PAUL

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPL.

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 11

Numéro de table 050

Exercice n° 1 :

Soit, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Déterminons l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$O_3 M + M O_3 = O_3$

Pour toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $O_3 M = O_3$ et $M O_3 = O_3$

Donc, $E_{O_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Puis, soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. où $(a, b, c, d, e, f, g, h, g, i)$ réels.

$IM + MI = O_3$

$\Leftrightarrow \quad M + M = O_3$

$\Leftrightarrow \quad 2M = O_3$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$\Leftrightarrow M = 0_3$.

Donc, $E_{I_3} = \{0_3\}$

2) D'abord, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
$E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

De plus, pour toute matrice C, $0_3 \in E_C$ donc, $E_C \neq \emptyset$

De plus, on prend $\lambda \in \mathbb{R}$ et (A, B) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A \in E_C$ et $B \in E_C$. (A quelconque et B quelconque).

$C(\lambda A + B) + (\lambda A + B)C$
$= C\lambda A + CB + \lambda AC + BC$
$= \lambda(CA + AC) + (CB + BC)$.

Or, $A \in E_C$ et $B \in E_C$ donc, $CA + AC = 0_3$ et, $CB + BC = 0_3$.
De fait, $C(\lambda A + B) + (\lambda A + B)C = 0_3$.

Donc, $(\lambda A + B) \in E_C$

Donc E_C sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Soit $M \in E_a$.

On pose, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ où les coefficients sont réels.

On a, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2d + a - 2b = 0 \\ -2a + 2g + d - \end{cases}$

Admis

4)a) <u>A diagonalisable par symétrie. (A matrice symétrique)</u>

4 b) Déterminons,

$$A^3 - 9A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} A - 9A$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= 0_3$$

Donc, $P(X) = X^3 - 9X$ polynôme annulateur de A.

Or, l'ensemble des valeurs propres de A est racine de ses polynômes annulateurs.

Donc si $\lambda \in Sp(A)$ alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$.

c) Etudions les racines de P.

$$P(X) = 0 \iff X^3 - 9X = 0$$
$$\iff X(X^2 - 9) = 0$$
$$\iff X(X-3)(X+3) = 0.$$

Donc les valeurs propres possibles de A sont, 0, 3 et -3.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 11

Numéro de table 050

On, $-3 \in Sp(A) \iff \exists X$ non-nul de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, noté $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = -3X$.

$\iff AX + 3X = 0$.

$\iff (A + 3I)X = 0$.

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = y \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = y \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x = -z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 2x \\ -2x + 3y + 2z = 0. \\ z = -2x \end{cases}$$

Donc, $X = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. Donc, $-3 \in Sp(A)$ car X non-nul. De plus, comme la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$

est libre (non-nulle) et génératrice de E_{-3} c'est donc une base de E_{-3}.

De plus, on établit le même raisonnement en 0.
$0 \in Sp(A) \iff \exists X$ non-nul tel que, $AX = 0$.
et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ -2x + 2z = 0. \\ 2y = z \end{cases}$$

Donc, $X = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ De fait, X non-nul

et $0 \in Sp(A)$.
De plus, $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ libre (non-nulle) et génératrice de E_0 donc, c'est une base de E_0.

De même, $3 \in Sp(A) \iff \exists X$ non-nul tel que,
$AX = 3X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad (A - 3I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 2y \\ -2x + 2z - 3y = 0 \\ 2y = 4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2x + 2z - 3y = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ -2x + 2z - 3y = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc, $X = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc, comme X non-nul,

$3 \in Sp(A)$.

De plus, $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ libre (non-nulle) et génératrice de E_3 donc, cette famille est une base de E_3.

De ce fait, comme A admet 3 valeurs propres et que la concaténation de familles libres ~~assoriés~~ de sous-espaces propres associés à des valeurs propres de A forme une famille libre ~~et que~~

on a, $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. or, elle est de cardinal 3.

De plus, $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$.

Donc, $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Donc A diagonalisable et par définition il existe P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que,

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 1 & 2\\-2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

donc

$\Leftrightarrow D = P^{-1}AP$ (P inversible)

$D = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

5) $P^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 1 & 2\\-2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 1 & 2\\-2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$P^2 = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}$

$\underline{P^2 = 9I}$.

