GRANDJEAN

ANTOINE

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) A N T O i N E

Signature

20 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 1 / 0 5

Numéro de table 0 1 3

exercice 1 : Partie 1 :

1)a) $J = M - 2i = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $J^2 = J \times J =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J \end{array}$$

On a $J^2 = 3J$

c) $M^2 = M \times M =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M^2 = 7J + 4i$ ou $M^2 = 2J^2 + J + 4i$

d) $7M - 10i = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} = M^2$

on a bien $M^2 = 7M - 10i$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2)a) $R(M) = M^2 - 7M + 10\,i$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 0$$

$R(M) = 0$ donc le polynome R est un polynome annulateur de M.

b) On cherche $R(x) = 0$ donc $x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

Donc 2 est une racine de R ainsi que 5

c) Les valeurs propres possible de M sont les racines de R car c'est son polynome annulateur donc les valeurs propres possible sont 2 et 5

3) $MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$ donc U est un vecteur propre de M et sa valeur propre associé est 5.

4) $MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V$ donc V est un vecteur propre de M et sa valeur propre associé est 2.

$MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2W$ donc W est un vecteur propre de M et sa valeur propre associé est 2.

5) a) $QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3i$

b) $QP = 3i$ donc P est inversible

$P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

c) $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On a bien $PD = MP$

d) On note P(n) la propriété $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

initialisation: au rang 0 on a $M^0 = i$ et $\frac{1}{3} P D^0 Q = \frac{1}{3} P i Q$
$= \frac{1}{3} PQ = i$ d'après 5b

donc P(0) est vrai

Hérédité : on suppose qu'à un certain rang n P(n) s'applique : $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$
on vérifie que P(n+1) s'applique: $M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$

$M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$ $\qquad M^{n+1} = \frac{1}{3} P D D^n Q$

$M M^n = M \frac{1}{3} P D^n Q$

$M^{n+1} = \frac{1}{3} MP D^n Q$ $\qquad M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$

P(n) entraine P(n+1) donc

P(n) est héréditaire

<u>conclusion:</u> P(0) est vrai et P(n) est héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$$

<u>Partie 2:</u>

<u>6)a)</u> $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5a_{n+1} + b_{n+1}}{5a_n + b_n} = \frac{5(7a_n + b_n) - 10a_n}{5a_n + b_n} = \frac{35a_n + 5b_n - 10a_n}{5a_n + b_n}$

$= \frac{5(5a_n + b_n)}{5a_n + b_n} = 5$ $\quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = 5$ donc U_n est géométrique de raison $q = 5$

On a alors $U_n = U_0 \times q^n$ avec $U_0 = 5a_0 + b_0$

$U_n = 1 \times 5^n$ $\quad = 5(0) + 1 = 1$

$U_n = 5^n$

et $q = 5$

<u>b)</u> $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-2a_{n+1} - b_n}{-2a_n - b_n} = \frac{-2(7a_n + b_n) + 10a_n}{-2a_n - b_n} = \frac{-14a_n - 2b_n + 10a_n}{-2a_n - b_n}$

$= \frac{2(-2a_n - b_n)}{-2a_n - b_n} = 2$ $\quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$ donc v_n est géométrique de raison $q=2$

On a alors $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 = -2a_0 - b_0$

$v_n = -1 \times 2^n$ $\quad = -2(0) - 1 = -1$

et $q=2$

c) $U_n + v_n = 3a_n$ $\quad 2U_n + 5v_n = -3b_n$

$\frac{1}{3}(U_n + v_n) = a_n$ $\quad -\frac{1}{3}(2U_n + 5v_n) = b_n$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) ANTOINE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 05

Numéro de table 013

exercice 1 : Partie 2 (suite) :

6) c) $\frac{1}{3}(u_n + v_n) = a_n$ $\qquad$ $-\frac{1}{3}(2u_n + 5v_n) = b_n$

$\frac{1}{3}\left(5^n + (-1 \times 2^n)\right) = a_n$ $\qquad$ $-\frac{1}{3}\left(2(5^n) + 5(-2^n)\right) = b_n$

$a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n)$ $\qquad$ $b_n = \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n)$

7) On note $P(n)$ la propriété $M^n = a_n M + b_n i$

initialisation : au rang 0 on a $M^0 = i$ et $a_0 M + b_0 i = 0M + 1i = i$
donc $P(0)$ est vrai

