MOUHAJIRI

ILIAS

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom MOUHAJIRI

Prénom (s) ILIAS

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 08

Numéro de table 041

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 1

partie 1

1)

a/ On a $J = M - 2I$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b/ On a $J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= 3J$

c/

On a $J = M - 2I \Rightarrow M = J + 2I$

Ainsi, $M^2 = (J + 2I)^2 = J^2 + 2 \cdot J \cdot 2I + 4I^2$

$= J^2 + 4J + 4I$

$= 3J + 4J + 4I$

$= 7J + 4I$

d/

On a $7M - 10I = 7J + 14I - 10I$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$= 7J + 4I = M^2 (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$

2)

a/ On a $M^2 = 7M - 10I$

donc $M^2 - 7M + 10I = 0$

Ainsi, on peut dire que R est un polynôme annulateur de M.

b/

On a $R(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$

2 est bien racine de R

et on résout $R(x) = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10$

$= 49 - 40 = 9$

donc $x_1 = \frac{7 - \sqrt{9}}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{7 + \sqrt{9}}{2} = \frac{10}{2} = 5$

5 est une autre racine de R

c/

Comme R est un polynôme annulateur de M

et, 2 et 5 sont ses racines.

Alors M admet 2 et 5 comme deux valeurs propres éventuelles.

3)

On a $MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$

On en déduit que U est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 5.

4) On a $MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V$

et $MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

V et W sont deux vecteurs propres de M associés à la valeur propre 2.

5)

a/ On a $QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= 3I$

b/

comme $QP = 3I \Rightarrow Q \cdot \frac{1}{3} P = I$
alors P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

c/

On a d'abord : $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

par ailleurs, $MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$= PD$

d/ procédons à une récurrence:

- pour $n=0$, on a $M^0 = I$
  et $\frac{1}{3} P D^0 Q = \frac{1}{3} P \cdot Q = \frac{1}{3} P \cdot P^{-1} = I$

  (La proposition est ainsi valide pour $n=0$)

- soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$
  et prouvons que $M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$

  on a $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$ (par hypothèse de récurrence)

  donc $M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^n Q . M$
  $= \frac{1}{3} P D^n Q . P D P^{-1}$ (cf 5(c))

  $= \frac{1}{3} P D^n Q \, P D . \frac{1}{3} Q$

  $= P D^n . P^{-1} . P D . \frac{1}{3} Q$
  $= P . D^n . D . \frac{1}{3} Q$
  $= \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$

- par récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N})$
  $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom M O U H A J I R I

Prénom (s) I L I A S

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 041

Commencez à composer dès la première page

partie 2.

6)

a/

On a $(\forall n \geq 0)$ $U_{n+1} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$

$= 5(7a_n + b_n) + (-10a_n)$

$= 35a_n + 5b_n - 10a_n$

$= 25a_n + 5b_n$

$= 5(5a_n + b_n) = 5U_n$

Ainsi, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 5.

et donc $(\forall n \geq 0)$

$U_n = U_0 \times 5^n = 1 \times 5^n = 5^n$

b/

On a $(\forall n \geq 0)$ $V_{n+1} = -2a_{n+1} - b_{n+1}$

$= -14a_n - 2b_n + 10a_n$

$= -4a_n - 2b_n$

$= 2(-2a_n - b_n) = 2V_n$

et donc $(V_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

et on a $(\forall n \geq 0)$

$$V_n = V_0 \cdot 2^n = -1 \cdot 2^n = -2^n$$

c/

on a $(\forall n \geq 0)$

$$\begin{cases} U_n = 5a_n + b_n \\ V_n = -2a_n - b_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = U_n - 5a_n \\ a_n = \dfrac{-V_n - b_n}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = U_n - 5a_n \\ a_n = \dfrac{-V_n - U_n + 5a_n}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = U_n - 5a_n \\ -\dfrac{3}{2}a_n = \dfrac{-V_n - U_n}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = U_n - 5a_n \\ a_n = \dfrac{1}{3}(V_n + U_n) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b_n = U_n - 5a_n \\ a_n = \dfrac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 5^n - \frac{1}{3}(5.5^n - 2^n.5) \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{3}(3.5^n - 5.5^n + 2^n.5) \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{3}(5.2^n - 2.5^n) \\ a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \end{cases}$$

7)

- pour $n = 0$, on a $M^0 = I$
  et $a_0 M + b_0 I = 0 + 1.I = I$
- Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que
  $M^n = a_n M + b_n I$
  et montrons que $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

