NGUYEN

FLORA

Note de délibération : 19.99 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom NGUYEN

Prénom (s) FLORA

19.99 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 05

Numéro de table 015

Commencez à composer dès la première page.

EXERCICE 1

PARTIE 1

1. Calcul de J

(a) $J = M - 2I$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Calcul J^2

$$J \times J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.99 / 20

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

D'où $\boxed{J^2 = 3J}$

~~1c) On en déduit que:~~

(c) $M^2 = M \times M$ (par le calcul)

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}}$$

On en deduit ~~que~~ ~~par~~ ~~de~~ que:

$M^2 = \cancel{11I + 7J}$ $\cancel{7J+4I}$

$\boxed{M^2 = 7J + 4I}$

(d) D'après (c) on a :

$M^2 = 7J + 4I$

en remplaçant J par $M - 2I$ (d'après la déf de J), on a :

$M^2 = 7(M - 2I) + 4I$

en distribuant il vient :

$M^2 = 7M - 14I + 4I$

d'où on a :

$M^2 = 7M - 10I$

Comme annoncé on retrouve bien :

$\boxed{M^2 = 7M - 10I}$

2.(a) On reconnaît que $R(x)$ est un polynôme annulateur de M, qui a été déduit de : $M^2 = 7M - 10I \iff M^2 - 7M + 10I = 0_{33}$.

(b) On a $R(x) = x^2 - 7x + 10$

Pour vérifier que 2 est une racine de R, on remplace x par 2, il vient :

$R(2) = 4 - 14 + 10$

$= 0$

Donc 2 est bien racine de R.

Il vient :

$\Delta = 49 - 4 \times 1 \times 10$

$\Delta = 9$

Comme $9 > 0$, on sait qu'il y aura deux racines, il vient :

$\cancel{x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5}$ et $\cancel{x_2 = 2}$

$x_1 = 5$ et $x_2 = 2$

une autre racine sera donc 5.

c) Les valeurs propres possibles sont données par les racines du polynôme annulateur, on aura donc comme valeurs propres possibles : 2 et 5.

3. $M \times U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$MU = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

On reconnait que :

$MU = 5 \times U$

Ce qui prouve que 5 est bien une valeur propre de M associée au vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. On a :

- $MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

or comme on a $MV = 2V$ avec $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien V qui est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 2.

- $MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$MW = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

or comme on a : $MW = 2W$ avec $W \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien W qui est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 2.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom N G U Y E N

Prénom (s) F L O R A

19.99 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 2 / 0 5

Numéro de table 0 1 5

Commencez à composer dès la première page

5. $QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$QP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d'où $\boxed{QP = 3I}$

(b) On a P qui est inversible ~~avec~~ ssi $P \times P^{-1} = I_3$ avec P^{-1} la matrice inverse de P.

Or comme on a :

$QP = 3I \Leftrightarrow \frac{1}{3} QP = I$

On a P qui est inversible avec :

$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} Q}$.

(c) Calcul $PD = MP$

On a :

$P \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \cancel{0}\,2 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Calcul MP

$$M \times P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On a bien $\boxed{PD = MP}$

(d) Procédons par récurrence :

Notons $\mathcal{P}_n$ l'égalité $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$ qu'on veut prouver pour tout entier naturel n.

Initialisation : Comme d'une part $M^0 = I$ et que d'autre part $\frac{1}{3} P D^0 Q = \frac{1}{3} PQ = I$. (d'après (b))

$\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ serait encore vraie càd qu'on aurait :

$M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$. Il vient d'après l'hypothèse de récurrence, et comme $M^{n+1} = M^n \times M$:

$M^n \times M = M(\frac{1}{3} P D^n Q)$, d'où on a : $M^{n+1} = \frac{1}{3} M(P D^n Q)$ or comme $MP = PD$, il vient par associativité :

$M^{n+1} = \frac{1}{3} PD(D^n Q)$, encore par associativité on a : $M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

Conclusion : on a montré grâce à un raisonnement par récurrence que :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3} P D^n Q}$

