

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 40

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie I :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$t \mapsto (1-t^2)^n$ et $t \mapsto (1-t^2)^m$ sont continues respectivement sur $[0,1]$ et $[-1,1]$.

donc I_n et J_m sont bien définies

$t \mapsto (1-t^2)^m$ est continue sur $[-1,1]$ et paire sur $[-1,1]$

de ce fait, $J_m = \int_{-1}^1 (1-t^2)^m dt = 2 \int_0^1 (1-t^2)^m dt = 2I_n$

2) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = \int_0^1 1 dt = 1$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

$$= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) dt \quad \text{par linéarité d'intégrals définies}$$

$$= \int_0^1 [-t^2 (1-t^2)^n] dt$$

or $f(t) = -t^2(1-t^2)^m$ est continue sur $[0,1]$ et négative (en effet $\forall t \in [0,1] -t^2 \leq 0$ et $(1-t^2)^m > 0$) donc $-t^2(1-t^2)^m \leq 0$ de plus $0 \leq 1$

par croissance de l'intégral :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 -t^2(1-t^2)^n dt \leq 0$$

donc $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

4) Soit $n \in \mathbb{N}^+$

$$u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad v: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto (1-t^2)^m \quad \quad \quad t \mapsto t$$

sur $[0,1]$ sur $[0,1]$.

Par intégration par partie :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \left[t(1-t^2)^n \right]_0^1 + n \int_0^1 t(1-t^2)^{n-1} \times 2t dt.$$

$$I_n = 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Montrons que } \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$$

I: pour $n=0$: A-t-on le résultat souhaité?

$$I_0 = 1 \quad (2) \quad \text{et} \quad \frac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1$$

$$\text{donc } I_0 = \frac{(2^0 0!)^2}{1!}$$

II) Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ fixé la propriété:

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{Montrons que } I_{n+1} = \frac{(2^{n+1} (n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\text{avec } I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$

$$\text{donc } I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(2n+3)} \times \left(\frac{2n+2}{2n+2} \right) \times \frac{(2^n (n!)^2)}{(2n)!}$$

$$I_{n+1} = \frac{2^2 (n+1)^2 (2^n (n!)^2)}{(2n+3) \times (2n+2) (2n)!}$$

$$I_{n+1} = \frac{(2^{n+1} (n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\text{Conclusion: } \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$$

$$O_n \quad J_n = 2I_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$$

$$J_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n)!}$$

6) def I(m):

i = 1

for h in range(0; m):

i = ((2**h) * mp.factorial(h))**2 / (mp.factorial(2*h))

return i

7) on a $n! \underset{+0}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$J_n = 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n+1} \times (n!)^2}{(2n)!}$$

or $(2n)! \underset{+0}{\sim} \sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n+1}$ avec la formule admette

$(n!)^2 \underset{+0}{\sim} 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$ (puissance constante)

et $2^{2n} \times 2 = 2^{2n+1}$

par quotient:

$$J_n \underset{+0}{\sim} 2^{2n+1} \times (2\pi n) \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n)}} \left(\frac{e}{2n}\right)^{2n+1}$$

$$J_n \underset{+0}{\sim}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 60

Session : 2025

Épreuve de : Maths EML :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$J_m \underset{+j}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m}}$$

$$\text{donc } J_m \underset{+j}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{m}}$$

Partie II

8) f et g paires $P(x)Q(x)$ et continue sur $[-1,1]$ (polynomiale)

donc $\int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$ est définie

* Soit $(P, Q, R, \lambda) \in \mathcal{M}(x)^3 \times \mathbb{R}$

$$(\lambda P + Q, R) = \int_{-1}^1 [\lambda P(x) + Q(x)] R(x) dx$$

$$= \lambda \int_{-1}^1 P(x) R(x) dx + \int_{-1}^1 Q(x) R(x) dx$$

par linéarité d'intégrals définies.

$$= \lambda (R, R) + (Q, R)$$

(\cdot, \cdot) est linéaire à gauche.

* Soit $(p, q) \in \mathbb{R}[x]^2$

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(t) q(t) dt = \int_{-1}^1 q(t) p(t) dt = (q, p)$$

(\cdot, \cdot) est symétrique. La symétrie et la linéarité à gauche implique la linéarité à droite

(\cdot, \cdot) est bilinéaire

* Soit $p \in \mathbb{R}[x]$.

$$(p, p) = \int_{-1}^1 p(t)^2 dt$$

or $t \mapsto p(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 \leq 1$
 Par un résultat de l'intégral :

$$\text{on a } (p, p) = \int_{-1}^1 p(t)^2 dt \geq 0$$

(\cdot, \cdot) est positive

* Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ | $(p, p) = 0$

$$\int_{-1}^1 p(t)^2 dt = 0$$

or $t \mapsto p(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 \leq 1$
 Par théorème de stricte positivité :

$$\forall t \in [-1, 1] \quad p^2(t) = 0 \text{ donc } p(t) = 0$$

donc $\forall A \in [-1, 1] \quad P(A) = 0$

et l'admet une suite de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

Reciproquement, si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ $(P, P) = ?$

donc $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad (P, P) = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

(\cdot, \cdot) est définie positive.

