MARWANE

Note de délibération : 17.93 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

Signature

17.93 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 065

Exercice 1

1.

$E_C = \{ C \in M_3(\mathbb{R}) \ / \ CM + MC = O_3 \}$ avec $M \in M_3(\mathbb{R})$

Ainsi $E_{O_3} = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) / O_3 \times M + M \times O_3 = O_3 \}$

donc $E_{O_3} = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) \}$

E_{O_3} est égal à l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$

$E_{I_3} = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) / \quad I_3 \times M + M \times I_3 = O_3 \}$

$\Leftrightarrow \quad E_{I_3} = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) / \ 2M = O_3 \}$

E_{I_3} est égal à l'ensemble des matrices nulles de $M_3(\mathbb{R})$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

2.

Montrons que E_C est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

$O_3 \in E_C$ car $O_3 \times M + M \times O_3 = O_3$

Soient B et $C \in E_C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Montrons que $(\lambda B + C) \in E_C$

$$(\lambda B + C)M + M(\lambda B + C) = \lambda BM + CM + M\lambda B + MC$$

$$= \lambda(BM + MB) + CM + MC$$

$$= \lambda \times O_3 + O_3$$

$$= O_3$$

Ainsi $(\lambda B + C) \in E_C$ donc E_C est bien un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

3.

Soit $M \in E_A \iff AM + MA = O_3$

A est symétrique donc ${}^tA = A$

Ainsi

$$A\,{}^{t}M + {}^{t}MA = (MA + AM)^{t} = O_3^{\,t} = O_3$$

Donc $\underline{{}^{t}M \in E_A}$

4.

a) <u>A est diagonalisable car symétrique</u>

b) D'après le cours, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\lambda \in Sp(A) \iff (A - \lambda I_3) X = O_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \\ 1-\lambda & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda^2+\lambda+4 & -2(1-\lambda) \end{pmatrix} \leftarrow -2L_3 - (1-\lambda)L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3+9\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda \in Sp(A)$ si et seulement si les coefficients diagonaux de la reduite de Gauss sont nuls donc

$$-\lambda^3+9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda = 0$$

c)

Déterminons les valeurs propres de A

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 9) = 0$$

Ainsi les valeurs propres de A sont $\{-3, 0, 3\}$

Pour $\lambda = -3$

$$(A + 3I_3)X = O_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

Signature

17.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 065

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ -2x + y = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} = x \\ z = -y \end{cases}$

$\Leftrightarrow E_{-3}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ 1y \\ -1y \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda = 0$

$AX = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x \\ x = z \\ 2y = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x \\ 1x \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

Pour $\lambda = 3$

$(A - 3I_3)X = 0_3$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2x - 2y = 0 \\ y = 2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = \frac{1}{2} y \end{cases}$

$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ \frac{1}{2} y \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

En concatenant les bases des sous espaces propres de A, on obtient une matricee P inversible telleque

$D = P^{-1}AP$

$E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \neq 0$ donc forme une base de $E_{-3}(A)$

$E_{0}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \neq 0$ donc forme également une base de $E_0(A)$

$E_{3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \neq 0$ donc forme une base de $E_3(A)$

On a $D = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$

telles que $D = P^{-1}AP$

5.

$$P^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix} = 9I_3$$

On a $P^2 = 9 I_3$

$$\iff \frac{1}{9}P \times P = I_3$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{9} P$

6.

a) $N \in E_D \iff DN + ND = O_3$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = O_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = O_3$$

$$\iff \begin{cases} -3a - 3a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3c + 3c = 0 \\ -3d = 0 \\ 3f = 0 \\ 3g - 3g = 0 \\ 3h = 0 \\ 3i + 3i = 0 \end{cases} \iff \left\{ b = a = d = f = h = i = 0 \right.$$

Donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $N \in E_D$ si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

17.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 065

Signature

b) $E_D = \left\{ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } (c,e,g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$$E_D = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Comme les trois vecteurs sont des élements de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, ils sont libres donc forme une basee E_D

De plus $\dim E_D = \dim B = 3$

7.

a) $N = P^{-1}MP$

$M \in E_A \iff AM + MA = O_3$

or $A = PDP^{-1}$ d'après la question 4.c

$\iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = O_3$

$\iff P^{-1}PDP^{-1}MP + P^{-1}DDP^{-1}P = P^{-1}O_3P = O_3$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

$DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = O_3$

$DN + ND = O_3$

On en conclut que $M \in E_A$ si et seulement si $N \in E_D$

b.