Comme P inversible, alors

$P^2 = 9I$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) P A U L   M A R i E

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLi

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 11

Numéro de table 050

$\Leftrightarrow P(P) = 9I$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{9}P\right) = I.$

Donc, $P^{-1} = \frac{1}{9}P$

6)a) Soit, $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

~~$N \in E_D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}($~~

$N \in E_D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 3a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3c + 3c = 0 \\ -3d = 0 \\ 3f = 0 \\ 3g - 3g = 0 \\ 3h = 0 \\ 3i + 3i = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ d=0 \\ f=0 \\ h=0 \\ i=0 \end{cases}.$$

De ce fait, $N = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Donc,

$$N \in E_D \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6)
b) De fait

$$N = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$N = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

On effectue alors un test de liberté. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ réels.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre et génératrice de E_D (s'écrit sous forme de Vect) donc elle est une base de E_D.

De fait, $\dim(E_D) = 3$

7) a) Soit $N = P^{-1} M P$.

$$\begin{aligned} M \in E_A &\Leftrightarrow AM + MA = 0_3 \\ &\Leftrightarrow A(PNP^{-1}) + (PNP^{-1})A = 0_3 \quad (P \text{ inversible}) \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0_3 \\ &\Leftrightarrow PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3 \\ &\Leftrightarrow P(DN + ND)P^{-1} = 0_3. \end{aligned}$$

en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite, Comme P inversible,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow DN + ND = 0_3 \\ &\Leftrightarrow N \in E_D. \end{aligned}$$

Donc, $M \in E_A \Leftrightarrow N \in E_D$.

b) $M \in E_A \iff P^{-1}MP \in E_D$

$M \in E_A \iff P^{-1}MP = \alpha \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

où (α, β, γ) réels unique puisque $\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$ base de E_D

$\iff M = P\left(\alpha \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)P^{-1}$

car P inversible

$\iff M = P\alpha \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + P\beta \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1} + P\gamma \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$

$\iff M = \alpha\left(P\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\right) + \beta\left(P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\right) + \gamma\left(P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\right)$

Par définition, comme (α, β, γ) réels, E_A a pour base $\mathcal{B}'$,

$\mathcal{B}' = \left(P\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\right)$

8) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$(A+M)^2 = (A+M)(A+M)$
$= A^2 + AM + MA + M^2$

Donc, l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $(A+M)^2 = A^2 + M^2$ est en fait l'ensemble des matrices de E_A.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

Écricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 11

Numéro de table 050

Signature

9) Soit $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM + MA$.

$M \in E_A$ a été exprimé en 7b.

Or, dim $B' = 3$ donc, l'ensemble de matrices M telles que $AM + MA = 0_3$ est de dimension 3.

~~Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un~~

Or, ces matrices représentent le noyau de f.

Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie on peut alors appliquer le théorème du rang,

$$\dim(\ker(f)) + rg(f) = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow rg(f) = 9 - 3$$

$$\Leftrightarrow rg(f) = 6.$$

Donc, $rg(f) = 6$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Exercice n° 2 :

1)a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Etudions la négligeabilité de h où $h(t) = t^n e^{-t}$ en $+\infty$.
Montrons que h negligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{h(t)}{\frac{1}{t^2}} = \frac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}}$$

$$= t^n e^{-t} \cdot t^2$$

$$= \frac{t^{n+2}}{e^t}.$$

Or, par le théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^{n+2}}{e^t} = 0$.

donc,
$$h(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

De ce fait, par critère de negligeabilité sur des intégrales positives, alors, comme

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge comme intégrale de Riemann

de paramètre 2 $(2>1)$ alors $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ converge.
$(\forall n \in \mathbb{N})$

De plus, h continue sur $[0,1]$ comme produit de fonction l'étant et donc, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$ existe par continuité.

Ainsi, par Chasles, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt.$$

1b) I_0 et I_1 existent donc.

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt.$$

On peut identifier I_0 à la formule de densité de la loi exponentielle de paramètre 1 $(1>0)$.

Donc, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$

et $I_0 = 1$

De plus, $I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\, dt$.

Pareillement, on reconnaît la formule de l'espérance d'une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre 1. $(1>0)$

Ainsi donc,

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t}\, dt = 1.$$

2) Soit $x \geq 0$. Soit $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt$.

On a, avec $t \in \mathbb{R}^+$,

$$1 \leq 1 + xt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+xt} \leq 1$$, comme la fonction inverse est bijective décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $1+xt > 0$ car $xt \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$$, par positivité de l'exponentielle

Or, $t \to \frac{e^{-t}}{1+xt}$ continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et $x \geq 0$.