Par ailleurs, $(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt \in \mathbb{R}$.

donc (\cdot, \cdot) est un forme linéaire.

Les produits scalaires comme que (\cdot, \cdot)
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

9) Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad |i \neq j$.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \int_{-1}^1 t^i \times t^j dt = \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{i+j+1} - \frac{(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$$

$$\langle e_i, e_j \rangle \neq 0$$

donc les polynômes de bin ne sont pas orthogonaux
par ce produit scalaire.

10) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$u(P)(z) = ((1-z^2)P'(z))'$$

or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\deg(P(z)) \leq n$

$$\text{donc } \deg(P'(n)) \leq m-1$$

$$\text{donc } \deg((1-n^2)P'(n)) \leq m-1 + 2$$

$$\text{car } \deg(1-n^2) = 2$$

$$\text{Au final, } \deg((1-n^2)P'(n)) \leq m+1$$

$$\underline{\text{donc } \deg(u(P)) \leq m}$$

$$\underline{\text{donc } u(P) \in \mathbb{M}_n[X]}$$

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{M} \quad \text{Soit } (P, Q) \in \mathbb{M}_n[X]^2 \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N}$$

$$u(\lambda P + Q)(n) = ((1-n^2)(\lambda P + Q)'(n))'$$

$$u(\lambda P + Q)(n) = ((1-n^2)(\lambda P'(n) + Q'(n)))' \quad \text{par linéarité de la dérivée}$$

$$u(\lambda P + Q)(n) = (\lambda(1-n^2)P'(n) + (1-n^2)Q'(n))'$$

$$u(\lambda P + Q)(n) = \lambda((1-n^2)P'(n))' + ((1-n^2)Q'(n))'$$

par linéarité de la dérivée

$$\text{Au final: } \underline{u(\lambda P + Q)(n) = \lambda u(P)(n) + u(Q)(n)}$$

u est linéaire.

$$\underline{\text{Au final, } u \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_n[X])}$$

$$11a) u(e_0) = u(1) = 0 \quad \text{car si } P=1, P' \text{ est le polynôme nul donc:}$$

$$\underline{u(e_0) = ((1-n^2)0)' = 0}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 40

Session : 2025

Épreuve de : Maths EMC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$u(e_1) = u(X) \quad \text{or si } P = X \text{ alors } P' = 1.$$

$$\underline{\text{et } u(e_1) = ((1-X^2))' = -2X = -2e_1}$$

b) Soit $h \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u(e_h) &= u(X^h) = ((1-X^2) h X^{h-1})' \\ &= (h X^{h-1} - h X^{h+1})' \end{aligned}$$

on a par linéarité de la dérivée.

$$u(e_h) = h(h-1)X^{h-2} - h(h+1)X^h$$

$$\underline{u(e_h) = -h(h+1)e_h + h(h-1)e_{h-2}}$$

c) De fait avec $B_n = (e_0, \dots, e_n)$

On a $\text{Mat}_{B_n}(u) = M =$

Au titre de Matrice triangulaire supérieure, les valeurs propres de u sont ses coefficients diagonaux.

$$\text{donc } \underline{Sp(M) = Sp(M) = \{-k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}}$$

Ayant $(n+1)$ valeurs propres deux à deux distinctes et $u \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$
avec $M_n(\mathbb{R}) = n+1$, u est diagonalisable et ses
sous espaces propres ont de dimension 1.

(2) Cela revient à montrer que u est un endomorphisme
symétrique.

$$\underline{\text{Soit } (p, q) \in M_n(\mathbb{R})^2}$$

$$\text{Montrons que: } \langle u(p), q \rangle = \langle p, u(q) \rangle$$

$$\text{Posons } R: t \mapsto (1-t^2)p'(t)$$

$$u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto R(t) \quad \quad \quad t \mapsto Q(t)$$

sur \mathcal{P}^1 sur $[-1, 1]$ (sur ce set de fonctions polynomiales).

Par intégration par parties

$$\langle u(p), q \rangle = \int_{-1}^1 R'(t)Q(t) dt = \left[R(t)Q(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 R(t)Q'(t) dt.$$

$$\langle u(p), q \rangle = R(1)Q(1) - R(-1)Q(-1) - \int_{-1}^1 (1-t^2)p'(t)q'(t) dt.$$

or 1 et -1 sont racines de R car $R(t) = (1-t^2) P'(t)$

$$\text{donc } \langle u(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (1-t^2) P'(t) Q'(t) dt.$$

$$\langle u(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 P'(t) S(t) dt \quad (*)$$

avec $S: t \mapsto (1-t^2) Q'(t)$.

