NATHAN

Note de délibération : 18.47 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) N A T H A N

18.47 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 1 / 0 9

Numéro de table 2 7

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1)

E_{O_3} est l'ensemble des matrices telles que $O_3 M + M O_3 = O_3$

Or $O_3 M = O_3$ et $M O_3 = O_3$

D'où $E_{O_3} = M_3(\mathbb{R})$

E_{I_3} est l'ensemble des matrices telles que $I_3 M + M_3 I = O_3$

$I_3 M + M I_3 = O_3 \Leftrightarrow 2M = O_3$

$\Leftrightarrow M = O_3$

Donc $E_{I_3} = O_3$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

2)

Soit $C \in M_3(\mathbb{R})$, $CM + MC = 0_3$

Soit $J \in M_3(\mathbb{R})$, $JM + MJ = 0_3$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda C + J)M + M(\lambda C + J) = \lambda CM + JM + \lambda MC + MJ$

$= \lambda(CM + MC) + JM + MJ$

Or $CM + MC = 0_3$ et $JM + MJ = 0_3$

Donc $(\lambda C + J)M + M(\lambda C + J) = 0_3$

E_c est donc stable par addition interne et par multiplication par un réel

Donc E_c est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

3)

Soit $M \in E_A$, c'est-à-dire $AM + MA = 0_3$

${}^tMA = -A\,{}^tM$

${}^tMA + A\,{}^tM = 0$

Donc si $M \in E_A$, alors ${}^tM \in E_A$

4.a)

<u>A est symétrique donc diagonalisable</u>

4.b)

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1-\lambda \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} L_2 \leftarrow -2L_2 - (1-\lambda)L_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+4 & -2+2\lambda \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} L_3 \leftarrow (-\lambda^2+\lambda+4)L_3 - 2L_2$$

$$(-\lambda^2+\lambda+4)(-1-\lambda) - 2(-2+2\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 4 + \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4\lambda$$
$$= \lambda^3 - 9\lambda$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+4 & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3-9\lambda \end{pmatrix}$$

<u>Alors, si λ est valeur propre, $\lambda^3 - 9\lambda = 0$</u>

4.c)

On sait que si λ est valeur propre alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$
Cherchons les solutions de cette équation.

$\lambda^3 - 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \{0; 3; -3\}$

Alors $spec(A) = \{-3; 0; 3\}$
Donc les valeurs propres de A sont -3 ; 0 ; 3

Cherchons $\ker(A+3I)$ pour avoir le sous espace propre de A associé à -3
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(A+3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4y + 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \quad L_3 = 2L_2 \end{cases}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) NATHAN

Signature

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 09

Numéro de table 27

Il reste alors :

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

Posons $y = \alpha$

On a donc

$$\begin{cases} 4x = 2\alpha \\ 4z = -4\alpha \\ y = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(A+3I) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2} ; 1 ; -1\right)$

$= \mathrm{Vect}(1 ; 2 ; -2)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

Cherchons maintenant $\ker(A)$ pour avoir le SEP de A associé à 0

$AX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ -2x+2z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ -4y+2z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ $L_3 = -2L_2$

Il reste:

$\begin{cases} x-2y=0 \\ -4y+2z=0 \\ y=\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha \\ 2z=4\alpha \\ y=\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2\alpha \end{cases}$

Donc $\ker(A)$ est le sous espace propre associé à 0 et

$\ker(A) = \mathrm{Vect}(2; 1; 2)$

~~$= \mathrm{Vect}(1; \frac{1}{2}; 1)$~~

Cherchons enfin $\ker(A-3I)$ pour avoir le SEP de A associé à 3

$(A-3I)X=0 \iff \begin{cases} -2x-2y=0 \\ -2x-3y+2z=0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2y-4z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2x-2y=0 \\ -y+2z=0 \\ 2y-4z=0 & L_3 = -2L_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2x-2y=0 \\ -y+2z=0 \\ y=\alpha \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\frac{1}{2}\alpha \end{cases}$

Alors $\ker(A-3I) = \mathrm{Vect}(-1; 1; \frac{1}{2})$

~~$= \mathrm{Vect}(1; 1; -\frac{1}{2})$~~ $= \mathrm{Vect}(-2; 2; 1)$

On a donc $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

D'après la formule de changement de base, on a

$A = PDP^{-1}$ puisque P est une matrice de passage, donc inversible.

