Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 27	Session : 2025

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) a) f_n est dérivable sur $[0,1]$ polynome

$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} \geq 0$ comme somme de termes ≥ 0 sur $[0,1]$

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim_{x \to 0} f_n(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

donc f_n est strictement croissant sur $[0,1]$

b) f_n est continue (car dérivable) et strictement croissant sur $[0,1]$ donc d'après le théorème de la bijection f_n est bijective de $[0,1]$ donc $f([0,1]) = [0,+\infty[$

Or $1 \in [0,+\infty[$ donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution notée u_n avec $u_n \in [0,1]$

c) u_1 est la solution de l'équation $f_1(x) = 1 \iff \sum_{k=1}^{1} k x^k = 1$

$\iff x = 1$

donc $u_1 = 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) a) $\forall x \in [0,1]$ $f_{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k x^k = \sum_{k=1}^{n} k x^k + (n+1) x^{n+1}$

$= f_n(x) + (n+1) x^{n+1}$

b) $\forall x [0,1]$ $f_{(n+1)}(x) = f_n(x) + (n+1) x^{n+1}$

donc $f_{(n+1)}(x) - f_{(n)}(x) = f_n(x) + (n+1) x^{n+1} - f_n(x)$

$= (n+1) x^{n+1}$

Or $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$

donc $(n+1) x^{n+1} \geq 0$

On a donc $\forall x \in [0,1]$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow f_{(n+1)}(x) \geq f_n(x)$

On pose $x = U_n$ avec $U_n \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f_{n+1}(U_n) \geq f_n(U_n)$

$\Leftrightarrow f_{n+1}(U_n) \geq 1$

c) $f_{(n+1)}(x) = f_n(x) + (n+1) x^{n+1}$

Soit $g : x \to (n+1) x^{n+1}$ g est dérivable comme polynome sur $[0,1]$

$g'(x) = (n+1)^2 x^n \geq 0$ donc g est strictement croissante sur $[0,1]$

On peut conclure que $f_{n+1}(x)$ est strictement croissante sur $[0,1]$

or $f_{n+1}(U_n) \geq f_n(U_n) \Leftrightarrow f_{n+1}(U_n) \geq f_{n+1}(U_{n+1})$

$\Leftrightarrow U_n \geq U_{n+1}$ car f_n est strictement croissante sur $[0,1]$

donc la suite U_n est décroissante

d) U_n est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème des suites monotones la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel l avec $l \in [0,1]$

3) a) $\forall x \neq$ $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

b) $\sum_{k=0}^{n} x^k$ est dérivable comme polynôme

donc $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$

car le terme en 0 vaut 0

$= -(n+1)(x^n - x^{n+1}) + 1 - x^{n+1}$

$= \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$

$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

$\forall x \in [0,1[$

c) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} \times x$

Or $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \times x = \frac{n(x^{n+1}) - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \times x$

$$= \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

donc $f_n(x) = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$

4) a) U_2 est la solution a l'equation $f_2(x) = 1$

$\Leftrightarrow x + 2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x + 2x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times -1$

$= 9 > 0$

$x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$

$x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

donc les 2 seules solution possible a $f_2(x) = 1$ sont $\{-1 ; \frac{1}{2}\}$ or $U_n \in [0;1]$

donc $U_2 = \frac{1}{2}$

$\forall n \geq 2$ on a deja $U_n \geq 0$ car $U_n \in [0;1]$

de plus U_n est décroissante donc $\forall n \geq 2$ $U_n \leq U_2 \Leftrightarrow U_n \leq \frac{1}{2}$

On a donc $\forall n \geq 2$ $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

b) $\forall n \geq 2$: $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq (U_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{2}\right|^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in [0,1[$

$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$

donc par le théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty} U_n^n = 0$

On a $V_n \geq 2$ $\quad 0 \leq U_n^n \leq \left|\frac{1}{2}\right|^n$

$\Leftrightarrow 0 \leq n U_n^n \leq \left|\frac{1}{2}\right|^n n$

$0 \xleftarrow{n\to+\infty}$; $\xrightarrow{n\to+\infty} 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| \in [0,1[$ et par croissance comparée

donc par le théorème d'encadrement $(U_n)^n n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

c) $f_n(U_n) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} + U_n}{(1-U_n)^2} = 1$

car $V_n \geq 2$ $U_n \neq 1$

$\Leftrightarrow n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} + U_n = (1-U_n)^2$