$u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto S(t)$

sont C^1 sur $[-1, 1]$ car polynômes.

Admi par intégration par partie :

$$\int_{-1}^1 P'(t) S(t) dt = [P(t) S(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P(t) S'(t) dt.$$

or -1 et 1 sont racines de S donc $S(1)P(1) = S(-1)P(-1) = 0$
admi.

$$\text{donc } \int_{-1}^1 P'(t) S(t) dt = - \int_{-1}^1 P(t) ((1-t^2) Q'(t))' dt.$$

en remplaçant dans $(*)$, on a pour double IPP :

$$\langle u(P), Q \rangle = - \left(- \int_{-1}^1 P(t) ((1-t^2) Q'(t))' dt \right)$$

$$\text{donc } \langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$$

donc u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

De fait, il existe une b.o.n de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u , par ailleurs, u est diagonalisable (on le savait déjà avec sa Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}^n$).

De fait, comme toute famille orthonormée de m espace vectoriel de dimension finie \mathbb{R}_m est telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 0;n \rrbracket^2 \quad \langle L_i, L_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

cette famille est à fortiori, une famille orthogonale de l'espace.

Donc comme il existe une b.o.n de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u , il existe une base orthogonale formée de vecteurs propres de u . Or chaque sous-espace propre est de dimension 1, ce qui assure que le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

L'existence est acquise.

13a) Soit $m > n$ et $f \in \mathbb{R}_m[X]$

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_m[X]$ car $n < m$. De fait : d'après le théorème de la projection orthogonale :

$\{\|f - g\|, g \in \mathbb{R}_n[X]\}$ admet un minimum en unique vecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ $y = p_{\mathbb{R}_n[X]}(f)$ la projection

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 40	Session : 2025
	Épreuve de : Maths EML		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

orthogonale sur $\mathbb{R}_n[x]$. et $\min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \{ \|f - g\| \} = \|f - p_{\mathbb{R}_n[x]}(f)\|$

Ainsi, en notant $p_{\mathbb{R}_n[x]}(f) = T_n$

il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \{ \|f - g\| \} (= \|f - p_{\mathbb{R}_n[x]}(f)\|)$$

Par ailleurs $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ (et $f - T_n \in (\mathbb{R}_n[x])^\perp$)

or (L_0, \dots, L_n) est une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_n[x]$

donc $\exists ! (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $T_n = \sum_{h=0}^n c_h L_h$.

b)

$$\begin{aligned}
 \|f - T_n\|^2 &= \langle f - T_n, f - T_n \rangle \\
 &= \langle f - T_n, f \rangle - \langle f - T_n, T_n \rangle \\
 &= \langle f - T_n, f \rangle \quad \text{car } f - T_n \in (\mathcal{M}_n[x])^\perp \\
 &\quad \text{et } T_n \in \mathcal{M}_n[x].
 \end{aligned}$$

avec une identité de polarisation :

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, T_n \rangle + \|T_n\|^2$$

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, T_n \rangle + \left\| \sum_{h=0}^n c_h L_h \right\|^2$$

or (L_0, \dots, L_n) est une base orthogonale donc :

avec le théorème de Pythagore :

$$\left\| \sum_{h=0}^n c_h L_h \right\|^2 = \sum_{h=0}^n \|c_h L_h\|^2 = \sum_{h=0}^n c_h^2 \|L_h\|^2$$

$$\text{donc } \|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{h=0}^n c_h^2 \|L_h\|^2 - 2\langle f, T_n \rangle$$

(4a) Soit $h \in \mathbb{N}$

$$\deg(x^2 - 1) = 2$$

$$\text{donc } \deg(P_h) = 2h.$$

Annui en dérivant h fois P_h : $\deg(P_h^{(h)}) = 2h - h = h$

donc Q_h est un polynôme de degré h .

P_h est un polynôme de degré $(2h)$ et de coefficient dominant 1.

$$\text{Donc } \exists R \in \mathbb{R}[X] \quad P_h(X) = X^{2h} + R(X)$$

$$\text{avec } \deg(R) < 2h$$

annui en dérivant h fois P_h :

$$\text{on a } Q_h(X) = P_h^{(h)}(X) = (2h) \times \dots \times (h+1) X^{2h-h} + R^{(h)}(X)$$

$$Q_h(X) = \frac{(2h)!}{h!} X^h + R^{(h)}(X)$$

donc Q_h est de degré h et de coefficient dominant égale à $\frac{(2h)!}{h!}$.

$$b) Q_0 = P_0^{(0)} = P_0 = 1$$

$$Q_1 = P_1' = ((x^2 - 1)^1)' = 2x$$

$$Q_2 = P_2'' = ((x^2 - 1)^2)'' = (2 \times 2x(x^2 - 1))' = (4x^3 - 4x)'$$

$$\text{donc } Q_2 = 12X^2 - 4$$

ce qui est cohérent avec le résultat établi en (14a).