D'où $P^{-1}AP = D$

5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$P^2 = 9I$

$\frac{1}{9} P^2 = I$

$P\left(\frac{1}{9} P\right) = I$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{9} P$

6.a)

Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) N A T H A N

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 *(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)*

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 27

Signature

N appartient à $E_D \iff DN+ND=0_3$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$DN = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix}$$

$$DN+ND=0 \iff \begin{pmatrix} -3a-3a & -3b & -3c+3c \\ -3d & 0 & 3f \\ 3g-3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

$DN + ND = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \alpha \\ d = 0 \\ e = \beta \\ f = 0 \\ g = \gamma \\ h = 0 \\ i = 0 \end{cases}$

Donc $N \in E_D \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.b) Soit $B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Cherchons la liberté rapidement:

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

B est donc une famille libre et génératrice, c'est donc une base de E_D et $\dim B = 3$

7.a)

Soit $N = P^{-1}MP$

$M \in E_A \Leftrightarrow AM + MA = 0$

Or $N = P^{-1}MP$

Donc $PNP^{-1} = M$

Donc $M \in E_A \Leftrightarrow A \cdot PNP^{-1} + PNP^{-1}A = 0$

Or $A = PDP^{-1}$.

Donc $M \in E_A \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow P(DN + ND)P^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow DN + ND = 0$

$M \in E_A \Leftrightarrow N \in E_D$

7.b)

Soit B' une base de E_A

$B' = \text{Vect}\left(P; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; P^{-1}\right)$

8) $(A+M)^2 = A^2 + M^2 \Leftrightarrow A^2 + 2AM + M^2 = A^2 + M^2$

$\Leftrightarrow 2AM = 0_3$

Donc, l'ensemble des matrices M vérifiant $(A+M)^2 = A^2 + M^2$ est l'ensemble des matrices telles que $2AM = 0$ avec A et $M \neq 0$

9) $\varphi(M) = AM + MA$

$rg(\varphi) = dim(I_m(\varphi))$

$I_m(\varphi) = Vect(\varphi($

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) NATHAN

18.47 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 09

Numéro de table 27

Exercice 2.

1.a)

$$t^2 \cdot t^n e^{-t} = t^{n+2} e^{-t}$$
$$= \frac{t^{n+2}}{e^t}$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^{n+2}}{e^t} = 0$ par croissances comparées

alors $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après les critères de Riemann

Donc $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge

et sur $[0;1]$, $t^n e^{-t}$ est continue en tant que produit et composée de fonctions continues sur $[0;1]$

Donc $\int_0^1 t^n e^{-t} dt$ existe

Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

1.b)

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$

$\int_0^A e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^A$

$= -e^{-A} + 1$

$\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A}\ 0$

Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$

D'où $I_0 = 1$

$I_1 = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\, dt$

$u' = e^{-t} \quad v = t$

$u = -e^{-t} \quad v' = 1$

u et v sont de classe C^1

$\int_0^A t e^{-t}\, dt = [-e^{-t} \cdot t]_0^A - \int_0^A -e^{-t}\, dt$

$= -e^{-A} \cdot A + \int_0^A e^{-t}\, dt$

$\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} \cdot A = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t}\, dt = I_0$

D'où $I_1 = 1$

2) $t^2 \frac{e^{-t}}{1+xt} = \frac{t^2}{e^t(1+xt)}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t(1+xt)} = 0$ par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\frac{e^{-t}}{1+xt}}{\frac{1}{t^2}} = 0$

D'où $\frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Or d'après les critères de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ converge.

Sur $[0, 1]$, $\frac{e^{-t}}{1+xt}$ est une fonction continue en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas

Donc $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ existe

Et d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ existe

3) $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

$= I_0$

$F(0) = 1$

4)

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $x \leq y$

$tx \leq ty$ car $t \in [0, +\infty[$

$1 + tx \leq 1 + ty$

$\frac{1}{1+tx} \geq \frac{1}{1+ty}$ car la fonction inverse est décroissante

$\frac{e^{-t}}{1+tx} \geq \frac{e^{-t}}{1+ty}$ puisque $e^{-t} > 0$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+ty}$ On intègre dans le sens croissant

$F(x) \geq F(y)$

Alors, on peut en déduire que F est décroissante

5.a)

Pour $x = 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \int_0^1 1 \, dt$

$= 1(1-0)$

$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = 1$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) NATHAN

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 09

Numéro de table 27

Pour $x > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\left[\ln(1+xt)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x}\ln(1+x) - \frac{1}{x}\cdot\ln(1)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

5. b)