Hérédité : On suppose qu'à un certain rang n $P(n)$ s'applique $M^n = a_n M + b_n i$
on vérifie que $P(n+1)$ s'applique $M^{n+1} = a_n M + b_n i$

$$M^n = a_n M + b_n i$$
$$M M^n = M(a_n M + b_n i)$$

$$M^{n+1} = a_n M^2 + b_n iM$$

j'admet que $P(n)$ entraîne $P(n+1)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

conclusion: $P(0)$ est vrai et $P(n)$ est héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N} : M^n = a_n M + b_n i$

Partie 3:

8)a) On sait qu'au jour 1 le chat se nourrit dans la maison 1 et qu'il a $\frac{3}{5}$ chance de manger dans la même maison le lendemain donc le jour 2.

alors $P(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$. Le chat a également la possibilité de manger dans les maisons 2 ou 3 au jour 2 avec équiprobabilité

soit $\frac{3}{5} = 1 - [X_2 = 2] - [X_2 = 3]$

donc $P(X_2 = 2) = P(X_3 = 3) = \frac{1}{5}$

b) $E(X_2) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

c) $V(X_2) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{80}{25} - \frac{64}{25} = \frac{16}{25}$

avec $E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} = \frac{16}{5} = \frac{80}{25}$

écart type $= \sqrt{V(X_2)}$

$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

et $E(X)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$

l'écart type est de $\frac{4}{5}$

9)a)

X_3	1	2	3
$P(X_3 = k)$	11/25	7/25	7/25

$\Omega(X_3) = \{1;2;3\}$

$[X_2=1]; [X_2=2]; [X_2=3]$ forme un système complet d'événement

d'après la formule des probabilités totales:

$P(X_3 = 1) = P([X_2 = 1] \cap [X_3 = 1]) + P([X_2 = 2] \cap [X_3 = 1]) + P([X_2 = 3] \cap [X_3 = 1]$

$P(X_3=1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$

$P(X_3=2) = P([X_2=1] \cap [X_3=2]) + P([X_2=2] \cap [X_3=2]) + P([X_2=3] \cap [X_3=2])$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{25}$

$P(X_3=3) = P([X_2=1] \cap [X_3=3]) + P([X_2=2] \cap [X_3=3]) + P([X_2=3] \cap [X_3=3])$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$

b) $P_{[X_3=3]}(X_2=2) = \frac{P([X_3=3] \cap [X_2=2])}{P(X_3=3)} = \frac{1/25}{7/25} = \frac{1}{25} \times \frac{25}{7} = \frac{1}{7}$

La probabilité, sachant que le chat s'est nourri dans la maison 3 le 3ème jour, qu'il se soit nourrit dans la maison 2 le 2ème jour est de 1/7

10) a) $\frac{1}{5} M C_m = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_m=1) \\ P(X_m=2) \\ P(X_m=3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3P(X_m=1) + 1P(X_m=2) + P(X_m=3) \\ P(X_m=1) + 3P(X_m=2) + P(X_m=3) \\ P(X_m=1) + P(X_m=2) + 3P(X_m=3) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3/5\, P(X_m=1) + 1/5\, P(X_m=2) + 1/5\, P(X_m=3) \\ 1/5\, P(X_m=1) + 3/5\, P(X_m=2) + 1/5\, P(X_m=3) \\ 1/5\, P(X_m=1) + 1/5\, P(X_m=2) + 3/5\, P(X_m=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_{m+1}=1) \\ P(X_{m+1}=2) \\ P(X_{m+1}=3) \end{pmatrix}$

car la probabilité de manger dans une maison est égal à $\frac{3}{5}$ de la probabilité d'avoir mangé dans cette maison avant plus $\frac{1}{5}$ de chacune des autres maisons.

