Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$

$f_1 : t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc par définition au dessus de ses tangentes, en particulier sa tangente en 0, d'équation : $y_0 : t \mapsto f_1'(0)(t-0) + f_1(0)$

ie : $y_0 : t \mapsto 1(t-0) + 1$

$y_0 : t \mapsto t+1$

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^t \geq t+1$

de même, $g : t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur $\mathbb{R}$

car : $\forall t \in \mathbb{R}, \; g''(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2} \leq 0$

donc g est en dessous de ses tangentes, en particulier celle en 0 d'équation : $t_0 : t \mapsto g'(0)(t-0) + g(0)$

ie : $t_0 : t \mapsto t$

donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \; \ln(1+t) \leq t$
donc en particulier : $\forall t > -1, \; \ln(1+t) \leq t$

2. a) f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit et somme de fonctions qui le sont : $t \mapsto 1+t$, $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto -t$

$\forall t \in [0,1]$, $f'(t) = e^{-t} + (1+t)(-e^{-t}) - 1$
$= -te^{-t} - 1$

de plus : $\forall t \in [0,1]$, $f'(t) > 0 \iff -te^{-t} - 1 > 0$
$\iff -te^{-t} > 1$
$\iff te^{-t} < -1$

or : $0 \leq t \leq 1$
donc : $0 \leq te^{-t} \leq e^{-t}$

donc $te^{-t} > -1$ ie $f'(t) < 0$

donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$

comme f est continue sur $[0,1]$ car dérivable et strictement décroissante sur $[0,1]$ et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2e^{-1} - 1$, f réalise selon le théorème de la bijection une bijection de $[0,1]$ sur $[\frac{2}{e} - 1, 1]$

or : $\frac{2}{e} - 1 < 0$

donc : il existe un unique α dans $[0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

et comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, α est dans $]0,1[$

de plus : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) > 0 \iff f^{-1}(f(t)) < f^{-1}(0)$

par stricte décroissante de la bijection réciproque de f, notée f^{-1}

donc : $\forall t \in [0,1],\ f(t) > 0 \iff t < \alpha$

2.b) def valeur_approchée(t):

```
c=0        α = 0
a=0      ← while ((1+t)**mp.exp(-t)) - t > 0 :
b=1            c = (a+b)/2
               t = t+1                    # par algorithme de dichotomie
         α = c
         return α
```

2. c) on admettra le résultat

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

en montrant que : $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$

on pourrait montrer par décroissante de f^{-1} :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f^{-1}(0)$$

ie : $$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \alpha$$

3. a) def minimum(x,p):

```
s=0  ← N = input "un entier naturel grand"
       k = rd.randint(0, N+1)          # k doit prendre la
       for i in range(0, k+1):           valeur d'un entier
            s = s + (p**i)/mp.fact(i)*mp.exp(-p)   naturel au hasard
            while s < x :                         dans IN
                 k = k+1
       return k
```

```
def simulY(p):
    return( minimum(rd.random(),p))   # rd.random simule la loi uniforme U
```

3.b) $Y(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$. $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y>k-1)-\mathbb{P}(Y>k)$

on admettra le résultat

3.c) on suppose $[Y=k]$ réalisé

donc k est le minimum sur $\mathbb{N}$ tel que $U\leq\sum_{i=0}^{k}\frac{p^i}{i!}e^{-p}$

de plus: $[X=0]$ est réalisé si et seulement si $[\beta+p<U\leq\beta]$ l'est

or: $\sum_{i=0}^{k}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\leq\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{p^i}{i!}e^{-p}$ (on reconnait une série exponentielle)

ie: $\sum_{i=0}^{k}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\leq e^{-p}e^{p}$

≤ 1

on admettra que $[Y=k]\subset[X=0]$

donc: $\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=k])=\mathbb{P}(Y=k)=\frac{p^k}{k!}e^{-p}$ car Y suit une loi de Poisson de paramètre p