$0 \leq t \leq 1$

$0 \geq -t \geq 1$ on multiplie par -1 qui est négatif

$1 \geq e^{-t} \geq e$ On applique l'exponentielle qui est > 0

$$\frac{1}{1+xt} \geq \frac{e^{-t}}{1+xt} \geq \frac{e}{1+xt}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq \int_0^1 \frac{e}{1+xt}$$ On intègre dans le sens croissant.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

Or $\int_0^1 \frac{e}{1+xt} dt$ est positive puisque $e \simeq 2,72$ et $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt \geq 0$

Donc, on a bien $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$

5.c)

5.d)

$\forall t \in [0;1]$, $F(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+xt} = 0$

Donc, d'après le théorème d'encadrement et $\forall t \in [0;1]$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

$\forall t \geq 1$, $F(x) \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = 0$

Donc d'après le théorème d'encadrement et $\forall t \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

6.a)

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1 - xt)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1 - xt)(1 + xt)}{1 + xt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1 - (xt)^2)}{1 + xt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - (1 - (xt)^2))}{1 + xt}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(x^2 t^2)}{1 + xt}\, dt$$

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + xt)\, dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^2}{1 + xt}\, dt$$

6.b)

$$f(x) - I_0 + xI_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t} + xt\,e^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1+xt} - 1 + xt\right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1 - 1 - xt + xt(1+xt)}{1+xt}\right) dt$$

$$f(x) - I_0 + xI_1 = \int_0^{+\infty} \frac{(xt)^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

$$x^2 I_2 = \int_0^{+\infty} x^2 t^2 e^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (xt)^2 e^{-t}\,dt$$

Ainsi, par comparaison d'intégrales positives, on a bien

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{(xt)^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^{+\infty} (xt)^2 e^{-t}\,dt$$

$$0 \leq f(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) NATHAN

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 27

7.a)

$I_0 = 1$ et $I_1 = 1$ d'après 1.b

Alors $xI_1 = x$

~~Or $\lim_{x\to+\infty} x^2 I_2 = 0$ car d'après 1.a), $I_n = o\left(\frac{1}{x}\right)$~~

$\lim_{x\to 0} x^2 I_2 = 0$

Donc $\lim_{x\to 0} F(x) - I_0 + xI_1 = 0$

D'où $\lim_{x\to 0} F(x) = I_0 - xI_1$

$= 1 - x$

Donc $F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$

7.b)