c) i) Soit $h \in \mathbb{N}$, Soit $x \in \mathbb{R}$.

si $h \geq 1$

$$\begin{aligned} P_1(x) P_h'(x) &= (x^2-1) h (x^2-1)^{h-1} 2x \\ &= (x^2-1) 2x h (x^2-1)^{h-1} \\ &= 2x h (x^2-1)^h \end{aligned}$$

$$\underline{P_1(x) P_h'(x) = 2x h (x^2-1)^h}$$

si $h=0$:

$$P_1(x) P_0'(x) = (x^2-1) \times 0$$

$$\text{et } 2x \times 0 \times (x^2-1)^0 P_0(x) = 0$$

$$\underline{\text{donc } P_1(x) P_h'(x) = 2x h (x^2-1)^h P_0(x)}$$

On raccorde ce cas: et donc: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{N}$

$$\underline{P_1(x) P_h'(x) = 2x h (x^2-1)^h P_0(x)}$$

(ii) Soit $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé
Soit $x \in \mathbb{R}$

2) (x^2-1) est \mathcal{C}^{h+1} sur \mathbb{R} et P_h' est dérivable $h+1$ fois aussi

$$\text{ainsi } \left[(x^2-1) \times P_h'(x) \right]^{(h+1)} = \sum_{i=0}^{h+1} \binom{h+1}{i} (x^2-1)^{(i)} \left[P_h'(x) \right]^{(h+1-i)}$$

$$\text{or si } i \geq 2 \quad (x^2-1)^{(i)} = 0$$

$$\text{donc } \left[(x^2-1) P_h'(x) \right]^{(h+1)} = (x^2-1)^{(1)} \left[P_h'(x) \right]^{(h+1)} + 2x \left[P_h'(x) \right]^{(h)} \rightarrow$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 40	Session : 2025
	Épreuve de : Maths EMC		
Consignes <ul style="list-style-type: none"> • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre 			

~~avec le qui précède:~~

~~ma Vht [0,n] VnE12~~

~~$$(1-x^2)q''(x) - 2xq'(x) + h(h+1)q(x) = 0$$~~

$$\rightarrow + 2 [P_h'(x)]^{(h-1)} = (x^2-1)q''(x) + 2xq'(x) + 2q(x)$$

$$\text{car } [P_h'(x)]^{(h+1)} = P_h^{(h+2)}(x) = [Q_h(x)]^{(2)} = Q_h''(x)$$

$$\text{de même: } [P_h'(x)]^{(h)} = Q_h'(x)$$

$$\text{et } [P_h'(x)]^{(h-1)} = Q_h(x)$$

$$\text{donc } [(x^2-1)P_h'(x)]^{(h+1)} = [P_1(x) \times P_h'(x)]^{(h+1)}$$

$$= (x^2-1)Q_h''(x) + 2xQ_h'(x) + 2Q_h(x)$$

$$\text{or } [P_1(x)P_h'(x)]^{(h+1)} = [2h x^{h-1} P_h(x)]^{(h+1)} = 2h [x^h P_h(x)]^{(h+1)}$$

de même avec la formule de Leibniz:

$$[P_1(x)P_h'(x)]^{(h+1)} = 2h [x^h P_h(x)]^{(h+1)} = \sum_{i=0}^{h+1} \binom{h+1}{i} x^{(i)} P_h^{(h+1-i)}(x)$$

$$\forall n \quad i \geq 2 \quad n^{(i)} = 0 \text{ (c.f.)}$$

$$\text{donc } 2h [e_n(n) p_h(n)]^{h+1} = 2hn^{(0)} p_h^{(h+1-0)}(n) + h! \times p_h^{(h)}(n)$$

$$\underline{2h [e_n(n) p_h(n)]^{h+1} = 2hn Q_h'(n) + h! Q_h(n)}$$

$$\text{donc } (1-n^2) Q_h''(n) - 2n Q_h'(n) - 2Q_h(n) = -2hn Q_h'(n) + \underline{2h Q_h(n)}$$

Admis pour la suite.

~~$$\text{On a bien } u(Q_0) = 0 \times Q_0 \text{ et } Q_0 \neq 0 \text{ (c.f.)}$$~~

~~$$\text{donc } u(Q_0) = -0(1) Q_0$$~~

~~et Q_0 vecteur propre de u associé à la valeur propre 0 .~~

Soit $h \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u(Q_h)(x) &= ((1-n^2) Q_h'(n))' \\ &= Q_h''(n)(1-n^2) - 2n Q_h'(n) \quad (\text{par dérivation}) \\ &= \underline{-h(h+1) Q_h(n)} \end{aligned}$$

$$\text{car } \underline{Q_h''(n)(1-n^2) - 2n Q_h'(n) + h(h+1) Q_h(n) = 0}$$

$$\text{donc } \underline{u(Q_h)(n) = -h(h+1) Q_h(n)} \quad \text{d'après ce qui précède.}$$

et $Q_h \neq 0 \text{ (c.f.)}$.

donc Q_h est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $-h(h+1)$

iii) Soit $h \in \mathbb{N}$

AMIS pour le resultat.

d) Soit $h \in \mathbb{N}$, on veut le resultat souhaité. Soit $(f, g) \in (\mathcal{C}^h)^2$

Initialisation: (je ne trouve sûrement mais je pense que c'est pour $h \geq 1$?)