PARTIE 2

6. On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5(7a_n + b_n) - 10a_n}{5a_n + b_n} = \dfrac{25a_n + 5b_n}{5a_n + b_n} = \dfrac{5(5a_n + \cancel{b_n})}{(5a_n + \cancel{b_n})} = 5$

On a donc bien $(u_n)_{\mathbb{N}}$ qui est une suite géométrique de raison 5. Avec :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ u_n = u_0 \times 5^n = 5^n}$

(b) On a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2(7a_n + b_n) + 10a_n}{-2a_n - b_n} = \frac{-14a_n - 2b_n + 10a_n}{-2a_n - b_n} = \frac{-4a_n - 2b_n}{-2a_n - b_n} = \frac{2(-2a_n - b_n)}{(-2a_n - b_n)} = 2$

Donc (v_n) est une suite geometrique de raison 2. Et on a:

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ v_n = -1 \times 2^n}$

7. Posons P_{n+1} l'egalite $M^n = a_n M + b_n I$, qu'on veut prouver pourtant entier naturel n.

Initialisation

Comme d'une part $M^0 = I$, et que d'autre part $a_0 M + b_0 I = 0 \times M + 1 \times I = I$. P_0 est vraie

Heredite : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} serait encore vraie on aurait alors:

$M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$.

On a : $M^n = a_n M + b_n I$, d'où on a:

$M(a_n M) + M b_n I = a_n M^2 + M b_n \Leftrightarrow M a_n$

en admettant avoir trouvé: $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{M^n = a_n M + b_n I}$

PARTIE 3

8(a) Justification $P([X_2 = 1]) = \frac{3}{5}$, on sait que au jour 1, il était sur le maison 1, donc la probabilité qu'il le soit encore est bien de $\frac{3}{5}$.

Justification $P([X_2 = 2]) = P([X_2 = 3])$, on sait que sur le jour 1, il est sur la maison 1, donc le fait qu'il soit sur une autre que la 1 (c'à-d 2 ou 3) la probabilité est de $\frac{1}{5}$ par chaque.

En résumé on a:

$P([X_2 = 1]) = \frac{3}{5}$ et $P([X_2 = 2]) = P([X_2 = 3]) = \frac{1}{5}$.

b) Determinons la loi de X_2:

$X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

x_i	1	2	3
$P(X_2 = x_i)$	3/5	1/5	1/5

Il vient alors: $E(X_2) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$, donc $\boxed{E(X_2) = \frac{8}{5}}$

(c) On a : $E(X_2^2) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$

D'après Koenig Huygens on a:

$V(X_2) = \frac{16}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5} - \frac{64}{25} = \frac{80 - 64}{25} = \frac{16}{25}$

On a donc bien $\boxed{V(X_2) = \frac{16}{25}}$

$\sigma(X_2) = \sqrt{V(X_2)} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

$\boxed{\sigma(X_2) = \frac{4}{5}}$

9.(a) $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

x_i	1	2	3
	$3/5$	$1/5$	$1/5$

(b) $P_{[X_3=3]}([X_2=2]) = \frac{P([X_3=3]\cap[X_2=2])}{P([X_3=3])}$

$= \frac{\frac{2}{25}}{\frac{1}{5}}$

$= \frac{2}{5}$

La probabilité est donc de $2/5$.

10. ~~Soit~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme d'une part on a $C_{n+1} =$ ~~et que d'autre part~~ $\begin{pmatrix} P([X_{n+1}=1]) \\ P([X_{n+1}=2]) \\ P([X_{n+1}=3]) \end{pmatrix} =$

et que d'autre part : $\frac{1}{5}MC_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P([X_n=1]) \\ P([X_n=2]) \\ P([X_n=3]) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3P([X_n=1]) + P([X_n=2]) + P([X_n=3]) \\ P([X_n=1]) + 3P([X_n=2]) + P([X_n=3]) \\ P([X_n=1]) + P([X_n=2]) + 3P([X_n=3]) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P([X_{n+1}=1]) \\ P([X_{n+1}=2]) \\ P([X_{n+1}=3]) \end{pmatrix}$$

On a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{1}{5}MC_n}$

(b) Procédons par récurrence, et notons V_n l'égalité $C_n = \frac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}C_1$, qu'on veut prouver pour tout n non nul.

