ADAM

Note de délibération : 19.93 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 11

Numéro de table 003

Exercice 1 :

~~1) On a :~~

~~$E_{0_3} = \{ O_3 M + M O_3 = O_3 \mid M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}$~~

~~$= \{ O_3$~~

1) On résout, avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$O_3 M + M O_3 = O_3 \iff O_3 = O_3$$

Donc on a directement :

$$\boxed{E_{0_3} = \{ M , M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

On résout, avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$I_3 M + M I_3 = 0_3 \iff 2M = 0_3$

$\iff M = 0_3$

Donc $E_{I_3} = \{0_3\}$

2) On a :

. $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition

. $0_3 M + M 0_3 = 0_3$ (d'après 1))

Donc $0_3 \in E_C$

. Montrons que E_C est stable par combinaison linéaire

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $M, N \in E_C$, on a :

$C(\alpha M + \beta N) + (\alpha M + \beta N)C = \alpha CM + \beta CN + \alpha MC + \beta NC$

$$= \alpha CM + \alpha MC + \beta CN + \beta NC$$

$$= \alpha(CM + MC) + \beta(CN + NC)$$ N et C $\in E_C$

$$= \alpha O_3 + \beta O_3$$

$$= O_3$$ Donc E_C est stable par combinaison linéaire

D'où d'après le principe de la caractérisation en trois points E_C est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ ~~(E_C étant~~.

3) Soit $M \in E_A$, on a :

$$AM + MA = O_3$$

$$\Rightarrow {}^t(AM + MA) = {}^tO_3$$

linéarité de la transposition

$$\Rightarrow {}^t(AM) + {}^t(MA) = O_3$$

$$\Rightarrow {}^tM\,{}^tA + {}^tA\,{}^tM = O_3$$

A est symétrique donc égale à sa transposée

$$\Rightarrow {}^tM A + A\,{}^tM = O_3$$

$$\Rightarrow A\,{}^tM + {}^tMA = O_3$$

D'où : ${}^tM \in E_A$

4a) A est symétrique. Donc A est diagonalisable d'après le théorème spectral

4b) Soit $N \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes, avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

N est valeur propre de A $\Leftrightarrow$ Il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AX = NX$

On résout alors, avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{R}$:

$$AX = NX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x + 2z = Ny \\ 2y - z = Nz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x + 2z = Ny \\ 2y = N(z+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x + 2z = N^2 \times \frac{(z+1)}{2} \\ y = \frac{N(z+1)}{2} \end{cases}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) ADAM

Signature

19.93 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 11

Numéro de table 003

$$(\Leftrightarrow)\ \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x = N^2\left(\dfrac{z+1}{2}\right) - 2z \\ y = \dfrac{N}{2}(z+1) \end{cases}$$

$$\cancel{(\Leftrightarrow)\ \begin{cases} x = N^2 z \\ y = \dfrac{N}{2}(z+1) \end{cases}}$$

$$(\Leftrightarrow)\ \begin{cases} -\dfrac{N^2}{4}z - \dfrac{N^2}{4} + z - N(z+1) = -\dfrac{N^3}{4}z - \dfrac{N^3}{4} + Nz \\ x = -\dfrac{N^2}{4}z - \dfrac{N^2}{4} + z \\ y = \dfrac{N}{2}(z+1) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow)\ \begin{cases} \dfrac{N^3}{4}z + \dfrac{N^3}{4} - \dfrac{N^2}{4}z - \dfrac{N^2}{4} - 2Nz + z - N = 0 \\ x = -\dfrac{N^2}{4}z - \dfrac{N^2}{4} + z \\ y = \dfrac{N}{2}(z+1) \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow)\ \begin{cases} z\left(\dfrac{N^3}{4} - \dfrac{N^2}{4} - 2N\right) = \dfrac{N^3}{4} - \dfrac{N^2}{} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

Sans suite

On admet l'équivalence suivante :

N est valeur propre de $A \Rightarrow N^3 - 9N = 0$

Comme on a :

$$N^3 - 9N = 0 \iff N(N^2 - 9) = 0$$

$$\iff N(N-3)(N+3) = 0$$

On en déduit que 0, 3 et -3 sont les uniques valeurs propres possibles de A.