Une base de E_A est $\left(P\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$

8.

$$(A+M)^2 = A^2+M^2 \iff A^2+2AM+M^2 = A^2+M^2$$
$$\iff 2AM = O_3$$
$$\iff AM = O_3$$

L'ensemble des matrices vérifiant $(A+M)^2 = A^2+M^2$ est égale à l'ensemble des matrices vérifiant $AM = O_3$

9. $\forall M \in M_3(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM+MA$

d'après le théorème du rang, $rg(\varphi) = \dim(\varphi) - \dim \operatorname{Ker}\varphi$
Or on sait que $\dim E_D = 3$ donc $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3$

Et d'après la

Sans suite

Exercice 2

1. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$t^2 \times t^n e^{-t} = t^{2+n} \times e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ donc}$$

par croissances comparées

$$t \mapsto t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi d'après le principes de comparaison des intégrales positives $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ est convergente

Par relation de chasles, $\underline{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt \text{ converge}}$

b. $I_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} \, dt = \underline{\int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1}$ car on reconnait une loi exponentielle de paramètre 1.

$\underline{I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt = 1}$ car on reconnait également l'esperence d'une loi exponentielle de paramètre 1

2. $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées}$$

Ainsi, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

D'après le critère de négligeabilité des intégrales positives

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge

Donc d'après la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge

3. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = I_0 = 1$$

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ tel que $x \leq y$

$x \leq y$

$xt \leq yt$ (avec $t \geq 0$)

$1+xt \leq 1+yt$

$\frac{1}{1+xt} \geq \frac{1}{1+yt}$ (passage à l'inverse)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

17.93 / 20

Écricome Épreuve : Mathémathiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 065

Signature

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{-t}}{1+xt} \geqslant \dfrac{e^{-t}}{1+yt}$ car $e^{-t} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow F(x) \geqslant F(y)$ (en intégrant dans le sens positif)

On en déduit que F est une fonction décroissante sur $[0;+\infty[$

5. Si $x>0$

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt$

$= \dfrac{1}{x}\left[\ln(1+xt)\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \ln(1)\right)$

$= \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Si $x=0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1}\,dt = 1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall t \in [0,1]$

$$0 \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t} \leq 1$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$$ (en intégrant dans le sens positif)

c) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$1+xt \geq x \quad (\text{car } x>0 \text{ et } t>0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x} \quad (\text{passage à l'inverse})$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x} \quad (e^{-t}>0)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

or $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in [1, +\infty[$, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ est une fonction

positive. Ainsi, en intégrant dans le sens positif

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

d)

Par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ car

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}$$ (relation de chasles)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

6.

a) $F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1+xt)^2}{1+xt}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1+x^2t^2+2xt)}{1+xt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1-1-x^2t^2-2xt)}{1+xt}\,dt$$

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-x^2t^2)}{1+xt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1-1+x^2t^2)}{1+xt}\,dt$$

$$= x^2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^2}{1+xt}\,dt$$

b)

$$F(x) - I_0 + xI_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}\,dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1+xt)}{1+xt} + xte^{-t}\,dt$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

Signature

17.93 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 065

$$xI_1 - I_0 = x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} xte^{-t} - e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}(xt-1)\,dt$$

donc $F(x) - I_0 + xI_1 = x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt$

d'après la question précédente

De plus comme $\frac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leq t^2e^{-t}$ car $(1+xt)\geq 0$

On a

$$x^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leq x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$$

Et comme $\frac{t^2e^{-t}}{1+xt} \geq 0$, $x^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \geq 0$

On a bien

$$0 \leq x^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leq x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

7

a) $F \in C^1(\mathbb{R}^+)$ car $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente

D'après la Formule de Taylor - Young

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + F'(0)(x-0) + o(x)$$

$$\underset{0}{=} 1 + F'(0)x + o(x)$$

J'admets le resultat

b)