Initialisation

Comme d'une part $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que d'autre part $\frac{1}{5^0}M^0C_1 = IC_1 = C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. V_1 est vraie

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que V_n est vraie et montrons que V_{n+1} serait encore vraie, càd que ~~que~~ $C_{n+1} = \frac{1}{5^n}M^nC_1$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom N G U Y E N

Prénom (s) F L O R A

19.99 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 3 / 0 5

Numéro de table 0 1 5

On a d'après la qst precedente $C_{n+1} = \frac{1}{5}MC_n$, d'après l'hypothèse de recurrence on a :

$C_{n+1} = \frac{1}{5}M(\frac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}C_1)$

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5^{n-1}}\times M^nC_1 = \frac{1}{5^n}M^nC_1$. Donc V_{n+1} est encore vraie.

<u>conclusion</u> : À l'aide d'un raisonnement par recurrence on a montré que :

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*;\ C_n = \frac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}C_1}$

(c) $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

et comme $C_n = \begin{pmatrix} P([X_n=1]) \\ P([X_n=2]) \\ P([X_n=3]) \end{pmatrix}$ on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $P([X_n=k]) = \frac{1}{5^{k-1}}M^{k-1}C_1$

Cependant on a: $M^{k-1} = a_{k-1}M + b_{k-1}I = \frac{1}{3}(5^{k-1} - 2^{k-1}) + \frac{1}{3}(5\times2^{k-1} - 2\times5^{k-1})$

$= \frac{1}{3}(5^{k-1} - 2^{k-1} + 5\times2^{k-1} - 2\times5^{k-1})$

11(a) $E(X_n) = \sum_{k=1}^{3} nP([X_n=k]) = n\times\ldots$

PARTIE 4

12. La requête SQL affichera le nom des chats ayant une puce grise avec comme sexe F.

13. SELECT idprop 1234 FROM proprietaires WHERE nomchat : "Niels" AND puchat : 987654321

14. SELECT "Niels" ~~AS~~ FROM chats WHERE iddrop : 457 , sexe : M, couleur : [illegible]

~~18. SELECT~~ âge : 1, poids : 2.

15 SELECT chats. nomchat, race, puce, nomprop, adresse FROM proprietaires JOIN ON chat. puce = proprietaire. puce chat.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.99 / 20

EXERCICE 2

PARTIE 1

1. Comme f et g sont derivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme de fonctions derivable on a:

- $f'(x) = e^{x} - e^{-x}$

$= g(x)$

- $g'(x) = e^{x} - (-e^{-x})$

$= e^{x} + e^{-x}$

$= f(x)$

En resume on a:

$\boxed{g(x) = f'(x) \text{ et } g'(x) = f(x)}$

2a) On a:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Par somme on a : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = +\infty}$.

- On a $\lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

(b) On a : $g'(x) \geqslant 0$

On a donc d'après LAGRANGE:

x	$-\infty$	$+\infty$
		$\nearrow$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3(a) $g(x) = 0$

On voit que :

$e^{x} - e^{-x} = 0 \iff x = 0$ car $e^{0} - e^{-0} = 1 - 1 = 0$.

(b) signe de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

(c) Comme $g(x) = f'(x)$, on a : les variations de f qui sont données par le tableau des signes de g. D'où on a d'après LAGRANGE.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variation f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = e^{0} + e^{-0} = 1+1 = 2$.

d) Comme $f'(x) = g(x)$, on a : $f''(x) = g'(x)$. Donc le signe de $g'(x)$ nous donnera la convexité de ~~g~~ f. Or comme ~~$g'(x) = f''(x)$~~ $f''(x) = g'(x) > 0$

On a f qui est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

4. g' est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables. Il vient :

$g''(x) = f'(x) = g(x) = e^{x} - e^{-x}$

$$\boxed{g''(x) = e^{x} - e^{-x}}$$

signe de $g''(x)$ x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$	0	$+$	
convexité		concave		convexe.	

g est donc concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Elle admet également un point d'inflexion en 0.