Donc par critère de comparaison pour des intégrales à termes positifs, comme I_0 converge, alors,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt \text{ converge pour tout } x \geq 0$$

Soit, F définie sur $[0, +\infty[$ par:

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 11

Numéro de table 050

$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ et $x \in [0, +\infty[$.

3) $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

donc, $F(0) = I_0$

$= 1$.

4) Soient x et y deux réels positifs et $x \leq y$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

$$1 \leq 1+xt \leq 1+yt$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{1+yt} \leq \frac{1}{1+xt} \leq 1$$ par

bijectivité de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$. En effet,

$x \geq 0 \Rightarrow 1+xt > 0$

$y \geq 0 \Rightarrow 1+yt > 0$ } et pour tout t

$$\Rightarrow 0 < \frac{e^{-t}}{1+yt} < \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$$ puisque,

$\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} > 0$ car l'exponentielle est toujours strictement positive.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

De fait, en intégrant, comme F convergente en tout réel positif,

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\, dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt.$$

$$\Rightarrow \quad F(y) \leq F(x). \quad \text{avec } x \leq y$$

On peut ainsi en déduire que F decroissante sur $\mathbb{R}^+$

5)a) Soit $x \geq 0$,

$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\, dt$. D'abord, cette intégrale existe par continuité de $g(t) = \frac{1}{1+xt}$ sur $[0,1]$ ($x \in \mathbb{R}^+$) comme quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le denominateur ne s'annule pas.

Si $x=0$, $\int_0^1 \frac{1}{1}\, dt = 1$ (constante)

Si $x > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{(1+xt)}\,dt \quad \text{car } x > 0.$$

On reconnaît la primitive de la forme " $\frac{u'}{u}$ ", donc,

$$= \frac{1}{x}\left[\ln|1+xt|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \ln(1)\right) \quad \text{car } 1+xt > 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } t \geq 0$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x} \quad (x > 0)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\forall t \in [0,1]$,

$$0 \leq e^{-t} \leq 1.$$

En effet, comme l'exponentielle est bijective croissante sur $\mathbb{R}$,

$$0 < e^{-t} \leq e^0 \quad \text{car } t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow 0 < e^{-t} \leq 1.$$

donc, reprenons,

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-t} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}.$$ en effet, $\frac{1}{1+xt} > 0$

puisque $1+xt > 0$ car $xt \geq 0$ et donc $1+xt \geq 1$.

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \frac{1}{1+xt}$$

Or, $u(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ et $v(t) = \dfrac{1}{1+xt}$ sont telles que u et v continues comme quotient et composée de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$ puisque x est positif.

De plus, $0 < 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\, dt.$$

---

c) Soit $x > 0$. $\forall t \in [1, +\infty[$

$0 \leqslant x \leqslant xt$. car $t \geq 1$ donc $xt \geq x$ car $x > 0$.

$\Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1 + xt$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+xt} \leqslant \dfrac{1}{x}$ puisque la fonction inverse est bijective décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$ puisque, $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} > 0$.

Comme on a obtenu en 1b la convergence de I_0, alors, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt$ converge aussi. De plus, comme F bien définie, sur $\mathbb{R}$, alors,

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 11

Numéro de table 050

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ existe.

Comme ces ~~intégrales~~ fonctions sont continues sur $[1, +\infty[$ et positives, alors, on a, $\forall x > 0$,

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \frac{1}{x} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

d) Par Chasles, $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

On, $\forall x > 0$,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt.$$

On $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$

en posant $X = x+1$, $= \frac{\ln(X)}{X-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(X)}{X}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or, par théorème de croissances comparées,

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0.$$

Donc par théorème d'encadrements, $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ Converge et,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = 0.$$

De plus, $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt \leq I_0$ puisque $I_0 = \int_0^1 e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ par Chasles.

Ainsi donc, $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt \leq 1$.

de ce fait, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$.

Donc, par théorème d'encadrements, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge et $\lim \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = 0$.

Donc, par Chasles,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} = 0.$$

Donc, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

6) Admettons, avec $x \geq 0$ que,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \text{ converge.}$$

6)a) D'abord, comme $F(x)$ existe et que, $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ converge, alors necessairement, $\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\, dt$ converge (par ~~intégr~~ linéarité) (on rappelle, $x \geq 0$). En effet, comme $xt \geq 0$ $\quad 0 \leq e^{-t}(1-xt) \leq e^{-t}$ donc critère de comparaisons intégrales positives.