$\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - x + o(x) - 1}{x}$

$= \dfrac{-x + o(x)}{x}$

$= -1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

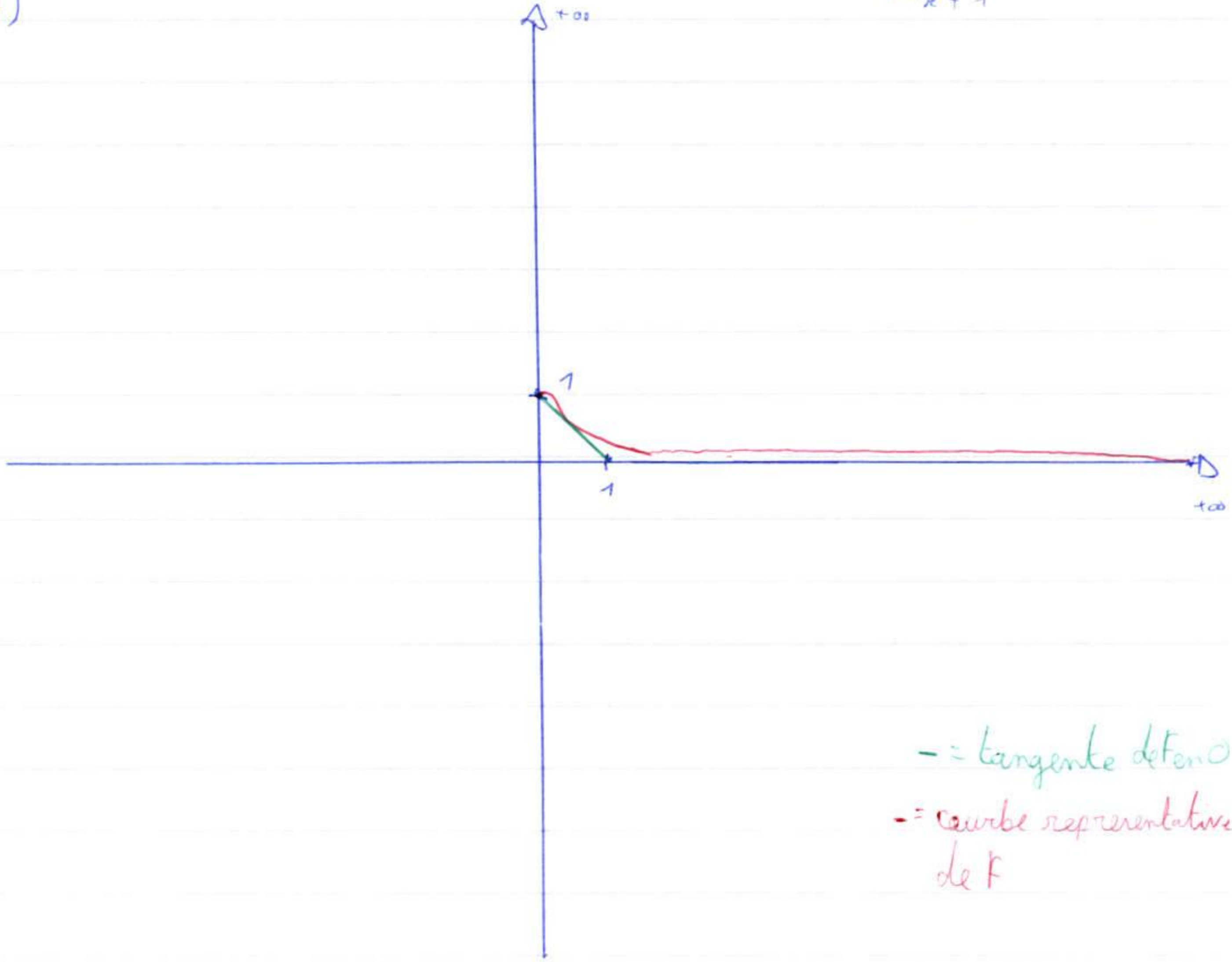
18.47 / 20

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

en 0, $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
$= -x + 1$

8)



- = tangente de f en 0

- = courbe representative de f

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) NATHAN

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 27

Exercice 3

Partie I

1. $\forall i \in [1;n]$, f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 1:

- elle l'est en tant que quotient de fonctions continues dont le denominateur ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$
- elle l'est en tant que fonction nulle sur $]-\infty;1[$

$\forall (i,x) \geq 0$, $\frac{i}{x^{i+1}} > 0$

Alors $f_i(x)$ est strictement positive sur $[1;+\infty[$

et sur $]-\infty;1[$, $f_i(x)$ est nulle

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_i(x) \geq 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

f_i est nulle sur $]-\infty; 1[$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx$

$\int_1^A f_i(x)\,dx = \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$

$= i \int_1^A x^{-(i+1)}\,dx$

$= i \left[\frac{x^{-i-1+1}}{-i-1+1} \right]_1^A$

$= i \left(\frac{A^{-i}}{-i} - \frac{1}{-i} \right)$

$= -A^{-i} + 1$

$\lim_{A \to +\infty} -A^{-i} = 0$

Donc $\int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx$ existe et vaut 1

Alors f_i peut être considérée comme une densité de probabilité

2.a) X_i admet une espérance ssi $\int_1^{+\infty} x \cdot f_i(x)\,dx$ converge

$$\int_1^A x\, f_i(x)\, dx = i \int_1^A \frac{1}{x^i}\, dx$$

$$= i \int_1^A x^{-i}\, dx$$

$$= i \left[\frac{x^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A$$

Alors, $E(X_i)$ existe $\forall i \in]1; n]$

$$i \cdot \frac{A^{-i+1}}{-i+1} - i \frac{1}{-i+1}$$

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{A^{-i+1}}{-i+1} = 0$$

Donc $E(X_i) = \dfrac{-i}{-i+1}$

$$E(X_i) = \frac{i}{i-1}$$

2.b)

Soit $g(i) = \dfrac{i}{i-1}$

$$g'(i) = \frac{i-1-i}{(i-1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(i-1)^2}$$

i	1		n
$g'(i)$	‖	$-$	
$g(i)$	‖	$\searrow$	$\frac{n}{n-1}$

Alors, les catégories socioprofessionnelles dont le revenu moyen est maximal sont les premières et celles dont le revenu mensuel moyen est minimale sont les dernières, comme par exemple la $n-1$-ième ou la n-ième.