$\Leftrightarrow n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} = U_n^2 - 3U_n + 1$

d) par passage à la limite dans l'égalité on obtient que :

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n^2 - 3U_n + 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} nU_n^{n+2} - (n+1)U_n^{n+1}$

Or $nU_n^{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée et $(n+1)U_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (question 4)b) avec $n = (n+1)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n^2 - 3U_n + 1 = 0$

$\Leftrightarrow l^2 - 3l + 1 = 0$

$\Delta = 5$ $\quad x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Or $l \in [0,1]$

On remarque $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $\cdot\ 5 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{5} > 2$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$

$\cdot\ \frac{3}{2} > 1$

donc $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc l ne peut pas être égale à x_2

de plus $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ * $\in [0,1]$ donc $x_1 \in [0,1]$

On peut conclure que $l = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

* car $\cdot\ \sqrt{5} > 2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < -2 \Leftrightarrow 3-\sqrt{5} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$

$9 > 5 \Leftrightarrow 3 > \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 3-\sqrt{5} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$

exercice 2 :

$$1)\ M(a,b) = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

donc $E = \text{vect}(A,B)$ donc E est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

b) La famille (A,B) est génératrice de E.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La famille (A,B) est donc libre et génératrice donc la famille (A,B) est une base de E et $\dim(E) = 2$

2) A et B sont diagonalisables car elles sont symétriques

∘ Or $\text{vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{vect}(C_1, C_2)$ avec C_1, C_2, C_3 sont les colonnes de A
car $C_1 = C_3$

$\dim(\text{vect}(C_1, C_2)) = 2 \neq 3 = \text{ordre de } A$
donc A n'est pas inversible

∘ Or $\text{vect}(k_1, k_2, k_3) = \text{vect}(k_1, k_2)$ où k_1, k_2, k_3 sont les colonnes de B

$\dim(\text{vect}(k_1, k_2)) = 2 \neq 3 = \text{ordre } B$
donc B n'est pas inversible

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(1,3)$

donc A s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments $\in E$
donc $A \in E$

4)

5) a) A n'est pas inversible donc rang $(A - 0I) \neq 3$ = ordre de A

$\Rightarrow 0 \in Sp(A)$

La question 2 permet d'obtenir que $0 \in Sp(A)$

b) • $A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

soit C_1, C_2, C_3 les colonnes de $A-5I$ on remarque que $C_1 = -C_2 - C_3$
donc $\dim(\text{vect}(C_1, C_2, C_3)) = \dim(\text{vect}(C_1, C_3)) = 2 \neq 3$

donc $A - 5I$ n'est pas inversible donc $5 \in Sp(A)$

• $A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ On soit C_1, C_2, C_3 les colonnes de $A+4I$
$\dim \text{vect}(C_1, C_2, C_3) = \dim \text{vect}(C_1, C_2) = 2 \neq 3$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $A+4I$ n'est pas inversible et $-4 \in S_p(A)$

c). On veut $AX=0$ avec $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 \\ 3a-b+3c=0 \\ a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 \\ 3a-b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 \\ -10b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $E_0(A) = \text{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{U}\right)$

- On veut $AX=5X \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=5a \\ 3a-b+3c=5b \\ a+3b+c=5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+3b+c=0 \\ 3a-6b+3c=0 \\ a+3b-4c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-4c=0 \\ a-2b+c=0 \\ -4a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-4c=0 \\ -5b+5c=0 \\ 15b-15c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-4c=0 \\ c=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=c \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Leftrightarrow X = c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $E_5(A) = \text{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{V}\right)$

On résout $AX = -4X \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c = -4a \\ 3a-b+3c = -4b \\ a+3b+c = -4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+3b+c=0 \\ 3a+3b+3c=0 \\ a+3b+5c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 5a+3b+c=0 \\ a+3b+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ -2b-4c=0 \\ 2b+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-c \\ b=-2c \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}c\\-2c\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow X = c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

donc $E_{-4}(A) = \text{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}}_{W}\right)$

• Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 U + \lambda_2 V + \lambda_3 W = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

La famille (U,V,W) est libre et de cardinale $3 = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc la famille (U,V,W) est une base de $\mathbb{R}^3$

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

7) $M_{(a,b)}V = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc V est un vecteur propre de E associé à la valeur propre 0

$E_0(M_{(a,b)}) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

10/28

$M(a,b)V = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}$

donc V est un vecteur propre de E associé à la valeur propre $(2a+b)$

$$M(a,b)\,W = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ -4a+4b \\ 2a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times (2a-2b)$$

donc W est un vecteur propre de toutes les matrices de E
associé à la valeur propre $(2a-2b)$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

~~On a~~ $\cancel{\sum_{\lambda \in Sp\,M(a,b)} \dim(E_\lambda) = 3 = \operatorname{rang} M_3(\mathbb{R})}$ ~~donc $M(a,b)$ est dia~~

d'après la q 2) $M(a,b)$ est diagonalisable càd $\exists P$ inversible et D diagonale | $M(a,b) = PDP^{-1}$

On peut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(M(a,b))^n = PD^nP^{-1}$

de plus D est diagonale donc on peut mettre les puissances n sur la diagonale ensuite on calcule P^{-1} et ensuite on calcule PD^nP^{-1}

en calculant PD^nP^{-1} on a le calcul de $M(a,b)^n$: On a donc la puissance $n^{ième}$ n'importe quelle les matrices de E.

c)

exercice 3 :

1) • $f_n(x) \geq 0$ si $x \notin [0, n]$

si $x \in [0, n]$: $0 \leq x \leq n$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{n} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \geq -\frac{x}{n} \geq -1$

$\Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{x}{n} \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$

donc $f_n(x) \geq 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n \geq 0$

• f_n est continue $]-\infty, 0[\cup]n, +\infty[$ comme constante
f_n est continue sur $[0, n]$ comme composée avec quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas)
f_n est continue sur $\mathbb{R}$ privé de n et 0

• Soit $A \in B$: $\int_A^B f_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx$

$= \left[-\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \right]_0^n$

$= 0 + 1^{n-1}$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{A \to -\infty} 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$ converge et vaut 1

donc f_n est une densité

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\left(1 - \frac{X_n}{n}\right)$ admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\left(1 - \frac{x}{n}\right) \times f_n(x)\right| dx$ converge

↳ théorème de transfert

Soit $A \leq 0$ et $B \geq n$: $\int_A^B \left(1 - \frac{x}{n}\right) f_n(x)\, dx$

$$= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= \left[\frac{-n}{n+1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\xrightarrow[B \to +\infty]{A \to -\infty} \frac{n}{n+1}$$

donc $1 - \frac{X_n}{n}$ admet une espérance qui vaut

$$E\left(1 - \frac{X_n}{n}\right) = \lim_{A \to -\infty} \int_A^0 \left(1 - \frac{x}{n}\right) f_n(x)\, dx + \lim_{B \to +\infty} \int_0^B f_n(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right) dx$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$\left(1 - \frac{X_n}{n}\right)^2$ admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^2 f_n(x)\, dx$ converge

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $A<0$ et $B>n$ $\displaystyle\int_A^B \left(1-\frac{x}{n}\right)^2 f_n(x)\, d(x)$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} dx$$

$$= \left[-\frac{n}{n+2}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2}\right]_0^n$$

$$= \frac{n}{n+2}$$

$$\xrightarrow[B\to+\infty]{A\to-\infty} \frac{n}{n+2}$$

donc $\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2$ admet une espérance

et $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = \frac{n}{n+2}$

b) $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \iff E(1) - E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$

par linéarité de l'espérance $\iff -E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n}{n+1} - 1$

$$\iff E\left(\frac{X_n}{n}\right) = 1 - \frac{n}{(n+1)}$$

$$\iff E(X_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\iff E(X_n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

$V\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \iff V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}$

