P(X_3=2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{7}{25}}{\frac{7}{25}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

10)a) $C_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \\ P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}$

Or $\{[X_n=1];[X_n=2];[X_n=3]\}$ forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales

$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=1) \times P(X_{n+1}=1) + P(X_n=2) \times P(X_{n+1}=1)$

$+ P(X_n=3) \times P(X_{n+1}=1)$

$$= \underline{\frac{3}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=1)}$$

De façon analogue

$$\underline{P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{3}{5} P(X_n=2) + \frac{1}{5} P(X_n=3)}$$

$$\underline{P(X_{n+1}=3) = \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=2) + \frac{3}{5} P(X_n=3)}$$

et $\frac{1}{5} MC_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}$

$$= \underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=2) + \frac{1}{5} P(X_n=3) \\ \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{3}{5} P(X_n=2) + \frac{1}{5} P(X_n=3) \\ \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=2) + \frac{3}{5} P(X_n=3) \end{pmatrix}}$$

$= C_{n+1}$

Donc $\underline{C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom P O I T R E A U

Prénom (s) L O Ï C

20 / 20

écricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 09

Numéro de table 073

Exercice 1

1/a)

$$M-2I=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=J}$$

b)

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$J^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=\underline{3J}$$

c)

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&7&7\\7&11&7\\7&7&11\end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Donc } M^2=7J+4I}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

(d) $7M - 10I = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} = \underline{M^2}$

(a) $M^2 = 7M - 10I$

$\Leftrightarrow M^2 - 7M + 10I = 0$

Donc R(x) et un polynome annulateur de M

$\cancel{(b)\ \Delta = 49 - 40 = 9}$

$\cancel{\text{donc } x_1 = \frac{-b - \sqrt{9}}{2a} = \frac{-1-3}{2} = -2}$

$\cancel{\text{et } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1}$

b) $R(2) = 4 - 14 + 10 = 0$

Donc 2 et une racine de R

$\Delta = 49 - 40 = 9$

$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$

Donc 5 et egalement une racine de R.

(c) Les valeurs propres possible de M sont 2 et 5

3)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$$

Donc U est un ~~pr~~ vecteur propre $\neq 0$ associé à la valeur propre 5

4)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{2V} \quad \text{et } MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{2W}$$

Ce qui prouve que les vecteurs propres V et W sont des vecteurs propres de M associés à la valeur propre 2.

5)a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Donc Q est inversible et $Q^{-1} = \frac{1}{3} P$

(b) $\cancel{QP = 3I}$

$\cancel{QPP^{-1} = 3IP^{-1}}$

$\cancel{Q = 3}$

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

c)

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

<u>D'où $PD = MP$</u>

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

pour $n = 0$ on a :

$M^0 = I_3$ et $\frac{1}{3} P D^0 Q = \frac{1}{3} PQ = \frac{1}{3} 3I = I_3$

Donc $P(0)$ est vraie

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom P O I T R E A U

Prénom (s) L O Ï C

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 073

On suppose qu'à un certain rang n on a $M^n = \frac{1}{3} PD^n Q$

Verifions $M^{n+1} = \frac{1}{3} PD^{n+1} Q$

Or $\cancel{M^n \times M = \frac{1}{3} PD^n QM}$

$\cancel{= \frac{1}{3} PD^n QPDP^{-1}}$ ~~car PD~~

Or $M \times M^n = M \frac{1}{3} PD^n Q$

$= PDP^{-1} \frac{1}{3} PD^n Q$ car $PD = MP \Leftrightarrow PDP^{-1} = M$

$= PD \frac{1}{3} I D^n Q$

$= \frac{1}{3} PD^{n+1} Q$

Donc $P(n)$ entraine $P(n+1)$

Conclusion : $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est hereditaire et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n \frac{1}{3} PD^n Q$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Partie 2

6) a) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5(a_{n+1})+b_{n+1}}{5a_n+b_n} = \frac{5(7a_n+b_n)-10a_n}{5a_n+b_n}$

$= \frac{25a_n+5b_n}{5a_n+b_n} = \frac{5(5a_n+b_n)}{5(a_n+\frac{1}{5}b_n)}$

$= \frac{\cancel{5}a_n+b_n}{a_n+b_n} \times 5$

$= \boxed{5}$

Donc U_n est une suite géométrique de raison 5

$u_0 = 5a_0 + b_0 = 1$

Donc $U_n = (5)^n$

b) $V_{n+1} = -2a_{n+1} - b_{n+1}$

$= -2(7a_n + b_n) + 10a_n$

$= -14a_n - 2b_n + 10a_n$

$= \cancel{-14} - 4a_n - 2b_n$

Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-4a_n - 2b_n}{-2a_n - b_n} = \frac{2(-2a_n - b_n)}{-2a_n - b_n} = 2$

Donc V_n est une suite géométrique de raison 2

$v_0 = -1$

donc $v_n = -(2)^n$

c) $\begin{cases} u_n = 5a_n + b_n \\ v_n = -2a_n - b_n \end{cases}$

$L1+L2$ $\begin{cases} U_n + v_n = 3a_n \\ v_n = -2a_n - b_n \end{cases}$

D'où $U_n + v_n = 3a_n$

$\frac{1}{3}(U_n + v_n) = a_n$

$\frac{1}{3}(5^n - 2^n) = a_n$

et $U_n - 5a_n = b_n$

$U_n - \frac{5}{3}(5^n - 2^n) = b_n$

$(5)^n - \frac{1}{3}(5^{n+1} - 5 \times 2^n) = b_n$

$= \frac{1}{3}(3 \times 5^n - 5^{n+1} + 5 \times 2^n)$

$= \frac{1}{3}(5^n(3-5) + 5 \times 2^n) = \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $M^n = a_n M + b_n I$

pour $n = 0$ on a

$M^0 = I_3$ et $a_0 M + b_0 I = I_3$

Donc $P(0)$ est vérifié.

On suppose qu'à un certain rang n on a $M^n = a_n M + b_n I$

Vérifions $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

Or $\cancel{M^{n+1} = (a_n M + b_n I)}$

J'admets la récurrence :

$$7) M^n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5\times 2^n - 2\times 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 5\times 2^n - 2\times 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 5\times 2^n - 2\times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$