3.d) $[X=0]=[\beta+p<U\leq\beta]$

$=[f(p)+p<U\leq f(p)]$

$=[(1+p)e^{-p}-p+p<U\leq(1+p)e^{-p}-p]$

et: $[Y=1]=[U\leq\sum_{i=0}^{1}\frac{p^i}{i!}e^{-p}]$

$=[U\leq e^{-p}+pe^{-p}]$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

donc $[X=0]\cap[Y=1] = [e^{-p}+pe^{-p} < U \leq e^{-p}+pe^{-p}] = \emptyset$

donc $\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1]) = 0$

comme $\{[X=0],[X=1]\}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])$$

$$= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])$$

donc : $\underline{\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) = pe^{-p}}$ car Y suit une loi de Poisson de paramètre p

$$\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0]) = \mathbb{P}\left([(1+p)e^{-p} < U \leq (1+p)e^{-p}-p]\cap[U\leq e^{-p}]\right)$$

$$= \mathbb{P}\left([(1+p)e^{-p} < U \leq (1+p)e^{-p}-p]\right)$$

car $(1+p)e^{-p}-p \leq e^{-p}$

$$= F_U\left((1+p)e^{-p}-p\right) - F_U\left((1+p)e^{-p}\right)$$ car U est à densité

$$= F_U(\beta) - F_U(\beta+p)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

comme $\beta \in [\frac{2}{e}-1, 1]$, $F_U(\beta) = \beta \iff \beta \in [0,1[$

il faudrait ensuite conclure que : $\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) = \beta$

$\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=0]) = \mathbb{P}([(1+p)e^{-p} - p < U \leq e^{-p}])$

$= F_U(e^{-p}) - F_U(\beta)$

il faudrait réussir à conclure

3. e)

$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$

$= 1 - \left(\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) \right)$

$= 1 - \left(\beta + pe^{-p} \right)$

$= 1 - \left((1+p)e^{-p} - p + pe^{-p} \right)$

$= 1 - \left(e^{-p} + pe^{-p} - p + pe^{-p} \right)$

$= 1 + p - \left(e^{-p} + 2pe^{-p} \right)$

$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 + p - (1 + 2p)e^{-p}$

4. a) $[T \geq 1] = \left[\sum_{i=1}^{l} 1_{B_i} \geq 1 \right]$

or la variable 1_{B_i} prend la valeur 1 si B_i est réalisé

donc la probabilité pour que $\left[\sum_{i=1}^{l} 1_{B_i} \geq 1 \right]$ soit réalisé est la probabilité pour qu'au moins 1 des événements B_i le soit donc : $\mathbb{P}(T \geq 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)$

4.b) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k)$

avec la formule du crible : à savoir :
pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

on a (par généralisation) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) - \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_k)$$

or : $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_k) \geq 0$

donc : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$

5. a) Soit $A > 0$

$$\sum_{k=0}^{A} |\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \leq \sum_{k=0}^{A} |\mathbb{P}(X=k)| + \sum_{k=0}^{A} |-\mathbb{P}(Y=k)|$$

(inégalité triangulaire)

or : $|-\mathbb{P}(Y=k)| = \mathbb{P}(Y=k)$

donc : $\sum_{k=0}^{A} |\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \leq \sum_{k=0}^{A} \mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=0}^{A} \mathbb{P}(Y=k)$ $(*)$

on passant à la limite pour $(*)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k) = 1 + 1 = 2$$

(car X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$)

donc on peut affirmer : $\sum_{k=0}^{A} |\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)|$ converge par critère de majoration, et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \leq 2$$

ie : $\sigma(X,Y)$ converge

5.b) On suppose $\mathbb{P}(X=k) \geq \mathbb{P}(Y=k)$

on admettra le résultat

si $\mathbb{P}(Y=k) \geq \mathbb{P}(X=k)$ alors $|\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \leq \mathbb{P}([X\neq k] \cap [Y=k])$

(il le faudrait le montrer)

avec le résultat admis, on a donc : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)| \leq \mathbb{P}([X=k] \cap [Y\neq k]) + \mathbb{P}([X\neq k] \cap [Y=k])$$

5.d) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X\neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k] \cap (Y\neq k])$$

et $\mathbb{P}(X\neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X\neq k] \cap (Y=k])$

donc : en sommant le résultat de la 5. c), on a :

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) &\leq \mathbb{P}(X\neq Y) + \mathbb{P}(X\neq Y) \\ &\leq 2\,\mathbb{P}(X\neq Y) \\ &\leq 2\, d(X,Y)\end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(X\neq Y) \leq 1$

donc : $\sigma(X,Y) \leq 2\, d(X,Y) \leq 2$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