At'on le resultat souhaité pour $h=1$?

$u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad v: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto f(t) \quad t \mapsto g(t)$

↳ possible
encore?

je veux le
cas où $h \in \mathbb{N}^*$

soit \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ car fonctions polynomiales

Par IPP:

$$\int_{-1}^1 \underbrace{f'(t)}_u \underbrace{g(t)}_v dt = (-1)^0 \left[\underbrace{f^{(h-1)}(t)}_u \underbrace{g^{(0)}(t)}_v \right]_{-1}^1 + (-1)^{(1)} \int_{-1}^1 \underbrace{f(t)}_u \underbrace{g'(t)}_v dt$$

le resultat est valide par IPP "dynamique" pour $h=1$

Hérédité:

Supposons pour $h \geq 1$ fixé, le resultat souhaité mais.

$$\text{Montrons que: } \int_{-1}^1 f^{(h)}(t) g(t) dt = \sum_{j=0}^h (-1)^j \left[f^{(h-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^{h+1} \int_{-1}^1 f(t) g^{(h+1)}(t) dt$$

Prouvons: $u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et } v: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto f^{(h)}(t) \quad t \mapsto g(t)$

soit \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ car polynomiales.

par IPP:

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(x) g(x) dx = \left[f^{(k)}(x) g(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f^{(k)}(x) g'(x) dx.$$

or pour $g = g'$ qui est aussi dérivable

(on remplace g par g' dans le résultat supposé

dans l'hypothèse de récurrence): (le résultat est valable $\forall g \in \mathcal{R}(x)$)

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(x) g(x) dx = \left[f^{(k)}(x) g(x) \right]_{-1}^1 - \left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(x) \frac{g^{(j+1)}(x)}{*} \right]_{-1}^1 \right.$$

$$\left. + (-1)^k \int_{-1}^1 f(x) \frac{g^{(k+1)}(x)}{**} dx \right)$$

car $(g')^{(j)} = g^{(j+1)}$ et $(g')^{(k)} = g^{(k+1)}$

$$\text{donc } \int_{-1}^1 f^{(k+1)}(x) g(x) dx = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \left[f^{(k-1-j)}(x) g^{(j+1)}(x) \right]_{-1}^1 + \left[f^{(k)}(x) g(x) \right]_{-1}^1$$

$$+ (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 f(x) g^{(k+1)}(x) dx.$$

perchangez d'indice dans la somme et en ajoutez celui-ci qui correspond au terme où $j=0$: on a bien le résultat souhaité: (encore par IPP)

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}(x) g(x) dx = \sum_{j=0}^k (-1)^j \left[f^{(k-j)}(x) g^{(j)}(x) \right]_{-1}^1 + (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 f(x) g^{(k+1)}(x) dx$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 40	Session : 2025
	Épreuve de : Maths EMC		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Conclusion :

$$\forall h \geq 1 \quad \forall (b, g) \in (\mathbb{M}[X])^2$$

$$\int_{-1}^1 f^{(h)}(t) g(t) dt = \sum_{j=0}^{h-1} (-1)^j \left[f^{(h-j)}(t) g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^h \int_{-1}^1 f(t) g^{(h)}(t) dt$$

e) Soit $h \in \mathbb{N}$ fixé.

i) Soit $n \in \mathbb{N}$

P_h est de degré $2h$ et de coefficient dominant 1.

$$\text{donc } \exists R \in \mathbb{M}[X] \quad P_h = X^{2h} + R(X)$$

$$\text{avec } \deg(R(X)) < 2h$$

en dérivant P_h ($2h$) fois, P_h est de degré 0 et de coefficient dominant : $(2h)!$

$$\text{de fait : } P_h^{(2h)}(x) = (2h)! X^0 = (2h)!$$

(ii)

Initialisation:pour $l=0$:

$$P_h^{(0)}(n) = P_h(n) = (n^2 - 1)^h = (n^2 - 1)^{h-0} \times 1$$

le polynôme $R_{h,0}$ est le polynôme constant égal à 1.