14/28

$\Leftrightarrow V(X_n) = \dfrac{1}{n(n+2)} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2 - n^2 - 2n}{n(n+2)(n+1)^2}$

$$= \frac{1}{n(n+2)(n+1)^2}$$

3) $P(X_n < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(x)\,dx$

- si $x < 0$: $P(X_n < x) = 0$

si $x > n$ $P(X_n < x) = 0$

si $x \in [0, n]$ $P(X_n < x) = \displaystyle\int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$

$$= \left[-\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^x$$

$$= -\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n + 1$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

donc $F_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4) a) $\forall x < 0$ $F_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

b) Soit $x \geq 0$ // $n \geq \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow n \geq x$

$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ (d'après la q3) car $x \in [0, n]$)

c) $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-x}{n}$ avec $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$

avec $X = \frac{-x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x \xrightarrow[n\to+\infty]{} -x$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x$

d) . On a $\forall x < 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

. $\forall x \in [0, n)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$

Or $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$

et $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x$

donc par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = e^{-x}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-e^{-x}$

. $\forall x > n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X

~~avec X qui suit une loi $\mathcal{E}$ (exponentiel) de paramètre $\lambda = 1$~~

~~$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \\ 0 & \end{cases}$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2021

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

avec $P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5) $P(U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap \dots U_n \leq x) = P(U_1 \leq x) \times P(U_2 \leq x) \times \dots \times P(U_n \leq x)$ par indépendance

car les U_i avec $i \in [1, n]$ suivent la même loi $= (P(U_1 \leq x))^n$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

donc $F_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^n & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

6) $P(Z_n > x) = P(M_n \times n \geq x) = P\left(M_n > \frac{x}{n}\right)$

$= P\left(U_1 > \frac{x}{n} \cap U_2 > \frac{x}{n} \cap \dots \cap U_n > \frac{x}{n}\right)$

par indépendance $= P\left(U_1 > \frac{x}{n}\right) \times P\left(U_2 > \frac{x}{n}\right) \times \dots \times P\left(U_n > \frac{x}{n}\right)$

car les U_n la même loi $= \left(P\left(U_1 > \frac{x}{n}\right)\right)^n$

$= \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$

si $\frac{x}{n} \leq 0 \iff x \leq 0$: $\left(1 - P\left(U \leq \frac{x}{n}\right)\right)^n = 1$

si $0 \leq \frac{x}{n} \leq 1 \iff 0 \leq x \leq n$: $\left(1 - P\left(U \leq \frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

si $\frac{x}{n} \geq 1 \iff x \geq n$: 0

donc $P(Z_n \geq x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 0 \\ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n] \\ 0 \text{ si } x \geq n \end{cases}$

• $P(Z_n \leq x) = 1 - P(Z_n \geq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n] \\ 0 \text{ si } x \geq n \end{cases}$

c) On remarque que X_n et Z_n ont les même fonction de répartition donc X_n et Z_n suivent la même loi

d)

problème

1)

2) a) $U(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$

$\forall k \in U(\Omega)\ P(U_k) = \dfrac{1}{n+1}$

b) $P_{U_k}(X_n = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i\right)$ avec N_i : tirer une boule noire au $i^{ème}$ lancé

par indépendance $= P(N_1) \times P(N_2) \times \dots \times P(N_i)$

par équiprobabilité $= (P(N_1))^n$

$= \left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $n-k+1 < n$ donc $\dfrac{n-k+1}{n} < 1$

donc $P_{U_k}(X_n = 0) = 0$

$P(X_n = j) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0 = 1$

donc $P(X_n = j) = 1$
$P(X_n = 0) = 0$

3)a) $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad P_{U_k}(X_n = k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}$

donc X_n suit une loi géométrique de paramètre $\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$ ensachant l'événement U_k

b)

4)a) $P_{U_{n+1}}(X_n = 1) = 0$ car l'urne numéro $(n+1)$ n'a que des boules noires il est donc impossible de tirer une boule blanche

b) $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad P_{U_k}(X_n = 1) = \frac{n-k+1}{n}$

c) $P(X_n = 1) = \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k \cap X_n = 1)$ par la formule des probabilités total avec le système complet d'événement U_k avec $k \in [\![1, n+1]\!]$