D'après la Formule du taux d'accroissement, si F est dérivable en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - 1}{x} \underset{0}{=} \frac{1 - x + o(x) - 1}{x}$$ d'après la question précédente

$$\underset{0}{=} -1 + o(1)$$

donc F est derivable en 0 et $F'(0) = -1$

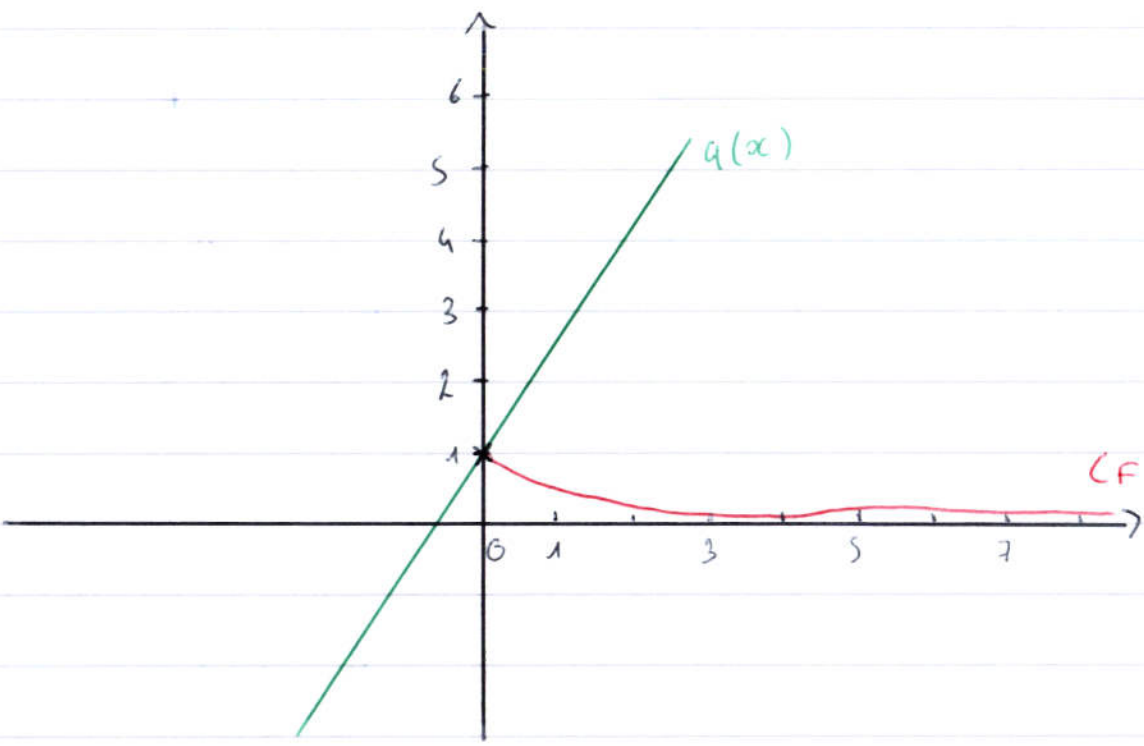
((Ce qu'on aurait pu trouver avec la formule de Taylor-Young à la question précédente)

8.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$

On sait que F est décroissante

que sa tangente en 0 vaut $y = 1 - x$ (d'après 7. a))



Exercice 3

Partie 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in [\![1, n]\!], f_i(x) = \begin{cases} \frac{i}{x^{i+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_i est continue sur $[1;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues

f_i est continue sur $]-\infty,0[$ comme constante.

Ainsi f_i est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.

f_i est positive sur $[1;+\infty[$ car x et i sont positifs

f_i est positive sur $]-\infty,0[$ car nulle

Ainsi f_i est **positive** sur $\mathbb{R}$

Sous reserve de convergence

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in [1;n]$,
Soit $A > 0$

$$\int_{-\infty}^{A} f_i(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{A} \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$$

$$= i \int_{1}^{A} x^{-1-i}\,dx$$

$$= i \left[\frac{x^{-i}}{-i} \right]_{1}^{A}$$

$$= i \left[\frac{A^{-i}}{-i} + \frac{1^{-i}}{i} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{A^{i}}$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$

On en conclut que f_i est une densité de probabilité

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

Signature

17.93 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 065

2.

a) X_i admet une espérance si et seulement si

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx$ converge absolument

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx = \int_{-\infty}^{1} x \times 0 dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{x i}{x^{i+1}} dx$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i} dx$$

D'après le critère de Riemen en $+\infty$, $\int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i} dx$ converge si et seulement si $i \geqslant 2$