D'où $Sp(A) \subset \{0; -3; 3\}$

4c) On résout, avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = 0X \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Il existe bien $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AX = 0X$.

Donc 0 est valeur propre de A et on a :

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$$

Libre (formée d'un vecteur non nul) et génératrice de $E_0(A)$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $E_0(A)$

De même, on a, avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3x \\ -2x + 2z = 3y \\ 2y - z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x + 2z = -3x \\ -2x = 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z \\ 6z = 6z \\ x = -2z \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$$

Comme ce qui précède on déduit que 3 est bien valeur propre de A et on a :

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Libre et génératrice de $E_3(A)$ la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(A)$.

De même, on a, avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = -3X \iff \begin{cases} x - 2y = -3x \\ -2x + 2z = -3y \\ 2y - z = -3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ -2x + 2z = -6x \\ 4x = -2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ x = x \\ z = -2x \end{cases}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 11

Numéro de table 003

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix}$$

De manière analogue à ce qui précède, on déduit que -3 est en effet valeur propre de A et on a :

$$\boxed{E_{-3}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$$

Libre et génératrice de $E_{-3}(A)$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-3}(A)$.

Comme A est diagonalisable d'après 4a), on sait par théorème que A est semblable à une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que A s'écrit, avec $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible :

$$A = PDP^{-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow D = P^{-1}AP}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

D'après ce qui précède, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) On calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc $P^2 = 9 I_3$.

Comme P est inversible, on a :

$$P^2 = 9 I_3$$

$$\Rightarrow P = 9 P^{-1}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{9} P$$

6a) On a les équivalences suivantes ; avec $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$N \in E_D \iff DN + ND = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{cases} -3a - 3a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3c + 3c = 0 \\ -3d = 0 \\ 0 = 0 \\ 3f = 0 \\ 3g - 3g = 0 \\ 3h = 0 \\ 3i + 3i = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = d = f = h = i = 0 \\ c = c \\ e = e \\ g = g \end{cases}$$

$$\boxed{N \in E_D \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

6b) On a alors :

$$E_D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} , g, e, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_D = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Liberté ? Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted]

Signature

Nom [redacted]

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 11

Numéro de table 003

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Libre et génératrice de E_D, la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_D

Et en particulier, on a : $\dim(E_D) = 3$

7a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes :

$M \in E_A \Leftrightarrow AM + MA = 0_3$

$\Leftrightarrow P^{-1}(AM + MA)P = P^{-1}0_3P$

$\Leftrightarrow P^{-1}AMP + P^{-1}MAP = 0_3$ d'après 4c), $A = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1})MP + P^{-1}M(PDP^{-1})P = 0_3$ $P^{-1}P = I_3$

$\Leftrightarrow DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = 0_3$ d'après l'énoncé

$\Leftrightarrow DN + ND = 0_3$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$\boxed{M \in E_A \Leftrightarrow N \in E_D}$$

7b) On a alors d'après 6b), successivement ; car on a :

$$N = P^{-1} M P \Rightarrow M = P N P^{-1}$$

$$E_A = \left\{ AM + MA = O_3 \mid M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$$

$P^{-1} = \frac{1}{9} P$ d'après 5) et $\frac{1}{9} \neq 0$

$$\boxed{E_A = \mathrm{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}P \right)}$$

8) On résout, avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$(A+M)^2 = A^2 + M^2 \Leftrightarrow (A+M)(A+M) = A^2 + M^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2$$

$$\Leftrightarrow AM + MA = O_3$$

Ainsi, l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(A+M)^2 = A^2 + M^2$ est : E_A.

9) $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

Admis

Exercice 2 :

1a) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t > 0$, on a :

$$\frac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$ par croissances comparées

Il vient alors :

$$t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

De plus, $\forall t \geq 1$, on a $t^n e^{-t} \geq 0$ et $\frac{1}{t^2} \geq 0$.

D'après le cours, on sait également que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ (d'après le cours).