La propriété est vérifiée pour $l=0$ Hypothèse:Supposons la propriété pour $l \in [0; h-1]$ fixé:

$$\text{on aie } \forall n \in \mathbb{R} \quad P_h^{(l+1)}(n) = (n^2 - 1)^{h-(l+1)} R_{h,l+1}(n).$$

dérivées: $P_h^{(l)}$ qui est dérivable, par hypothèse de récurrence

il vient:

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad P_h^{(l+1)}(n) = (h-l)(n^2-1)^{h-(l+1)} \times (2n) \times R_{h,l}(n) + R_{h,l}'(n) (n^2-1)^{h-l}$$

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad P_h^{(l+1)}(n) = (n^2-1)^{h-(l+1)} \left[(h-l)(2n) \times R_{h,l}(n) + R_{h,l}'(n) \times (n^2-1) \right]$$

Posons $R_{h,l+1}(n) = (h-l)(2n) R_{h,l}(n) + R_{h,l}'(n)(n^2-1)$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad P_h^{(l)}(n) = (n^2 - 1)^{h-l} R_{h,l}(n)$$

$$\text{de plus } \deg(R_{h,l}(n)) \leq l$$

$$\text{donc } \deg((h-l)2n R_{h,l}(n)) \leq l+1$$

$$\text{et } \deg(R_{h,l}(n)) \leq l-1$$

$$\text{donc } \deg((n^2-1) R_{h,l}(n)) \leq l-1+2 = l+1$$

$$\text{donc } \deg(R_{h,l+1}(n)) \leq l+1$$

la propriété est vérifiée au rang $l+1$ ($l \in [0; h-1]$)

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\forall l \in [0; h-1]$$

$$P_h^{(l)}(n) = (n^2 - 1)^{h-l} R_{h,l}(n) \text{ avec } \deg(R_{h,l}(n)) \leq l$$

(iii) Soit $l \in [0; h-2]$ avec (ii)

$$P_h^{(l)}(-1) = (-1^2 - 1)^{h-l} R_{h,l}(-1) = 0$$

$$P_h^{(l)}(1) = (1^2 - 1)^{h-l} R_{h,l}(1) = 0$$

$$\text{donc } \underline{P_h^{(l)}(-1) = P_h^{(l)}(1) = 0}$$

de même, $L_h = \frac{h!}{(2h)!} q^h$

$$\text{donc } \|L_h\|^2 = \left| \frac{h!}{(2h)!} \right|^2 \|q^h\|^2$$

$$= \left(\frac{h!}{(2h)!} \right)^2 \frac{2^{2h+1} (h!)^2}{2h+1}$$

$$= \left(\frac{h! \cdot h!}{(2h)!} \right)^2 \frac{2^{2h+1}}{2h+1} = \frac{2^{2h} \times 2}{2h+1} \times \frac{1}{\binom{2h}{h}^2}$$

$$\text{donc } \|L_h\| = 2^h \sqrt{\frac{2}{2h+1}} \times \frac{1}{\binom{2h}{h}} = 2^h \sqrt{\frac{2}{2h+1}} \binom{2h}{h}^{-1}$$

$$\text{car } \binom{2h}{h} \geq 1$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 60

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths EML

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2

Partie I

1) - $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) \geq 0$

- f est continue sur \mathbb{R} car $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R}

- On s'intéresse à $\int_{-1}^{+1} f(t) dt$.

f est continue sur \mathbb{R} donc $\int_{-r}^{+r} f(t) dt$ est définie

en $+r$ et en $-r$.

Soit $A > 0 > B$.

$$\int_B^A f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\arctan(t) \right]_B^A = \frac{1}{\pi} \left[\arctan(A) - \arctan(B) \right]$$

$$\text{or } \arctan(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \arctan(B) \xrightarrow{B \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$$

donc $\lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1

f est densité de probabilité

2) $t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R} = X(\mathcal{A})$

Par théorème de Arzouf :

X admet un moment d'ordre 2 si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)| dt$ converge

si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge

car $\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2 f(t) \geq 0$

si $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge

car $t \mapsto t^2 f(t)$ est paire.

soit $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est un nombre réel.

$t^2 f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{t^3}$

$$\text{or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ diverge (Riemann } 0 \leq \alpha)$$

$$\text{or } \forall t \geq 1 \quad \frac{1}{\pi t^\alpha} \geq 0$$

Par critère de comparaison par équivalence,

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt \text{ diverge.}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \text{ diverge}$$

donc X n'admet pas de moment d'ordre 2.

De même:

$$E|X| \text{ existe ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt \text{ converge}$$

$$\text{ssi } \int_0^{+\infty} t f(t) dt \text{ converge.}$$

$$\text{car } \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) \geq 0 \\ \text{et } t \mapsto t f(t) \text{ majorée.}$$

or $t \mapsto t f(t)$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt \text{ est convergente en } +\infty.$$

$$\text{or } t f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t} \text{ or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ est le critère de Riemann divergente}$$

$$\text{donc } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t} dt \text{ diverge or } \forall t \geq 1 \quad \frac{1}{\pi t} \geq 0 \text{ donc}$$

par critère de comparaison par équivalence,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ diverge.}$$

Donc $E(x)$ n'existe pas.