Ainsi, $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\, dt$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et,

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - (1+xt)(1-xt)e^{-t}}{1+xt} dt \quad \text{par linéarité,}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\left(1 - (1-xt+xt+x^2t^2)\right)}{1+xt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(x^2t^2)}{1+xt} dt$$

$$= x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \, dt \quad \text{(linéarité)}$$

6b) On rappelle que I_n défini pour tout entier naturel n.

On a,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt \ , \ I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt \ \text{ et } \ I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt.$$

D'après 6a,

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - xt) \, dt = x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \, dt.$$

$$\Rightarrow F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} + x \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \, dt.$$

(linéarité).

$$\text{On} \Rightarrow F(x) - I_0 + x I_1 = x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \, dt.$$

$$\text{Or, } I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt \quad \text{(définie en 1a)}.$$

Or, $1 + xt \geq 1$ car $xt \geq 0$ donc,

$$0 \leq \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}.$$

donc, comme les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) et produit, de fonctions l'étant, alors on a, comme les bornes sont croissantes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \, dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \, dt$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 11

Numéro de table 050

De fait, comme $x^2 \geq 0$, alors,

$$x^2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \, dt \leq x^2 I_2 .$$

Donc, $\forall x \geq 0$,

$$0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2 .$$

7a)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

7b) On utilise la formule du taux d'accroissement, en étudiant la limite en 0 de, $(x>0)$

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$= \frac{F(x)-1}{x}.$$

Or, $F(x) \underset{x\to 0}{=} 1-x+o(x)$

donc, en 0, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{1-x-1+o(x)}{x} = \frac{-x+o(x)}{x}$

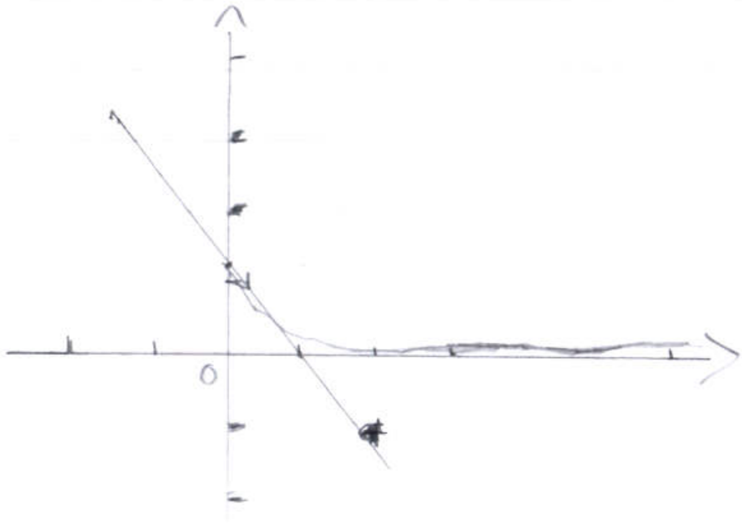
Or, $\frac{-x+o(x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{x} \underset{0}{\sim} -1.$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -1.$ Donc, comme

cette limite est finie, F dérivable en 0 et,
Donc, $F'(0) = -1.$

~~donc~~,

8)



l'équation de la tangente en 0 est :

$y = \cancel{1} \; F(0) + F'(0)(x-0)$ et $F'(0) = -1$

$y = 1 + (-1)(x)$

$\underline{y = 1 - x}$

Exercice n° 3 :

PARTIE I :

$i \in [\![1, n]\!]$

1) D'abord, f_i définie sur $\mathbb{R}$ puisque $x^{i+1} > 0$ car $x \geqslant 1$ sur le segment de la densité.

. De plus, f_i continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues sur $]1, +\infty[$ et son denominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
De plus, f_i continue sur $]-\infty, 1[$ comme constante.
Donc f_i continue sur $\mathbb{R}$ sauf eventuellement en 1.

. De plus, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, comme $x \geq 1$, $i \cdot \frac{1}{x^{i+1}} \geq 0$ et $0 \geq 0$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_i(x) \geq 0$.

. De plus, on étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, dx$.
$\int_{-\infty}^{1} f_i(x)\, dx$ converge et vaut 0.

De plus soit $A \geq 1$ on étudie l'intégrale partielle, avec $i \in [\![1, n]\!]$

$\int_1^A \frac{i}{x^{i+1}}\, dx$ (existe par continuité)

$= i \int_1^A \frac{1}{x^{i+1}}\, dx$

$= i \left[-\frac{1}{i x^i} \right]_1^A$

$= i \left(-\frac{1}{iA^i} + \frac{1}{1 \cdot i} \right)$

$= -\frac{i}{iA^i} + \frac{1 \cdot i}{i} = -\frac{1}{A^i} + 1$

Or, $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{i}{iA^i} = 0$ car $i \geq 1$ donc en passant à la limite, $A \to +\infty$,

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 11

Numéro de table 0T0

$\int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$.