D'où : par critère de comparaison (par négligeabilité) d'intégrales à fonctions positives, il vient que :

$$\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \text{ est convergente.}$$

$t \mapsto t^n e^{-t}$ étant continue sur le segment $[0, 1]$, il vient finalement que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \text{ est convergente } (\forall n \in \mathbb{N})}$$

1B) On calcule, avec $A > 0$:

$$\int_0^A e^{-t}\,dt = -\left[e^{-t}\right]_0^A$$

$$= -(e^{-A} - e^0)$$

$$\int_0^A e^{-t}\,dt = 1 - e^{-A}$$

Or, $e^{-A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par composition
*

D'où : on a : *[Donc $1 - e^{-A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$]

$$\boxed{I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 11

Numéro de table 003

Signature

On pose u et v de classe C^1 sur $[0;A]$ (où $A \geq 0$) telles que :

$$u(t) = t \rightsquigarrow u'(t) = 1$$

$$v'(t) = e^{-t} \rightsquigarrow v(t) = -e^{-t}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^A t e^{-t}\,dt = \left[-t e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}\,dt$$

$$= -Ae^{-A} - \left[e^{-A}\right]_0^A$$

$$= -Ae^{-A} - (e^{-A} - e^{0})$$

$$\int_0^A t e^{-t}\,dt = 1 - e^{-A} - Ae^{-A}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

Or, on a :

· $Ae^{-A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

$e^{-A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par composition

D'où : on a :

$$\boxed{I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt = 1}$$

2) $\forall x > 0$, on a :

$$\frac{\frac{e^{-t}}{1+xt}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t^2 e^{-t}}{xt} = \frac{t^2 e^{-t}}{x}$$

Or, $\frac{t^2 e^{-t}}{x} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ (CC car $x > 0$)

Et, si $x = 0$, on a :

$$\frac{\frac{e^{-t}}{1+xt}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc, dans tous les cas, on a :

$$\frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\forall t \geq 1$, $\frac{e^{-t}}{1+xt}$ est continue (le dénominateur ne s'annulant pas) et positive (car $x \geq 0$). De plus, $\forall t \geq 1$, $\frac{1}{t^2} \geq 0$

Or, d'après le cours, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Donc, par critère de ~~négligeabilité~~ comparaison (par négligeabilité) d'intégrales à fonctions positives,

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt$ converge

$t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ étant continue sur le segment $[0,1]$ (le dénominateur ne s'annulant pas), il vient alors que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt \text{ converge}}$$

3) On a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0\times t}\, dt$$

$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$

$\Big\downarrow$ d'après 1b)

$= I_0$

$\boxed{F(0) = 1}$

4) Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x \leq y$; on a :

$x \leq y$

$\Big\downarrow t \geq 0$

$\Rightarrow tx \leq ty$

$\Rightarrow 1 + tx \leq 1 + ty$

$\Big\downarrow$ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$ et $1+tx, 1+ty \in]0; +\infty[$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+tx} \geq \dfrac{1}{1+ty}$

$\Big\downarrow e^{-t} > 0, \forall t \in [0; +\infty[$

$\Rightarrow \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \geq \dfrac{e^{-t}}{1+ty}$

$\Big\downarrow$ croissance de l'intégrale et les intégrales étant convergentes d'après 2)

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+ty}\,dt$

$\Rightarrow \boxed{F(y) \leq F(x), \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 11

Numéro de table 003

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, comme on a :

$$x \leq y \Rightarrow F(y) \leq F(x)$$

On déduit que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5a) Si $x=0$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+0} dt = \int_0^1 1\, dt$$

$$= [t]_0^1$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+0\times t} dt = 1}$$

Si $x>0$, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+tx} dt \quad (\text{car } x>0)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$= \frac{1}{x}\left[\ln(|1+tx|)\right]_0^1$$ $1+tx>0$ sur $x>0$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln(1+1\times x) - \ln(1\times 0\times x)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \ln(1)\right)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{\ln(1+x)}{x}, \text{ si } x>0}$$

5b) $\forall x \geq 0$ et $\forall t \in [0;1]$, on a :

$$t \geq 0$$

$$\Rightarrow -t \leq 0$$ $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{-t} \leq 1$$ $1+xt>0$ $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$ or $\frac{e^{-t}}{1+xt} \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt, \forall x \geq 0$$