6. On suppose qu'il existe un p_k tel que : $p_k \geq \alpha$

donc : $p_k^2 \geq \alpha^2$

donc $4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geq 4\sum_{k=1}^{n} \alpha^2$

donc comme $n \geq 1$:

$$4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geq 4n\alpha^2 \geq 4\alpha^2$$

et comme $\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha^2 \geq \frac{1}{2}$

donc : $4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geq \frac{4}{2} = 2$

d'autre part avec la question 5. d), $\delta(S_n, T_n) \leq 2$ en supposant que l'on peut appliquer l'inégalité à ces variables.

on a donc : $4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geq \delta(S_n, T_n)$

donc (LC) est vérifiée

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. on admettra que ces variables sont indépendants

8. les $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ suivent la loi de Poisson de paramètre p_k

donc par stabilité de la loi de Poisson, $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$

ie : $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

de plus : on suppose que tous les p_k sont égaux à $\frac{\lambda}{n}$

$X_k(\Omega) = \{0,1\}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

donc $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

et comme S_n compte le nombre de succès de n épreuves de Bernoulli simulées par les $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ identiques et indépendants, on a :

$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathbb{P}(X_k = 1))$

ie : $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \mathbb{P}(f(p_k) < U_k \leq f(p_k) + p_k))$

ie : $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \mathbb{P}\left(f\left(\frac{\lambda}{n}\right) < U_k \leq f\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}\right)\right)$

or : $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{\lambda}{n}\right) < U_k \leq f\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}\right) = F_{U_k}\left(f\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}\right)$
$- F_{U_k}\left(f\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)$

or : $\frac{\lambda}{n} = p_k < \alpha$

donc : $f\left(\frac{\lambda}{n}\right) > f(\alpha) = 0$

et : $f\left(\frac{\lambda}{n}\right) \leq f(0) = 1$

donc $F_{U_a}\left(f\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \frac{\lambda}{n}$

et comme : $f\left(\frac{\lambda}{n}\right) \in]0,1]$ et $\frac{\lambda}{n} \in]0,\alpha[$

on a : $f\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n} \in]0, 1+\alpha[$

si $f\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n} \in [0,1[$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

si $f\left(\frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n} \in [1, 1+\alpha[$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1 - f\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)$

9. a) supposons que l'événement : $\left[\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]\right]$ soit réalisé

on a donc : $\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = Y_k]$ réalisé

donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $X_k = Y_k$

donc : $\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

donc : $S_n = T_n$

ainsi : $\left[\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]\right] \subset [S_n = T_n]$

donc la contraposée est vraie :

$[S_n \neq T_n] \subset \bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]$

9.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a : d'après 9. a) : $\mathbb{P}(S_n \neq T_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]\right)$

$\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \neq Y_k)$ (inégalité de Boole)

or avec la 5. d) : $\delta(S_n, T_n) \leq 2d(S_n, T_n)$

donc $\delta(S_n, T_n) \leq 2\,\mathbb{P}(S_n \neq T_n)$

donc $\delta(S_n, T_n) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \neq Y_k)$

or : avec la question 3. e) : $\mathbb{P}(X_k \neq Y_k) \leq 2p_k^2$

donc : $\delta(S_n, T_n) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} 2p_k^2$

donc $\delta(S_n, T_n) \leq 4 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

on a montré que : $\delta(S_n, T_n) \leq 4 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$

comme tous les p_k valent $\frac{\lambda}{n}$, on a montré en q°8

que : $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

donc en appliquant, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} |\mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(T_n = k)| \leq 4 \sum_{k=1}^{n} p_k^2$$

ie : $\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 4 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$

ie : $\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| \leq 4 \frac{\lambda^2}{n}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11. a) on admettra le résultat

11. b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$

Soit $t \in [k, k+1]$

$$t \geq k$$

donc $t+n \geq k+n$

donc $\frac{1}{t+n} \leq \frac{1}{k+n}$

par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$ comme les fonctions sont continues, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t+n}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+n}\, dt$$

donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{t+n}\, dt \leq \frac{1}{k+n}$ $(*)$