X n'admet ni moment d'ordre 2 ni d'espérance

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt$$

$$F(x) = \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} \left[\arctan(t) \right]_B^x$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) - \frac{1}{\pi} \lim_{B \rightarrow -\infty} \arctan(B)$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

\arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Donc F est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} > 0$$

donc F est strictement croissante sur \mathbb{R} . F est continue sur \mathbb{R}

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 40

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Maths Euro

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numérotter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc F réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0,1[$

Soit $y \in]0,1[$.

$$y = F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\pi} \arctan(x) = y - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \arctan(x) = \pi \left(y - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{or } \forall y \in]0,1[\quad \pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

or \tan est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ dans \mathbb{R} .

$$\text{d'ac } \tan(\arctan(x)) = \tan\left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right)\right)$$

$$\text{d'ac } \underline{x = \tan\left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right)\right)}$$

$$\underline{\forall y \in]0,1[\quad F^{-1}(y) = \tan\left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right)\right)}$$

4a) Soit $U \subset V(]0,1[)$

F^{-1} est bijection de $]0,1[$ dans \mathbb{R} au titre de bijection réciproque de F .

donc $Y(\Omega) = F^{-1}(U)(\Omega) \subset \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$$

car F est une bijection de \mathbb{R} dans $]0,1[$
 or $x \in \mathbb{R}$ donc $F(x) \in]0,1[$

$$\underline{F_Y(x) = F(x)} \quad \text{car } U \sim U(]0,1[) \text{ et } F(x) \in]0,1[$$

donc Y et X suivent la même loi

b) def `cauchy()`:

`U = rd.random()`

`Y = mp.kan(mp.pi * (U - 1/2))`

`return(Y)`

5) $|X|(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

donc $Z(\Omega) = \sqrt{|X|}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}$

si $x < 0$ $P(Z \leq x) = 0 = F_Z(x)$

si $x \geq 0$ $F_Z(x) = P(\sqrt{|X|} \leq x) = P(|X| \leq x^2)$

car $t \mapsto t^2$ est une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+

$F_Z(x) = F(x^2) - F(-x^2)$ car X est à densité

$$F_z(n) = \frac{1}{\pi} \arctan(n^2) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi} \arctan(-n^2) + \frac{1}{2} \right)$$

$$F_z(n) = \frac{1}{\pi} \arctan(n^2) - \frac{1}{\pi} \arctan(-n^2)$$

$$F_z(n) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(n^2) - \arctan(-n^2) \right)$$

Au final: $\forall n \in \mathbb{R} \quad F_z(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \frac{1}{\pi} (\arctan(n^2) - \arctan(-n^2)) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

ou $\forall n \in \mathbb{R} \quad F_z(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ F(n^2) - F(-n^2) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$

or F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car f est continue sur \mathbb{R} .

En effet: Soit $n \in \mathbb{R}$

$$F(n) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^n f(t) dt = F(0) + \int_0^n f(t) dt$$

or f est continue sur \mathbb{R} donc $G: n \mapsto \int_0^n f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.
 Donc G est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Donc F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

donc $n \mapsto F(n^2) - F(-n^2)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+

car F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $n \mapsto n^2$ et $n \mapsto -n^2$ sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

Au final, F_z est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0

f_z est déjà continue sur \mathbb{R}^* .

Montrons que F_z est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_z(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_z(x) = F(0) - F(0) = 0 \quad \text{par continuité de } F \text{ en } 0$$

$$\text{et } F_z(0) = 0$$

donc F_z est continue en 0. F_z est continue sur \mathbb{R} .

Z est donc une VA à densité.

Une densité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_z(x) = F'_z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (2x F'(x^2) + 2x F'(-x^2)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4x}{\pi(x^4+1)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

parce que $f_z(0) = 0 \geq 0$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4x}{\pi(x^4+1)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

6) Z admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_z(t)| dt < +\infty$

$$\text{ssi } \int_0^{+\infty} t f_z(t) dt < +\infty$$

car f_z est nulle sur \mathbb{R}^-
et $\forall t > 0 \quad t f_z(t) \geq 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 10

Session : 2021

Emplacement
QR Code

Épreuve de :

Maths EMC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{or } \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f_z(t) = \frac{4t^2}{\pi(t^4 + 1)} \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}^+$$

donc $\int_0^{+\infty} t f_z(t) dt$ est impaire sur \mathbb{R}^+ .

$$\text{or } t f_z(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{t^2}$$

$$\text{or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge (} 2 > 1 \text{ avec Riemann).}$$

$$\text{donc } \int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{t^2} dt \text{ converge.}$$

$$\text{or } \forall t > 1 \quad \frac{4}{\pi} \frac{1}{t^2} > 0 \text{ donc par critère de}$$

comparaison par équivalence:

$$\int_1^{+\infty} t f_z(t) dt \text{ converge.}$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} t f_z(t) dt \text{ converge. Donc } E(z) \text{ existe}$$

De manière analogue 2).