3)

$$\forall x < 1, \; F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0 \, dx$$

$$\forall x < 1, \; F_i(x) = 0$$

$$\forall x \geq 1, \; F_i(x) = F_i(1) + \int_{1}^{x} f_i(x)\,dx$$

$$= 0 + \int_{1}^{x} \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$$

$$= 0 + i\left(\frac{-x^{-i}}{-i} + \frac{1}{i}\right) \text{ d'après la question 1}$$

$$\forall x \geq 1, F_i(x) = -\frac{1}{x^i} + 1$$

Donc, $F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

4) a)

$$P(V_i \leq x) = P\left(U^{\frac{1}{i}} \leq x\right)$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) NATHAN

Signature

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table 27

$P(V_i \leq x) = P\left(U^{1/i} \geq \frac{1}{x}\right)$

$= P\left(U \geq \left(\frac{1}{x}\right)^i\right)$

$= P\left(U \geq \frac{1}{x^i}\right)$

$P(V_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Donc V_i suit bien la même loi que X

4.b)

```
Import numpy as np
def simulX(i):
    for x in range(1,n+1):
        X= i/x**(i+1)
return X
```

Partie II

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

5)

~~k = np.randint(1, n+1)~~
~~Y = fact(k)/~~

```
def factorielle(n):
    if n=0:
        return 1
    elif:
        for k in range(1; n+1):
            n =+ n*k
return n

import numpy as np
import numpy random as rd
def simulY(n,p):
    k= np.randint(1,n+1)
    Y= factorielle(n)/(factorielle(k) * factorielle(n-k)) *
        p**(k) * (1-p)**(n-k)
return Y
```

6)

```
def loiY(n,p):
    N= 10 000
    loi =[0] * n
    for k in range(1; n+1)
        y= simul Y(n,p)
        loi[k,p] = p
    return loi
```

7)

/

8.a)

La clé primaire doit vérifier si la table comporte l'attribut spécifié

8.b)

- Pour la table individu, l'attribut i- nom pourrait être une clé primaire

- d - numéro pour la table département

- p- pcs pour la table profession

8.c)

8.d)
~~SELECT DISTINCT p_pcs WHERE~~
~~FROM profession~~

```
SELECT 28
FROM departement
SELECT DISTINCT p_pcs
FROM profession
```

8.e)
```
SELECT i_insee
FROM individu
SELECT p_catégorie
FROM profession
```

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) NATHAN

Signature

18.47 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 09

Numéro de table 27

Partie III)

9. $\forall x < 1,\ G_n(x) = P(G_n \leqslant x)$

$\forall x < 1,\ G_n(x) = 0$ car $\forall x < 1,\ F_i(x) = 0$

10.a)

Si on a choisi la catégorie numéro i, alors la probabilité que le revenu soit inférieur ou égal à x, c'est à dire $P_{(Y=i)}(Z_n = x)$

est égale à la probabilité que le revenu soit inferieur ou égal à x dans la catégorie socio-professionnelle i. D'où

$P_{(Y=i)}(Z_n \leqslant x) = F_i(x)$

10.b)

$G_n(x) = P(Z_n \leqslant x)$. Soit le système complet d'évenement suivant :

$\{(Y=k)\ \forall k \in [\![0; n-1]\!]$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.47 / 20

d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(Z_n \leq x) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{(Y=k+1)}(Z_n \leq x) \cdot P(Y=k)$$

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \cdot \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

10.c)

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$=$

11)

$G_n(x)$ est une fonction continue $\forall x \geq 1$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$

G_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 en tant que quotient et différence de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^*$
Alors, Z_n est une variable aléatoire à densité

12)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd.
def sondage(n,p):
        Y= simul Y(n-1,p
        Z= simul X(Y)
return Z.
```

13.a)

Soit $p = \frac{1}{n}$, alors $G_n(x) = \cancel{1 - \frac{\left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n}}$

$G_n(x) = \left(\frac{1-x}{n} + x\right)^{n-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$

$= \left[\left(\frac{1-x}{n} + x\right) \cdot \frac{1}{x}\right]^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$

$= \left(\frac{1-x}{nx} + 1\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$

D'où $G_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 1 \\ = 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$\cancel{1 - \frac{1}{x}\left(\frac{\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x}{x}\right)^{n-1}}$

$\cancel{1 - \frac{1}{x}\left(\frac{\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x}{x}\right)^{n-1}}$

$\cancel{G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}}$

$$\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)}$$

Or $\ln(1-x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$

Donc $e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)} \sim e^{(n-1)\ln\left(\frac{x-1}{nx}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x-1}{nx} = 0 \\ \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} e^{(n-1)\ln\left(\frac{x-1}{nx}\right)} = 0$$ par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$ si $x \geq 1$

Ainsi, $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi certaine de fonction de répartition :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$