$C_{m+1} = \begin{pmatrix} P(X_{m+1}=1) \\ P(X_{m+1}=2) \\ P(X_{m+1}=3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} M C_m$

b) On note $P(n)$ la propriété $C_m = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

initialisation: au rang 1 on a $C_1 = \frac{1}{5^0} M^0 C_1 \rightarrow C_1 = C_1$

$C_1 = I C_1$ donc $P(1)$ est vrai

Hérédité : on suppose qu'à un certain rang n P(n) s'applique : $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

on vérifie que $C_{n+1} = \frac{1}{5^n} M^n C_1$

$$C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$$

$$\frac{1}{5} M C_n = \frac{1}{5} M \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{5} M^n C_1$$

P(n) entraîne P(n+1)

conclusion : P(0) est vrai et P(n) est héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

c) $\frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1 =$

$$\frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1} + 2^n & \cdots \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} & \cdots \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1} + 2^n \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

X_n	1	2	3
$P(X_n = k)$	$\left(1 - \frac{2^n}{5^{n-1}}\right) \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$	$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$

11) a) $E(X_n) =$ $1 \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^n}{5^{n-1}}\right) + 2 \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right) + 3 \times \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^n}{5^{n-1}}\right) + \frac{5}{3}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$$

b) $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2^n}{5^{n-1}}\right) + \frac{5}{3}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}\right)$

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{2^n}{5^{n-1}} = 1$ $\qquad$ $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}} = 1$

par produit $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) A N T O i N E

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 3 / 0 5

Numéro de table 0 1 3

Exercice 1 (suite) : Partie 4 :

12) renvoie le nom du chat et le numéro de puce des chats feminins, gris.

13)

14)

15) SELECT chats.nomchat, race, puce, nomprop, adresse
FROM chats INNERJOIN propriétaires
ON chat.puce = propriétaires.pucechat

Exercice 2 : Partie 1 :

1) $f'(x) = e^{x} - e^{-x} = g(x)$; $g'(x) = e^{x} + e^{-x} = f(x)$

2)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} - e^{-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - e^{-x} = +\infty$

b) $g'(x) = e^{x} + e^{-x} > 0$ la dérivé de g est positive donc g est croissante

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

20 / 20

3)a) $g(x) = 0$

$e^{x} - e^{-x} = 0$

$e^{x} = e^{-x}$

$\ln e^{x} = \ln e^{-x}$

$x = -x$

$2x = 0$

$x = 0$

g(x) s'annule lorsque $x = 0$

b) g est croissante et $g(x) = 0$ pour $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

c) $f'(x) = g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} + e^{-x} = +\infty$

$f(0) = e^{0} + e^{0} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} + e^{-x} = +\infty$

d) $f''(x) = g'(x) = f(x)$

le minimum de f est 2 pour $x = 0$ donc f est positive donc sa dérivé seconde (f) est positive. Donc f est convexe sur IR

4) $g''(x) = f'(x) = g(x)$

g est négative sur $]-\infty ; 0[$ et positive sur $]0 ; +\infty[$

donc g est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$, elle admet un point d'inflection en 0.

5) a) $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ avec $a = 0$ $g'(0) = f(0) = 2$

$= 2(x) + 0$ $g(0) = e^{x} - e^{-x}$

$y = 2x$ $= 1 - 1 = 0$

La droite d'équation $y = 2x$ est tangeante (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abcisse 0

b) $g(x) - y = e^{x} - e^{-x} - 2x$

On sait que $g(x)$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$ donc

y est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 0[$ et y est en dessous de g sur $]0; +\infty[$

c) On a bien $g(x) \leq 2x$ $\forall x < 0$ car $\mathcal{C}_g$ est en dessous de T sur cette intervalle.

on a bien $g(x) \geqslant 2x$ $\forall x > 0$ car $\mathcal{C}_g$ est au dessus de T sur cette intervalle