(croissance de l'intégrale)

5c) $\forall x > 0$ et $\forall t \geq 1$, on a :

$t \geq 1$

$\Rightarrow t - 1 \geq 0$ $\quad \Big\downarrow x > 0$

$\Rightarrow x(t-1) \geq 0$ $\quad \Big\downarrow$ or $-1 < 0$

$\Rightarrow x(t-1) \geq -1$

$\Rightarrow xt - x \geq -1$

$\Rightarrow 1 + xt \geq x$ $\quad \Big\downarrow$ $t \mapsto \frac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{x} > 0$ et $\frac{1}{1+xt} > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$ $\quad \Big\downarrow e^{-t} > 0 \ \forall t \geq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$

(les intégrales étant convergentes et par croissance de l'intégrale) $\Rightarrow 0 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$

$\forall x > 0$,

5d) On a, $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,dt$$

$$F(x) = \int_0^{1} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,dt$$

Il vient d'après 5b) et 5c), en sommant les deux inégalités :

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt + \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt + \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{d'après 5a) sur } x>0$$

On a :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 11

Numéro de table 003

$$= \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \quad \text{(propriété du logarithme)}$$

Or, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

Donc, par somme, il vient alors que :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

De plus, $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ étant convergente, il vient nécessairement que :

$$\frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Donc $\frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt + \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'où : d'après le théorème d'encadrement pour les fonctions, on a, d'après ce qui précède :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$\boxed{F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$$

6) Soit $x \geq 0$, on a :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt$$

les intégrales étant toutes convergentes, par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1-(1-xt)(1+xt)}{1+xt}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1-(1-(xt)^2)}{1+xt}\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{x^2t^2}{1+xt}\,dt$$

$$\boxed{F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,dt}$$

6b) D'après 6a), on a :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

$$\Rightarrow F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt + x\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

$$\Rightarrow F(x) - I_0 + xI_1 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

~~Or, on a, d'après 5c), $\forall t \geq 1$:~~

$$\cancel{\frac{e^{-t}}{1+xt} \leq}$$

Or, $\forall t \geq 1$, on a :

$xt \geq 0$ car $x \geq 0$

$\Rightarrow xt + 1 \geq 1$ } décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Rightarrow \frac{1}{xt+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}$$

les intégrales étant convergentes

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\, dt \leq x^2 I_2$$

- $x \mapsto x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}$ étant positive sur $\mathbb{R}_+$, on peut établir d'après ce qui précède que :

$$0 \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\, dt \leq x^2 I_2$$

$$\boxed{\Rightarrow 0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2, \forall x > 0}$$

7a) Comme I_2 est convergente, on a, d'après 6b), $\forall x > 0$:

$$\cancel{0 \leq \frac{F(x) - I_0 + x I_1}{x^2} \leq I_2}$$

$$0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2$$

D'après le théorème d'encadrement, on a :

$$F(x) - I_0 + x I_1 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Donc, il vient :

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 11

Numéro de table 003

$$F(x) - I_0 + x I_1 \underset{x\to 0}{=} o(x)$$

$I_0 = I_1 = 1$ d'après 1 b)

$$\boxed{\Rightarrow F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)}$$

7 b) On a :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - x + o(x) - 1}{x}$$

d'après 3) et 7 a)