Soit $t \in [k-1, k]$

$$t \leq k$$

donc $\frac{1}{t+n} \geq \frac{1}{k+n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

par croissance de l'intégrale sur $[k-1, k]$, comme les fonctions sont continues, on a :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t+n}\,dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k+n}\,dt$$

ie : $$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t+n}\,dt \geq \frac{1}{k+n} \quad (*)(*)$$

avec $(*)$ et $(*)(*)$, on a :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t+n}\,dt \leq \frac{1}{k+n} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t+n}\,dt$$

11-c) en sommant la relation précédente pour k variant de 1 à n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t+n}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t+n}\,dt$$

donc : $$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{t+n}\,dt \leq S_n \leq \int_{0}^{n} \frac{1}{t+n}\,dt$$

(relation de Chasles)

donc : $$\left[\ln(t+n)\right]_1^{n+1} \leq S_n \leq \left[\ln(t+n)\right]_0^{n}$$

donc $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2n) - \ln n$

donc $\ln\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln 2 + \ln n - \ln n$

donc $\ln 2 + \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln 2$

donc : $\ln 2 + \cancel{\ln n} + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \cancel{\ln n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \ln 2$

par passage à la limite, comme : $\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

on a : par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$$

11. d) on a avec la 11) a) : pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{4}{n} \leq \mathbb{P}(S_n = k) - \frac{S_n^k}{k!} e^{-S_n} \leq \frac{4}{n}$$

donc $-\frac{4}{n} + \frac{S_n^k}{k!} e^{-S_n} \leq \mathbb{P}(S_n = k) \leq \frac{4}{n} + \frac{S_n^k}{k!} e^{-S_n}$

donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-S_n} = e^{-\ln 2}$

(on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n^k}{k!} = \frac{\ln 2^k}{k!}$) par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{(\ln 2)^k}{k!} e^{-\ln 2}$$

donc : $(S_n)_{n \geq 2} \xrightarrow{\mathcal{L}} S$ où $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\ln 2)$

Partie 3 :

12. h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions qui le sont : $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto x$, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$

<u>le problème en 0 :</u> $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

donc $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$

donc : $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = 1$

donc h est continue en 0

de plus : $\forall x>0, \ h'(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}$

$$= \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

or : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc : $h'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(x-1)+1}{x^2}$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x-1+x^2-x+\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+1}{x^2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$$

donc : h est dérivable en 0 et $h'(0) = \frac{1}{2}$

de plus : $\lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{1}{2}$ donc h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques II HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

13. a) Soit $x \geq 0$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

et : $g'(x) = -e^{-x}\int_0^x h(t)\,dt + e^{-x}$

on admettra le résultat

13. b) Soit $t > 0$

$$h(t) - h'(t) = \frac{e^t - 1}{t} - \frac{e^t t - (e^t - 1)}{t^2}$$

$$= \frac{te^t - t - e^t t + (e^t - 1)}{t^2}$$

$$= \frac{e^t - 1 - t}{t^2}$$

13. c) Soit $t > 0$

on a avec la question 1. : $e^t - 1 \geq t$

donc : $e^t - 1 - t \geq 0$

donc : $\frac{e^t - 1 - t}{t^2} \geqslant 0$

donc $h(t) - h'(t) \geqslant 0$

de plus : si $h(t) - h'(t) = 0$

alors : $h(t) = h'(t)$

donc : h est la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas

donc : $h(t) - h'(t) > 0$

si $t = 0$: $h(t) - h'(t) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

donc : $h(t) - h'(t) > 0$

de plus : $\forall x \geqslant 0$, $\int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt = \int_0^x \frac{e^t - 1 - t}{t^2}\,dt$

or : $\int_0^x \frac{e^t - 1 - t}{t^2}\,dt = \int_0^x \frac{e^t dt}{t^2} - \int_0^x \frac{1}{t^2} dt - \int_0^x \frac{1}{t} dt$

et : par critère de Riemann, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$

diverge vers $+\infty$

donc : $\int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}\,dt$ diverge vers $+\infty$

donc : $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x (h(t) - h'(t))\,dt = +\infty$

16. X = np.linspace (np.log (3), 2, 100)

```
Y = [ ]
for x in X :
    n = 2 ; S = n + n ** 2 / α ; d = n ** 3/6
    while d * np.exp (-n) > 0.0001 :
        n = n + 1
        S = S +
```