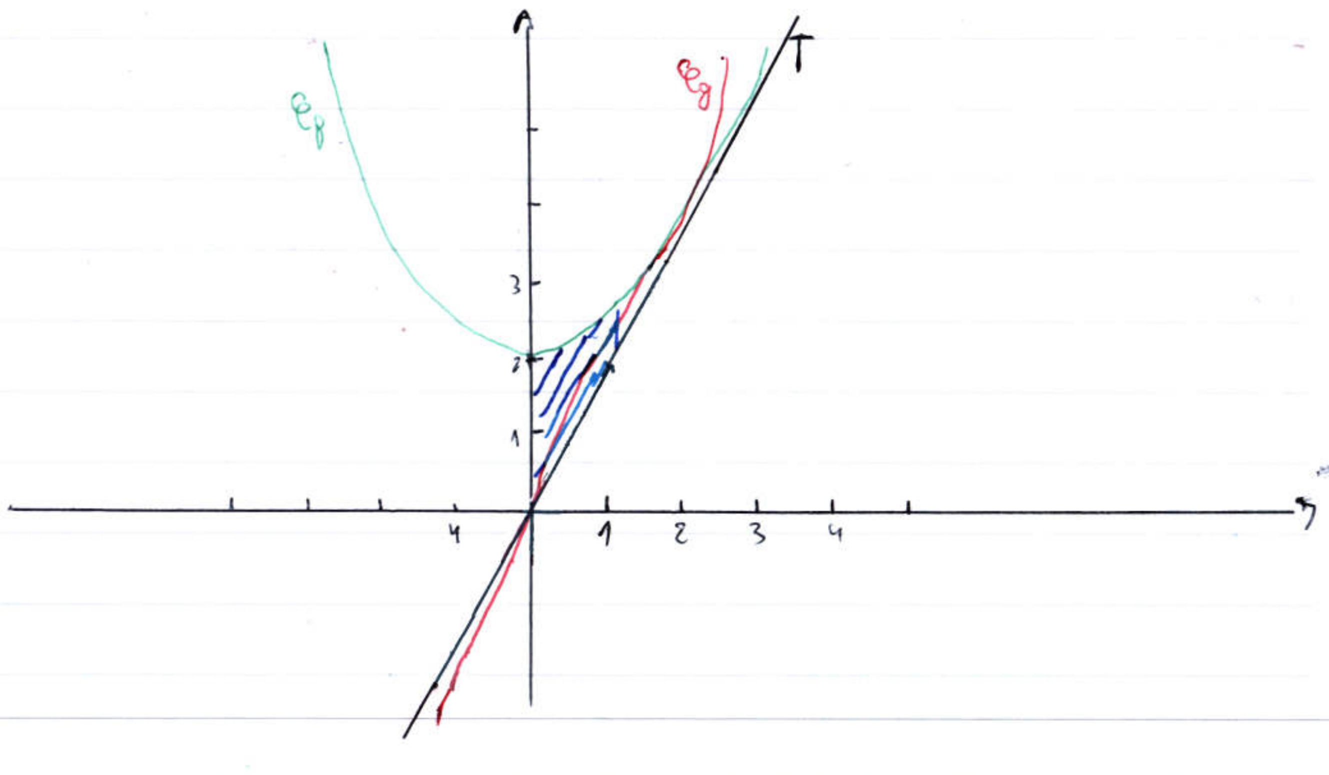
6) a) $f(x) - g(x) = e^{x} + e^{-x} - e^{x} + e^{-x}$

$= 2e^{-x} \geqslant 0$

$f(x) - g(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant g(x)$

b) On peut en déduire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$

7)



8) b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x + e^{-x}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$$= [e^x]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1$$
$$= e^1 - e^0 + (-e^{-1} + e^0)$$
$$= e - 1 - \frac{1}{e^1} + 1$$
$$= e + 1 - 1 - \frac{1}{e^1} = e - \frac{1}{e}$$

La surface comprise entre $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$ est de $e - \frac{1}{e}$ ua.

c) Cette aire correspond à $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 2x\,dx$

$\int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$

donc $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 2x\,dx = e - \frac{1}{e} - 1$

L'aire $\mathcal{A}$ est de $e - \frac{1}{e} - 1$ ua.

9) a) $h(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$

$h'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$

b) ~~J'admet que $f(x) \geq 2 + x^2$~~

$h''(x) = e^x + e^{-x} - 2$ et le minimum de $e^x + e^{-x}$ est 2 donc $f(x) \geq 2 + x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$

c) $k(x) = e^x - e^{-x} - 2x - \frac{1}{3}x^3$

$k'(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$

d) $k''(x) = e^x - e^{-x} - 2x$

d'après 5b $g(x) \leq 2x + \frac{1}{3}x^3 \ \forall x \leq 0$

et $g(x) \geq 2x + \frac{1}{3}x^3 \ \forall x \geq 0$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) A N T O i N E

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 05

Numéro de table 013

Signature

Exercice 2 (suite) : Partie 2 :

10) - $g(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

- $g(x)$ est continue c'est une somme de fonction exponentielle

- son intervalle image est $\frac{1}{n}$ appartient à cette intervalle.