$$\underset{x\to 0}{=} -1 + o(1)$$

Il vient alors que :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

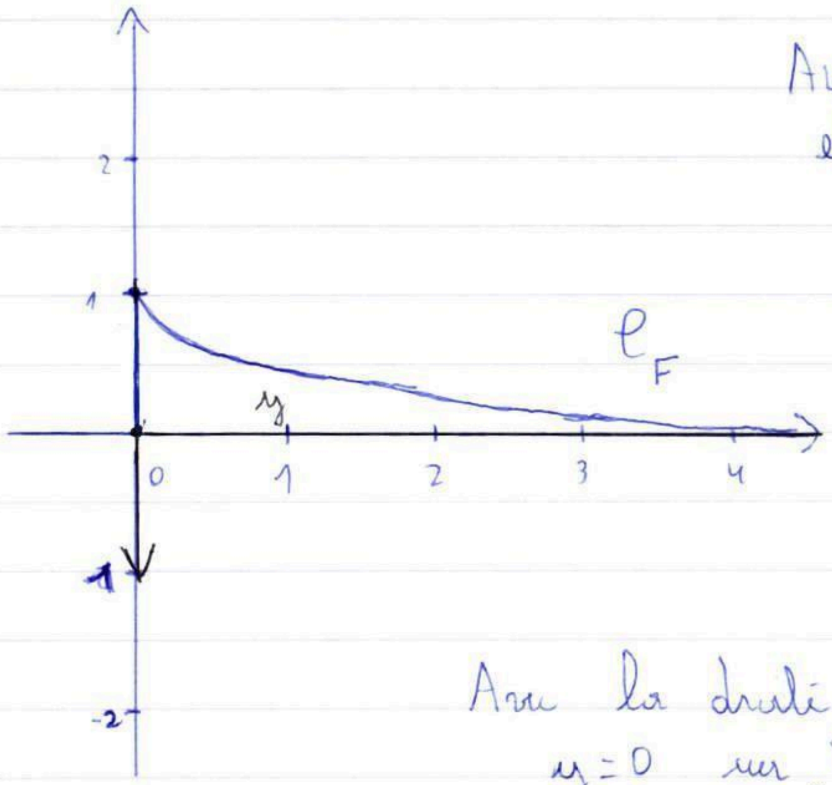
$\boxed{\text{Donc } F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et on a } F'(0) = -1.}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

8) On a :



Avec $F(0)=1$
et $F'(0)=-1$

Et $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Avec la droite y d'équation $y=0$ sur $\mathcal{C}_F$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

Exercice 3 :

I - 1) . f_i est positive sur $\mathbb{R}$ (en effet, $\forall x \geq 1$, $\frac{i}{x^{i+1}} \geq 0$ sur $i \in [\![1, n]\!]$).

. f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1.

. On a, avec $A \geq 1$, et $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\int_{-\infty}^{A} f_i(x)\,dx = \int_{1}^{A} f_i(x)\,dx \quad \text{(Chasles)}$$

$$= \int_{1}^{A} \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$$

$$= i \int_{1}^{A} x^{-i-1}\,dx$$

$$= i \left[\frac{x^{-i}}{-i} \right]_{1}^{A}$$

$$= i \left(-\frac{1}{iA^i} - \left(-\frac{1}{1^i i} \right) \right)$$

$$= i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{iA^i} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{A^i}$$

Or, $A^i \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\frac{1}{A^i} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par inverse

Donc $1 - \frac{1}{A^i} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

D'où : $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$, f_i est une densité de probabilité

2a) On a les équivalences suivantes.

X_i admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge absolument

f_i nulle en dehors de $[1, +\infty[$

$\Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge absolument

$\forall x \geq 1, x f_i(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 11

Numéro de table 003

On a, avec $A \geq 1$:

$$\int_1^A x f_i(x)\,dx = i \int_1^A \frac{1}{x^i}\,dx$$

Or, d'après le cours, on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
De manière analogue, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}\,dx$ converge si et seulement si $i > 1$, soit $i \geq 2$.

D'où : X_i admet une espérance si et seulement si $i \geq 2$.

On calcule alors, avec $i \geq 2$ et $A \geq 1$:

$$\int_1^A \frac{1}{x^i} = \left[\frac{x^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A$$

$$= \cancel{A} \left(\frac{1}{A^{i-1}(1-i)} - \frac{1}{(1-i)} \right)$$

Or, $A^{i-1} \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty \quad \forall i \geq 2$

19.93 / 20

Donc $\dfrac{1}{A^{i-1}(1-i)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

Donc $\dfrac{1}{A^{i-1}(1-i)} - \dfrac{1}{(1-i)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \dfrac{1}{i-1}$

D'où, d'après ce qui précède, on a, $\forall i \geq 2$:

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\, dx$$

$$= i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}$$

$$= i \times \frac{1}{i-1}$$

$$\boxed{E(X_i) = \frac{i}{i-1} \quad , \forall i \geq 2}$$

3) Comme $X_i(\Omega) = [1;+\infty[$, on a :