$= \sum_{k=1}^{n} P(U_k) \times P_{(U_k)} X_n = 1$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)} \times \frac{n+1-k}{n} = \frac{1}{(n+1)(n)} \sum_{k=1}^{n} (n+1) - k$

$= \frac{1}{(n+1)n} \left(\sum_{k=1}^{n} (n+1) - \sum_{k=1}^{n} k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$= \frac{1}{n} \times n - \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5) Soit $j \geq 2$

a) $P_{(U_{n+1})}(X_n = j) = 0$ car l'urne $(n+1)$ ne contient pas de boule blanche

b) $P_{(U_k)}(X_n = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \times \left(\frac{n-k+1}{n}\right)$

c)

Q4) Soit $M \geq 2$: $\sum_{j=2}^{M} \left(\frac{k}{n}\right)^{j+1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}$

$$= \sum_{j=2}^{M} \left(\frac{k}{n}\right)^{j+1} - \sum_{j=2}^{M} \left(\frac{k}{n}\right)^{j}$$

$$= \left(\frac{k}{n}\right)^{3} \sum_{l=0}^{M-2} \left(\frac{k}{n}\right)^{l} - \left(\frac{k}{n}\right)^{2} \sum_{l=0}^{M-2} \left(\frac{k}{n}\right)^{l}$$

avec $k < n$
$0 \leq \frac{k}{n} < 1$ $\xrightarrow{M \to +\infty}$ $\left(\frac{k}{n}\right)^{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)} - \left(\frac{k}{n}\right)^{2} \left(\frac{1}{1-\frac{k}{n}}\right)$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^{2} \left(\frac{1}{1-\frac{k}{n}} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^{2}\right.$$

b) $P(X_n > 2) =$

7) a) $P(X = 0) = 0$

1) oui car $X = 0$ revient à pioché une infinité de fois la même couleur (noir) ce qui est presque impossible.

8) a) X admet une espérance si $\sum_{j=0}^{+\infty} |j\, P(X_n = j)|$ converge

Soit $M \geq 0$: $\sum_{j=0}^{M} j\,P(X=j) = \sum_{j=2}^{M} j \times \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)$

$\downarrow$ car $P(X=1) = P(X=0) = 0$

b)

9) a) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow p \leq t \leq p+1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{p+1}$ car $x \to 1/x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

par croissance de l'intégrale avec $p \leq p+1$

$\Leftrightarrow \int_p^{p+1} \left(\frac{1}{p}\right) dt \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{(p+1)}\, dt$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} \left[t \right]_p^{p+1} \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \geq \frac{1}{(p+1)} \left[t \right]_p^{p+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p} \geq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \geq \frac{1}{p+1}$

b) par passage à la somme dans l'encadrement suivant :

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

: $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

avec $k = p+1$ $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

Or $\int_1^n \left(\frac{1}{t}\right) dt = \left[\ln(t)\right]_1^n = \ln(n)$

On a donc l'encadrement suivant :

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

c) On a $\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

On remarque que $\ln(n) \geq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \iff \ln(n) \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - 1$

$\iff \ln(n) + 1 \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

de plus $\ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

$\Leftrightarrow \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

On a d'un coté $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geq \frac{1}{n} \ln(n)$ de l'autre $\ln(n)+1 \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

On a donc l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

d) $\left(\ln(n) + \frac{1}{n}\right) \times \left(\frac{n}{n+1}\right) \leq E(X_n) \leq \left(\ln(n) + 1\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(n)(n)}{n+1} + \frac{1}{(n+1)} \leq E(X_n) \leq \frac{\ln(n)\,n}{(n+1)} + \frac{n}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times \ln(n)} \leq \frac{E(X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)\ln(n)}$

On $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{(n+1)} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n)} = 0$

donc $\lim \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\ln(n)} = 1$

$$\frac{n}{(n+1)\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{(n+1)} + \frac{n}{(n+1)\ln(n)} = 1$

donc par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{E(X_n)}{\ln(n)} = 1$

donc $E(X_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$