Donc, f_i est une densité de probabilité. $(i \in [\![1,n]\!])$.

2)a)

$E(X_i)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) \cdot x \, dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} x \cdot f_i(x)\,dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{xi}{x^{i+1}}\,dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} i \cdot \frac{1}{x^i}\,dx$ converge.

$\Leftrightarrow i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}$ converge.

Or, si $i = 1$ cette intégrale diverge comme ~~série~~ intégrale de Riemann de paramètre 1.

Si $i \geq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}\,dx$ existe comme intégrale de Riemann de paramètre strictement plus grand que

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

1.

Donc, . si $i = 1$, pas d'espérance.

. Sinon, X_i admet une espérance.

On a, dans le deuxième cas, $\forall i \geq 2$

$$E(X_i) = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{i}{x^{i+1}} \, dx$$

$$E(X_i) = i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} \, dx.$$

En posant $A \geq 1$, on passe par l'étude de l'intégrale partielle,

On étudie, $i \int_1^A x^{-i} \, dx = i \left[\frac{x^{-i+2}}{-i+2} \right]_1^A \quad (i > 1)$

$$= i \left(\frac{1}{A^{i-2}(-i+2)} - \frac{1}{(-i+2)} \right)$$

$$= \frac{i}{A^{i-2} \cdot (1-i)} - \frac{i}{(1-i)}.$$

On ~~lim~~ $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{i}{A^{i-2}(1-i)} = 0$

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}\,dx$ converge pour $i \geq 2$ et vaut,

$$= -\frac{i}{(1-i)} = +\frac{i}{(i-1)} \quad (i \in [\![2, n]\!]).$$

b) On a de ce fait, $\forall i \in [\![2, n]\!]$

$$E(X_i) = \frac{i}{i-1} = \frac{i-1+1}{i-1} = 1 + \frac{1}{i-1}.$$

Or, $i \geq 2$ donc on cherche les plus petites valeurs pour $i-1$ et que $\frac{1}{i-1}$ soit maximal tout en gardant $i \geq 2$.

Donc, les numéros de catégorie professionnelle sont décroissants concernant la valeur du revenu mensuel moyen : Autrement dit,

$$E(X_2) > E(X_3) \; ... > E(X_n).$$

3) Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$,

a) D'abord, si $x < 1$, $P(X_i \leq x) = 0$ puisque x est à gauche du support.

Sinon, $P(X_i \leq x) = \int_1^x f_i(t)\,dt$

$$P(X_i \leq x) = \int_1^x i \cdot \frac{1}{t^{i+1}}\,dt$$

$$P(X_i \leq x) = i\left[\frac{t^{-i}}{-i}\right]_1^x$$

$$= i\left[-\frac{1}{t^i}\right]_1^x$$

$$= -\frac{1 \cdot i}{x^i \cdot i} + \frac{i}{i}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^i} \quad \text{si } x \in [1, +\infty[\text{ et } i \in [\![1, n]\!].$$

Donc on a bien,

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

---

4) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}\,]0,1[$

a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$V_i = \frac{1}{U^{1/i}}.$$

$$U^{1/i}(\Omega) =]0, 1[$$

donc, $\left(\dfrac{1}{U^{1/i}}\right)(\Omega) = [1, +\infty[$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 11

Numéro de table 050

De fait, si $x < 1$, $P(V_i \leq x) = 0$ (à gauche du support).

Si $x \geq 1$, $P(V_i \leq x)$ $(i \in [\![1, n]\!])$

$= P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$

$= P\left(U^{1/i} \geq \frac{1}{x}\right)$ (inverse strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$)

$= P\left(U \geq \left(\frac{1}{x}\right)^i\right)$ fonction puissance strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

$= 1 - P\left(U \leq \left(\frac{1}{x}\right)^i\right)$

et comme U à densité et que $\left(\frac{1}{x}\right)^i \in]0, 1]$ car $x \geq 1$, alors,

$= 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^i$

$= 1 - \frac{1}{x^i}$. $(i \in [\![1, n]\!]$ et $x \geq 1)$.

Donc, comme X_i et V_i ont le même support et,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

la même fonction de repartition, alors, elles suivent la même loi.