5. $y_g = g'(0)(x-0) + g(0)$

$= 2x + 0$

$\boxed{y_g = 2x}$

(b) Comme g est concave sur $\mathbb{R}_-$, la $\mathcal{C}_g$ sera placée ~~endessous~~ au-dessus de(T)
mais sur $\mathbb{R}_+$ elle y sera placée endessous car elle y est convexe.

(c) Comme (T) : $2x$ et qu'elle est concave sur $\mathbb{R}_-$, on a bien $g(x) \leqslant 2x$
or sur $\mathbb{R}_+$ on a $g(x) \geqslant 2x$.

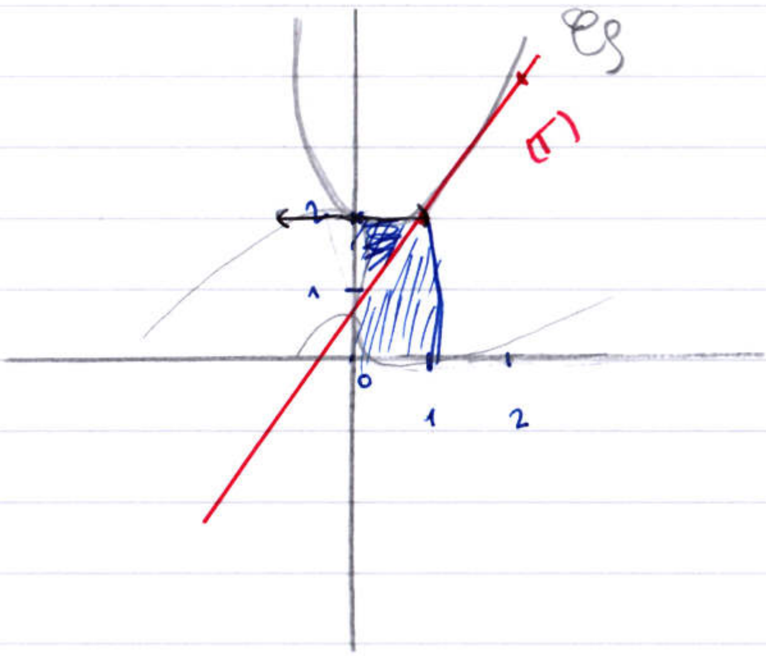
6(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ mais que $g(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ mais $g(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

Par transitivité $f(x) \geqslant g(x)$.

(b) $\mathcal{C}_f$ sera placée au dessus de $\mathcal{C}_g$.

7.



8. (a)(b)(c)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = [g(x)]_0^1 = g(1) - g(0) = e - \frac{1}{e} - 0 = e - \frac{1}{e}$$

9.(a) Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a:

$h'(x) = f'(x) - 0 - 2x$

$\boxed{h'(x) = e^{x} - e^{-x} + 2x}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom N G U Y E N

Prénom (s) F L O R A

19.99 / 20

écricome Épreuve : Mathematiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 4 /

Numéro de table 0 1 5

Commencez à composer dès la première page...

(b) ~~Comme $k'(x) = g(x) + x$~~

En admettant avoir trouvé que $g(x) \geq 2 + x^2$.

(c) K est derivable en tant que somme de fonctions derivables sur $\mathbb{R}$.

Il vient :

$K'(x) = g'(x) - 2 - 3 \times \frac{1}{3} \times x^2$

$\boxed{K'(x) = g'(x) - 2 - x^2}$

(d)

PARTIE 2

10. Comme $\frac{1}{n} > 0$ car $n > 0$, on sait que l'equation $g(x) = \frac{1}{n}$ admettra une solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Or comme g est continue (car derivable) et est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ elle realise donc une bijection de $]0, +\infty[$, dans $[0; +\infty[$ càd de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc l'equation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

11. $g(u_1) = 1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = e - \frac{1}{e}$

par croissance de g sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est conservé, on a donc bien

$g(0) < g(u_1) < g(1)$

soit $0 < u_1 < 1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.99 / 20

12. On sait que $g(u_n)$ est minoreè par 0, donc on a bien par croissance de g $u_n \geq 0$.

13. (a) (u_n) est decroissante ssi $u_{n+1} \leq u_n$, or comme $g(u_{n+1}) \leq g(u_n)$ on a bien $u_{n+1} \leq u_n$.