D'après le théorème de bijection $= \frac{1}{n}$ admet une unique solution noté U_n

11) $g(U_1) = 1$

d'après le théorème de bijection :

$g(0) < g(U_1) < g(1)$

$e^0 - e^0 < g(U_1) < e^1 - e^{-1}$

$0 < g(U_1) < e^1 - e^{-1} \approx 2,3$

$0 < g(U_1) < e^1 - e^{-1}$

donc $0 < U_1 < 1$

12) $\frac{1}{n} > 0$ donc $g(x) > 0$ donc pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n > 0$

13) a) $U_{n+1} - U_n =$ j'admet qu'U_n est décroissante

b) U_n est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème d'encadrement elle converge.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

14)a) import numpy as np

```
    n = rd . randint
d(x,n)= exp(x) - exp(-x) - 1/(n)
    return (d)
```

b)
```
def SuiteU(n) :
    U = np. zero(n)
    for k in range(n):
        a=0  ;  b=1
        while b-a > 0 :
            c = (a+b)/2
            if d(a, k+1)* d(c, k+1) < 0 :
                b= b
            else :
                b= b-1
        U[k] =
    return (U)
```

c) la limite de $(U_n)_{n\geq 1}$ semble être 0

Exercice 3: Partie 1:

avec $\lambda = 1$

1)a) $f_T(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \; x<0 \\ e^{-x} & si \; x\geq 0 \end{cases}$ $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 1$ $\qquad V(T) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 1$

b) $F_T(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ avec $\lambda = 1$; $F_T(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<0 \\ 1-e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

c) $P(T \leq 3) = F_T(3) = 1 - e^{-3}$

d) $P_{[X \geq 1]}[X \geq 2] = \frac{P([X\geq 1] \cap [X \geq 2])}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X \leq 2)}{1 - P(X \leq 1)} = \frac{1-(1-e^{-2})}{1-(1-e^{-1})}$

$= \frac{1-1+e^{-2}}{1-1+e^{-1}} = \frac{e^{-2}}{\frac{1}{e}} = e^{-2} \times \frac{e}{1} = e^{-2} \times e$

2) a) $f_U(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$; $F_U(x) = \begin{cases} 0 & sinon \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \end{cases}$

$f_U(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & sinon \\ x & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

b) $P(U \geq e^{-x})$

$P(\ln(U) \geq \ln e^{-x})$

$P(-\ln(U) \leq x)$

et $-\ln(U) = X$ donc on a bien $P(X \leq x) = P(U \geq e^{-x})$

c) ~~P( )~~ $P(U \geq e^{-x}) = 1 - P(U \leq e^{-x})$

Partie II :

3) a) $i_1(A) = \int_0^A e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^A = -e^{-A} + e^0$

$= -e^{-A} + 1$

b) $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x}\,dx = \lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} + 1 = 0 + 1 = 1$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge et vaut 1.

4) $i_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x}\,dx$

on a $u'(x) = e^{-x}$ $\quad u(x) = -e^{-x}$

$v(x) = x^n$ $\quad v'(x) = n x^{n-1}$

avec une integration par partie nous avons:

$$\int_0^A x^n e^{-x}\,dx = [-e^{-x} x^n]_0^A - \int_0^A n x^{n-1}(-e^{-x})\,dx$$

$$= -e^{-A} A^n - 0 + n \int_0^A x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e^A} A^n + n\, i_n(A)$$

$$= -\frac{A^n}{e^A} + n\, i_n(A)$$

On a bien $i_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + n\, i_n(A)$

5) $\lim_{A \to +\infty} -\frac{A^n}{e^A} = 0$ par croissance comparée

donc $\lim_{A \to +\infty} i_{n+1}(A) = n \lim_{A \to +\infty} i_n(A)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

donc si $i_n(A)$ admet une limite fini quand A tend vers $+\infty$, $i_{n+1}(A)$ en admet une également.

6) On note $P(n)$ la propriété

Partie 3:

8) 1 continuité : si $x < 0$ $f_n(x) = 0$ donc continue

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) ANTOINE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 05

Numéro de table 013

Exercice 3 : Partie 3 suite :

si $x \geqslant 0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}$ donc continue car c'est un produit de fonctions usuelles.

donc $f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

② positivité : si $x < 0$ $\quad f_n(x) = 0$ donc positive

si $x \geqslant 0$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}$ et $x \geqslant 0$ donc positive

donc $f_n(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

③ convergence : $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \, dx$

$\displaystyle = 0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx$

$=$