Donc $\forall i \geqslant 2$, X_i admet une esperance

Soit $i \geqslant 2$ et $A > 1$, $i \int_{1}^{A} \frac{1}{x^i} dx = i \left[\frac{x^{1-i}}{1-i} \right]_1^A = i \left(\frac{1}{(1-i)A^{i-1}} - \frac{1}{1-i} \right)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

$$\int_1^A \frac{i}{x^i}\,dx = i\left(\frac{1}{(i-1)A^{i-1}} - \frac{1}{1-i}\right)$$

$$\lim_{A\to\infty} i\left(\frac{1}{(1-i)A^{i-1}} - \frac{1}{1-i}\right) = \frac{i}{1-i}$$

Donc $E(X_i) = \frac{i}{1-i}$

b) L'espérance de X_i est égale au revenu moyen mensuel de la catégorie socioprofessionnelle i (en moyenne) donc $\frac{i}{1-i}$

Comme $\frac{i}{1-i}$ est décroissante, à mesure que le numéro de la catégorie socioprofessionnelle augmente, le revenu moyen mensuel diminue

3. Déterminons la fonction de répartition de X_i

• Si $x<1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

• Si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_1^x \frac{i}{t^i}\,dt = 1 - \frac{1}{x^i}$

D'après les résultats et calculs de la question 1.

On conclut que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}$)

a) $\mathbb{P}(V_i \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$

$$= \mathbb{P}\left(U^{1/i} \geq \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(U^{1/i} \leq \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(e^{U \ln(1/i)} \leq \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(e^{-U \ln(i)} \leq \frac{1}{x}\right)$$

ln est croissant sur cet intervalle

$$= 1 - \mathbb{P}(-U \ln(i) \leq -\ln(x))$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(-U \leq -\frac{\ln(x)}{\ln(i)}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(U \geq \frac{\ln(x)}{\ln(i)}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{\ln(x)}{\ln(i)}\right)$$

Sans suite. J'admets le résultat

b.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
    def simulX (i):
  U = rd.randint( )
  X = 1 / U**(1/i)
return X
```

Partie 2

5. D'après l'énoncé, $Y-1 \hookrightarrow B(n-1, p)$

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
 def simulY (n,p):
   For k in range ( ):
      z =
```

Y semble suivre une loi uniforme ⟦1,n⟧ car il y a n-catégories socioprofessionnelles.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
 def simulY(n,p):
  Y= rd.random(1,n+1)
 return Y
```

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MARWANE

Signature

17.93 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 065

6.

```
def loiY(n,p):
 N = 10000
 loi = [0]*n
 For k in range(1000)
    y = simmulY(n,p)
   loi[k]*n
 return loi
```

7.

```
     import numpy as np
     import matplotlib.pyplot as plt
  a=plt.bar([1,n]  , loi)
  return plt.show(a)
```

8.

a) La clé primaire d'une table dans une base de donnée doit être un attribut qui permet d'identifier de manière unique chaque profession.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.93 / 20

b)

Pour la table individu : i_insee

Pour la table département : d- nom

Pour la table profession : p- pcs

c) (I_nom = TEXT , i_ prenom = TEXT , i_departement = INTEGER,
i-insee = INTEGER , i_code_profession = INTEGER ...)

(Trop long de tout écrire)

d

SELECT DISTINCT p_pcs FROM profession WHERE d-nom = 28

e)

SELECT

Partie 3

9.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant x)$

Z_n suit une loi uniforme car on choisit avec équiprobabi

$Z_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ car à l'étape précédente on peut obtenir la catégorie 1 à n.

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > n \\ \frac{x-1}{n-1} & \text{si } x \in (1;n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

10

a) $\forall i \in [\![1;n]\!]$

$_{(Y=i)}(Z_n \leqslant x)$ signifie qu'on ~~pioche~~ selectionne aléatoirement une catégorie alors qu'on en a eu i (donc parmi i-catégorie)

Or Z_n est égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros comme X_i

Ainsi on a bien $\mathbb{P}_{(Y=i)}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(X_i \leqslant x) = F_i(x)$

b) J'admets le résultat

c) d'après la question précédente

$$G_n(x) = \sum_{h=0}^{n-1} F_{h+1}(x) \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h}$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{h+1}}\right) \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h}$$

La formule ~~des~~ du binôme de Newton nous permet de conclure