(b) On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc (u_n) est convergente et elle converge vers 0.

14. import numpy as np
*
```
def d(x):
    return np.exp(x) - np.exp(-x) - 1/n
```
* int(input "Entrez un entier naturel n non nul").

(b)
```
def Suit U(n):
U=np.zeros(n)
for K in range(n):
a=0  ; b=1
while b-a >10**-3:
  c=(a+b)/2
  if d(a, K+1)xd(c, K+1)<0:
      b=c
  else a=c
U(K)= ~~Q~~ ~~b/4~~ d(K)
```

(c) la conjecture qu'on peut emettre est que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 3

1(a) Comme $T \hookrightarrow \exp(1)$, on a sa densite qui est donnée par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On a $\boxed{E(T) = 1 \quad \text{et} \quad V(T) = 1}$

(b)

$$\boxed{T(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

(c) On cherche donc à calculer :

$$P([T \leqslant 3]) = T(3) = 1 - e^{-3} = 1 - \frac{1}{e^3}$$

Donc la probabilité qu'il vive au plus de 3 jours et de $1 - \frac{1}{e^3}$.

(d) On cherche :

$$P_{[T \geqslant 1]}[P([T \geqslant 2]) = \cancel{\frac{P(1 \leqslant T \leqslant 2)}{1 - T(1)}} \cancel{=} \cancel{\frac{T(2) - T(1)}{1 - T(1)}} =$$

$$= \frac{P([T \geqslant 2])}{P([T \geqslant 1])}$$

$$= \frac{1 - T(2)}{1 - T(1)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{e^2}}{-\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{1}{e^2} \times e$$

$$= \frac{1}{e}$$

2.(a) densité de U

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \cancel{x \leq 0} \; x < 0 \\ \cancel{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad \cancel{x \geq 1} \; x > 1 \end{cases}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$

$P([X \leq x]) = \underbrace{P(-\ln(U) \leq x])}_{\text{(d'après la déf de X)}} = P([\ln(U) \geq -x]) = \underbrace{P([U \geq e^{-x}])}_{\text{par croissance de l'exp.}}$

Donc on a bien :

$P(U \geq e^{-x}]) = P([X \leq x])$

(c) Soit $x < 0$

On a $P(U \geq e^{-x}]) = 1 - P([U \leq e^{-x}]) = 1 - U(e^{-x}) = 0$ si $P([X < x])$.

(d) $F(x) = P([X \leq x]) = \cancel{P(U \leq}$ $P(U \geq e^{-x}]) = U(e^{-x})$

$$U(e^{-x}) = F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & e^{-x} < 0 \\ e^{-x} \text{ si } & 0 \leq e^{-x} \leq 1 \\ 1 \text{ si } & e^{-x} > 1 \end{cases}$$

n'existe pas.

en résumé on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } & x < 0 \\ e^{-x} \text{ si } & \cancel{0 \leq x} \; x \geq 0 \end{cases}$$

Donc une densité de X sera donnée par : $F'(x) =$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ -e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$$

(e) import numpy as np

import numpy as rp.

~~#=~~ def SimulT

```
T=0
if rd.random() < p
T=0
else
T=T+1.
```

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted]

Signature

Nom NGUYEN

Prénom (s) FLORA

19.99 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 05

Numéro de table 015

Commencez à composer dès la première page

PARTIE 2

3(a) $I_1(A) = \int_0^A e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^A = -e^{-A} + e^{-0} = 1 - e^{-A}$

(b) On a: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A\to+\infty} I_1(A) = 1 - 0 = 1.$

Donc on a bien $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ qui converge et vaut 1.