$t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+ = \mathbb{Z}(\mathbb{R})$

Par théorème de transfert:

\mathbb{Z} admet un nombre d'ordre 2 ssi $\int_0^{+\infty} (t^2 |f_z(t)|) dt$ converge

ssi $\int_0^{+\infty} t^2 |f_z(t)| dt$ converge

car $\forall t > 0, t^2 |f_z(t)| \geq 0$
et f_z est nulle sur \mathbb{N}^-

or $t \mapsto t^2 |f_z(t)|$ est continue sur \mathbb{R}^+

donc $\int_0^{+\infty} t^2 |f_z(t)| dt$ est un réel ≥ 0 .

or $t^2 |f_z(t)| \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi t}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge (Riemann)

donc $\int_1^{+\infty} \frac{4}{\pi t} dt$ diverge.

or $\forall t > 1, \frac{4}{\pi t} > 0$. Donc par critère de comparaison

par équivalence $\int_1^{+\infty} t^2 |f_z(t)| dt$ diverge.

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 |f_z(t)|) dt$ diverge et \mathbb{Z} n'admet pas de nombre

d'ordre 2 dans par de variance.

7a)

Soit $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\beta x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} &= \frac{\alpha x(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \beta x(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \\ &= \frac{\alpha x^3 + \alpha\sqrt{2}x^2 + \alpha x + \beta x^3 - \beta\sqrt{2}x^2 + \beta x}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \\ &= \frac{x^3(\alpha + \beta) + x^2(\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2}) + x(\alpha + \beta)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \end{aligned}$$

avec ce que l'on veut : on a le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha\sqrt{2} + \alpha\sqrt{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 2\sqrt{2}\alpha = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Les racés ont $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ et

intégrés sur $[0; +\infty[$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$ et

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$ ont un sens en $+\infty$.

$$\text{or } \frac{1}{n^2 - \sqrt{2}n + 1} \stackrel{N}{+} \frac{1}{n^2} \left(\frac{N}{+} \frac{1}{n^2 + \sqrt{2}n + 1} \right)$$

$$\text{or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge (Riemann } 2 > 1)$$

or $\forall n \geq 0, \frac{1}{x^2} > 0$ donc par critère de comparaison
par équivalence.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \text{ convergent.}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \text{ convergent.}$$

$$\text{On a: } x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1$$

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$$

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Posons: } u = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Psi: \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{u} du$ et $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ et réelle

une hypothèse standard nous permet de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ dans

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 40

Session : 2023

Épreuve de :

Maths Appro LMC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Λ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$ et $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + \frac{1}{2}} du$
 Par le même changement de variable ont même nature or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx$ converge

donc on a l'égalité

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + \frac{1}{2}} du$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{2u^2 + 1} du$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}u)^2 + 1} du$$

de même en posant encore $s = \sqrt{2}u$
 (même justification par le changement de variable).

$$\text{Donc : } 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctan(A) - \arctan(1) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

c) / car $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

8)

Partie II

g) $1_A \leftrightarrow B(p(A))$

on a $E(1_A) = p(A)$

$V(1_A) = p(A)(1 - p(A))$

10a) Soit $\omega \in \Omega$

supposons $\omega \in (X > s)$

donc $X(\omega) > s$

donc $\chi_{]s; +\infty[}(X(\omega)) = 1$ car $X(\omega) \in]s; +\infty[$

donc $1_{(X > s)}(\omega) \in \chi_{]s; +\infty[}(X(\omega))$

Soit $\omega \in \chi_{]s; +\infty[}(X)$

donc $\chi_{]s; +\infty[}(X(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc $\omega \in \mathbb{1}_{\{X > 5\}}(\omega)$

donc $\chi_{\mathbb{1}_{\{5_i + \epsilon\}}}(X(\omega)) \subset \mathbb{1}_{\{X > 5\}}(\omega)$

Par double inclusion, $\forall \omega \in \Omega$

$$\mathbb{1}_{\{X > 5\}}(\omega) = \chi_{\mathbb{1}_{\{5_i + \epsilon\}}}(X(\omega))$$

11) Soit $\{(|X_h| \leq M), (|X_h| > M)\}$ un système complet d'événements.

Par la formule de probabilité totale :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$p(X_h \leq n) = p((X_h \leq n) \cap (|X_h| > M)) + p((X_h \leq n) \cap (|X_h| \leq M))$$

?

12)

$$18) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\epsilon}{3} \right) = 0$$

on a avec 18) $\forall \epsilon > 0 \exists p(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\epsilon}{3}$
par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|\bar{X}_n| > t) = 0$

20) On a $\forall t > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|\bar{X}_n| > t) = 0$$

donc \bar{X}_n converge en probabilité vers la VA certaine
égale à 0.