$F_i(x) = P(\underbrace{X_i \leq x}_{\text{impossible}}) = 0 \quad$, si $x < 1$

$F_i(x) = P(X_i \leq x)$, si $x \geq 1$

$= \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt$

Chasles

$= \int_{1}^{x} f_i(t)\,dt$

$F_i(x) = 1 - \dfrac{1}{x^i}$, d'après 1) , (avec $x = t$)

D'où, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a bien :

$$\boxed{F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

~~4a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$~~

4a) On a :

$U(\Omega) =]0;1[$

donc $U^{1/i}(\Omega) =]0;1[$

donc $V_i(\Omega) = \dfrac{1}{U^{1/i}}(\Omega) =]1;+\infty[$

Il vient alors :

$$\underbrace{P(V_i \leq x)}_{\text{impossible}} = 0 \qquad \text{si } x < 1$$

$$P(V_i \leq x) = P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right) \qquad \text{si } x \geq 1$$

$$= P\left(\frac{1}{x} \leq U^{1/i}\right)$$

$x \mapsto x^i$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

$$= P\left(\frac{1}{x^i} \leq U\right)$$

U à densité

$$= 1 - P\left(U \leq \frac{1}{x^i}\right)$$

$$= \cancel{X}\ 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right)$$

sur $\frac{1}{x^i} \in]0, 1[$ $\forall x \geq 1$

$$P(V_i \leq x) = 1 - \frac{1}{x^i}$$

$\boxed{\text{D'où, d'après ce ~~ke~~ qui précède } V_i \text{ suit la même loi que } X_i}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) ADAM

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 11

Numéro de table 003

4b)

```
import numpy.random as rd
def simulX(i):
    U= rd.random()
    return 1/(U**(1/i))
```

(car V_i suit la même loi que X_i)