4. Posons

$\begin{cases} u(x) = e^{-x} \text{ d'où } u'(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = x^{n-1} \text{ d'où } v(x) = \frac{x^n}{n} \end{cases}$

Comme u, v, v', u' sont ~~de~~ continues sur $\mathbb{R}_+^*$, on a par intégration par parties :

$\int_0^A e^{-x} x^{n-1} = \left[e^{-x} \times \frac{x^n}{n}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-x} \frac{x^n}{n}$

$I_n(A) = e^{-A} \times \frac{A^n}{n} + n \times I_{n+1}(A)$

$= \frac{A^n}{e^A} \times n + n\, I_{n+1}(A)$

$I_n(A) = n\left(\frac{A^n}{e^A} + I_{n+1}(A)\right)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.99 / 20

en admettant avoir trouvé $I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + nI_n(A)$.

5. Comme $I_{n+1}(A) \geq I_n(A)$ et que $\lim_{n \to +\infty} I_n(A) = 1$ d'après (b).
on en déduit que $I_{n+1}(A)$ converge aussi.

6. Notons w_n ~~l'égalité~~ l'affirmation $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}$ converge.

Initialisation

Comme d'une part I_1 ~~conv~~ vaut $1 - e^{-A}$ et que $\lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-A}$ converge. on a bien w_1 qui est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

~~Supposons que w_n converge est vraie et montrons w_{n+1}~~

Supposons que w_n soit vraie et montrons que w_{n+1} serait encore vraie, or comme d'après l'hypothèse de récurrence I_n converge et que d'après la 5., si I_n converge alors I_{n+1} aussi, on en déduit que w_{n+1} est encore vraie.

Conclusion

A l'aide d'un raisonnement par récurrence on a montré que pour tout entier n non nul, I_n converge.

6. Comme I_n converge on a :

~~$\lim_{n\to+\infty} n I_n$~~ nI_n qui converge.

PARTIE 3.

8. <u>positivité</u>

. Comme f_n est nulle sur $]-\infty;0[$, elle y est positive en tant que constante positive

. De plus on a $e^{-x}>0$, $x^{n-1}>0$ quand $x>0$, et $\frac{1}{(n-1)!}>0$ quand $x>0$, donc par produit $\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}\geqslant 0$.

Donc f_n est positive sur $\mathbb{R}$.

<u>Continuité</u>

. Sur $]-\infty;0[$, f_n est continue en tant que constante (ici nulle)

. Sur $[0;+\infty[$ elle est continue en tant que produit de fonctions continues

~~de plus~~

Donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0.

<u>convergence de l'intégrale généralisée</u>

Comme f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a $\int_{-\infty}^{0} f_n(x)$ qui converge et vaut 0.

De plus sur $[0;+\infty[$ sous réserve de convergence on a :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\cancel{\ } I_n = \frac{1}{(n-1)!}\times(n-1)! = 1 \text{ (d'après 7 (réponse admise))}$$

Donc on a bien : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ qui converge et vaut 1. Donc f_n est une densité de probabilité

9. (a) On sait que Y admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)$ converge et $E(Y)$ sera donnée par cette valeur.

Comme f_n est nulle sur $\mathbb{R}^-$, on a : $\int_{-\infty}^{0} x f_n(x)$ qui converge et vaut 0.

Il faut donc prouver que : $\int_{0}^{+\infty} x f_n(x)$ converge.

Sous réserve de convergence,

on a :

$$\int_0^{+\infty} x f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = \frac{1}{(n-1)!} I_{n+1} = \frac{1}{(n-1)!} n I_n \quad \text{(d'après 6.)}$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} \quad \text{(d'après 7.)}$$

$$= n$$

Donc on a bien Y qui admet une espérance qui est donnée par : $E(Y) = n$

(b) On a : $E(F_n) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(Y_n)\right)$

par linéarité on a :

$$E(F_n) = \frac{1}{N} \times E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_N\right)$$

$$= \frac{1}{N} \times E(Y_N)$$

$$= \frac{1}{N} \times N$$

$$= \frac{N}{N}$$

$$E(F_n) = 1$$

(c)