~~4) from numpy import *~~

b) ~~import random~~

```
from numpy import *
import numpy.random as rd
X= random ( )
i= int (input ("entrer i"))    # i superieur ou égal à 1.
v= 1/ X**(1/i)
print (v)
```

PARTIE II :

Soit $p \in]0,1[$

5)

~~5) def simul Y (n, p)~~

5)

```
from numpy import *
import numpy.random as rd
def simul Y (n, p)
X= rd.binomial(n-1, p)
```

```
Y= X+1
return (Y)
```

6)

```
def loiY(n,p)
    N= 10000
    loi= [0] *n
    for k in range(0, n)        :
        y= simulY(n,p)
        loi[k]+y
    return loi
```

7)

```
from numpy import*
import numpy.random as rd
def diagrammeY(n,p)
import matplotlib.pyplot as plt
x= np.linalg (1, n+1)
y= loiY(n,p)
plt.bar(x, y)
```

8) a) La clé primaire d'une table doit permettre, que par sa connaissance, on puisse distinguer l'élément designé des autres.
Autrement dit, si l'on connaît la clé primaire d'un objet, on sait quel est cet objet.

8) b) On peut faire un tableau :

Table n°	Exemple clé Primaire
1	i - insee
2	d - nom
3	p - intitule

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) P A U L M A R I E

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 11

Numéro de table 050

PARTIE III :

Soit $r \in]0,1[$

9) D'après la question 3 (PI) $\forall x < 1$, $F_i(x) = 0$.
Donc il est impossible que quelqu'un gagne moins de 1000 euros par mois
donc, $P(Z_n \leq x) = 0$ si $x < 1$.

~~10) b) $\forall x \geq 1$, $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k+1}{x^{k+2}}}{1 - \frac{1}{x^k}} \binom{n-1}{k}$~~

10) a) Soit $x \geq 1$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
D'abord, $(Z_n \leq x)_{[Y=i]}$ signifie que l'individu gagne moins de $x \cdot 1000$ euros sachant qu'il est dans la catégorie i.
De plus, F_i signifie l'on a choisi au sein de la catégorie i un individu qui gagne moins de $x \cdot 1000$ euros.

~~10)~~

→ Suite

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

~~1)~~ 1) Les phrases étant similaires, on a alors nécessairement, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $x \geq 1$.

$$P_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = P(X_i \leq x) = F_i(x)$$

b) Avec le système complet d'événements $([Y-1=i])_{i \in [\![0, n-1]\!]}$ on applique la formule des probabilités totales, $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{[Y=k+1]}(Z_n \leq x) \cdot P(Y-1=k)$$

Car $[Y=k+1]$ et $[Y-1=k]$ sont similaires (question 10a)

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k-1}$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} \quad (x \geq 1)$$

$(Y-1 \hookrightarrow B(n-1, p))$

c) $\forall x \geq 1$,

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \cdot \binom{n-1}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-1-k}$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-1-k} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k$$

$(1-p)^{n-1-k}$. Par la formule du binôme de Newton,

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-1-k} \right)$$

Avec un nouveau binôme de Newton,

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{p}{x} + (1-p) \right)^{n-1}$$

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{p + x(1-p)}{x} \right)^{n-1}$$

$$G_n(x) = 1 - \frac{\left(p + (x(1-p))\right)^{n-1}}{x^n}$$

---

11) . Premièrement, étudions la continuité de G_n.

$G_n(1) = 1 - (1+1-1)^{n-2}$

$G_n(1) = 1 - 1$

$G_n(1) = 0$.

de plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} G_n(x) = 0$.

Donc G_n continue en 1.

De plus, G_n continue sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme somme, composée, produit et quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le denominateur ne s'annule pas.

Donc G_n continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, G_n $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ (constante) et G_n $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ comme somme, produits, composée et quotient (dont le denominateur ne s'annule pas)

Donc G_n $\mathcal{C}^1$ presque partout sur $\mathbb{R}$ sauf eventuellement en 1.

Donc Z_n densité de probabilité.

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted]

Signature

Nom [redacted]

Prénom (s) PAUL MARIE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS APPLI

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 11

Numéro de table 0J0

13) a)

Si $x < 1$ alors, $G_n(x) = 0$ puisque x est à gauche du support

de plus si $x \geq 1$, $G_n(x) = 1 - \frac{1}{x^n} \frac{\left(1 + (1-1)x\right)^{n-1}}{x^n}$

$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x^n} \cdot \left(\cancel{} \frac{\left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x\right)^{n-1}}{x^n}\right.$

$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\right.$

ADMIS

b) Si $x < 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = 0$.