II - 5)

```
def simulY(n,p):
    return rd.binomial(n-1,p) + 1
```

6)

```
def loiY(n,p):
N = 10000
loi = [0]*n
for k in range(N):
        y = simulY(n,p)
        loi        (Admis)
return loiY
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

7) import matplotlib.pyplot as plt
plt.bar(simulY, loiY, "+k")
plt.show()

8a) La clé primaire d'une table dans une base de données doit identifier la table de manière unique.

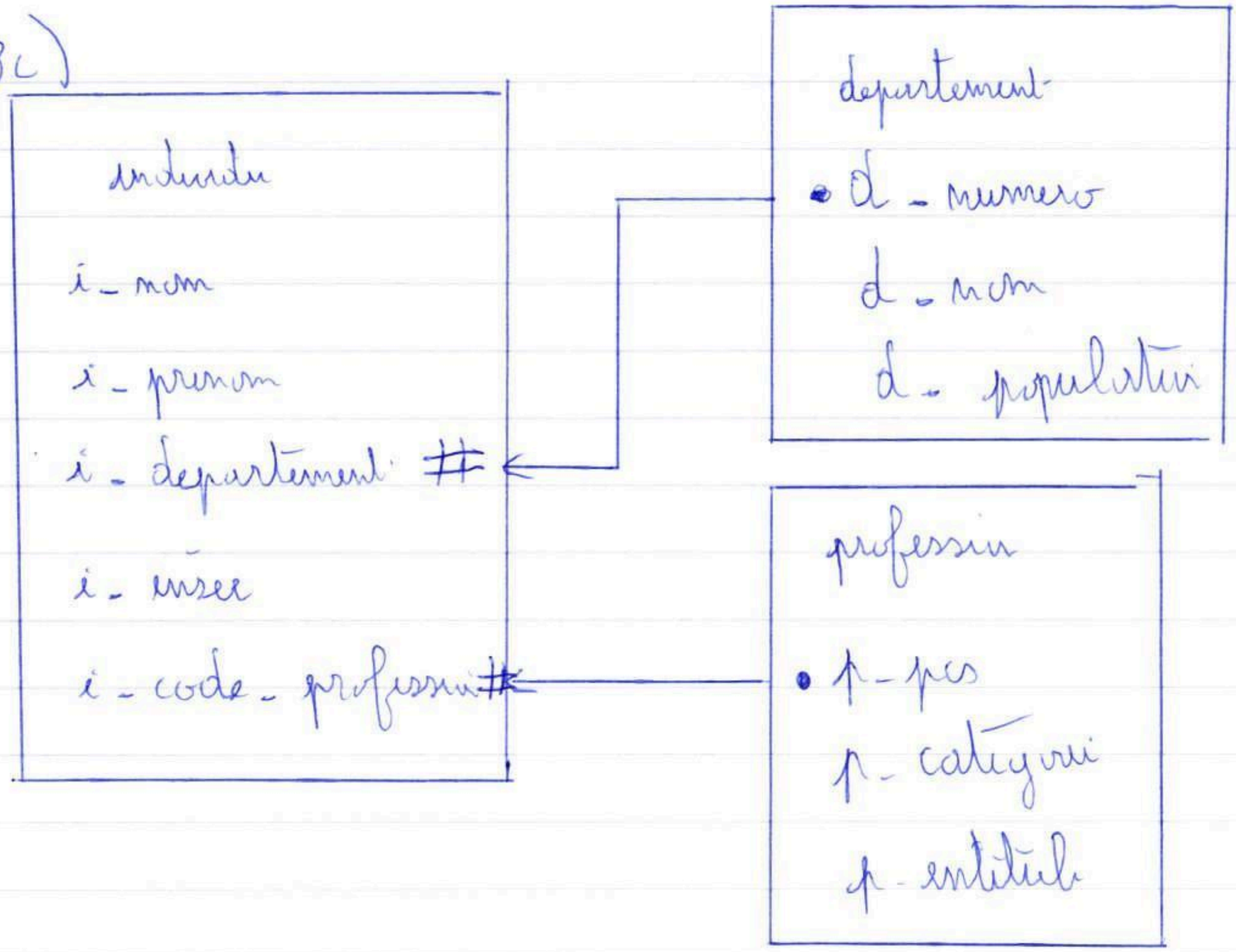
~~8b) Pour Dat la table individu, on a:~~

8b) Pour la table individu, on a: i_insee.

Pour la table departement, on a: d_numero

Pour la table profession, on a: p_pcs

8c)



Avec # les clés étrangères et • les clés primaires

8d)

```
SELECT DISTINCT
        i_code_profession
FROM
        individu
WHERE
        i_departement == 28;
```

8.e) SELECT

i_insee,

p_categorie

FROM

individu

INNER JOIN

profession

FROM

individu . i_code_profession = profession . p_pcs

GROUP BY

p_categorie ;

III - 9) $\forall x < 1$, on a ; avec $Z_n(\Omega) = [1 ; +\infty[$:

$$G_n(x) = P(\underbrace{Z_n \leq x}_{\text{impossible}}) = 0$$

$\boxed{\text{D'où : } \forall x < 1 \text{ , on a : } G_n(x) = 0}$

10a) Soit $x \geq 1$, on a que :

Sachant $[Y = i]$, c'est-à-dire sachant qu'on ait choisi un certain numero de catégorie socio-professionnelle, il vient que le revenu mensuel étudié est celui d'un individu choisi au hasard dans la catégorie socioprofessionnelle i.

D'où : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on a : $P_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = P(X_i \leq x) = F_i(x)$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) A D A M

Signature

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 11

Numéro de table 003

10c) On admet 10b) et on calcule ; $\forall x \geq 1$:

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}$$

formule du binôme

formule du binôme

$$= (p + 1 - p)^{n-1} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{p}{x}\right)^k \binom{n-1}{k} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= 1^{n-1} - \frac{1}{x} \times \left(\frac{p}{x} + (1-p)\right)^{n-1}$$

~~$= 1 - \frac{1}{x^n} \times (p + p - p$~~

$$= 1 - \frac{1}{x^n} \left(p + (1-p)x\right)^{n-1}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$G_n(x) = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n} \quad , \forall x \geq 1$$

11) G_n est continue sur $[1 ; +\infty[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur $[1 ; +\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas)

Sans suite