On a $M^n = a_n M + b_n I$
et donc $M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M$
$= a_n(7M - 10I) + b_n M$ (cf 1(d))
$= 7a_n M + b_n M - 10 a_n I$
$= (7a_n + b_n) M - 10 a_n I$
$= a_{n+1} M + b_{n+1} I$

- par récurrence, on a $(\forall n \geq 0)$
  $M^n = a_n M + b_n I$

partie 3

8)

a/ on a $p(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$ et $p(X_2=2) = p(X_2=3) = \frac{1}{5}$

comme le chat s'est nourrie dans la maison 1 pendant le premier jour.

b/

on a $E(X_2) = 1p(X_2=1) + 2p(X_2=2)$

$+ 3p(X_2=3) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \underline{\frac{8}{5}}$

c/

on a d'abord $E(X_2^2) = 1^2 p(X_2=1) + 4p(X_2=2)$
$+ 9p(X_2=3) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} = \underline{\frac{16}{5}}$

et par formule de Huygens.

$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2$

$\cancel{= \frac{8}{5} - 16}$

$= \frac{16}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2$

$= \frac{16}{5} - \frac{64}{25} = \frac{80-64}{25} = \underline{\frac{16}{25}}$

et alors $\sigma(X_2) = \sqrt{V(X_2)} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \underline{\frac{4}{5}}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom MOUHAJIRI

Prénom (s) ILIAS

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 08

Numéro de table 041

2)

a/

pendant le deuxième jour, le chat peut se nourrir dans les trois maisons, tout comme pour le troisième jour

et ainsi $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$

et par formule des probabilités totales.

$$P(X_3=1) = P_{[X_2=1]}(X_3=1) \cdot P(X_2=1) + P_{[X_2=2]}(X_3=1) \cdot P(X_2=2) + P_{[X_2=3]}(X_3=1) \cdot P(X_2=3)$$

$$= \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{9}{25} + \frac{1}{25} + \frac{1}{25}$$

$$= \frac{11}{25}$$

et de même $P(X_3=2) = P_{[X_2=1]}(X_3=2) \cdot P(X_2=1)$

$$+ P_{[X_2=2]}(X_3=2) \cdot P(X_2=2) + P_{[X_2=3]}(X_3=2) \cdot P(X_2=3)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$= \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{25} + \frac{3}{25} + \frac{1}{25} = \frac{7}{25}$$

et $p(X_3=3) = p_{[X_2=1]}(X_3=3)\cdot p(X_2=1)$

$+ p_{[X_2=2]}(X_3=3)\cdot p(X_2=2) + p_{[X_2=3]}(X_3=3)\cdot p(X_2=3)$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{25}$

b/

On peut traduire cet évènement à

$[X_2=2]$

$[X_3=3]$

et donc par formule de Bayes:

$$p_{[X_3=3]}(X_2=2) = \frac{p_{[X_2=2]}(X_3=3)\cdot p(X_2=2)}{p(X_3=3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{7}{25}} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{1}{7}$$

10)

a/ On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\frac{1}{5} M C_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(X_n=1) \\ p(X_n=2) \\ p(X_n=3) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}p(X_n=1) + \frac{1}{5}p(X_n=2) + \frac{1}{5}p(X_n=3) \\ \frac{1}{5}p(X_n=1) + \frac{3}{5}p(X_n=2) + \frac{1}{5}p(X_n=3) \\ \frac{1}{5}p(X_n=1) + \frac{1}{5}p(X_n=2) + \frac{3}{5}(X_n=3) \end{pmatrix}$$

On, on a $\{[X_n=1],[X_n=2],[X_n=3]\}$

formant un système complet d'évènements,

et par formule de probabilité totale

$$P(X_{n+1}=1)=P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)\cdot P(X_n=1)$$

$$+P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)\cdot P(X_n=2)+P_{[X_n=3]}(X_{n+1}=1)$$

$$\cdot P(X_n=3)=\frac{3}{5}P(X_n=1)+\frac{1}{5}(X_n=2)$$

$$+\frac{1}{5}P(X_n=3)$$

et de même,

$$P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{5}P(X_n=1)+\frac{3}{5}P(X_n=2)$$

$$+\frac{1}{5}P(X_n=3)$$

et

$$P(X_{n+1}=3)=\frac{1}{5}P(X_n=1)+\frac{1}{5}P(X_n=2)+\frac{3}{5}P(X_n=3)$$

Ainsi, $\frac{1}{5}MC_n=\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=1)\\P(X_{n+1}=2)\\P(X_{n+1}=3)\end{pmatrix}=\underline{C_{n+1}}$

b/ procédons à une récurrence :

• pour $n=1$, on a $\frac{1}{5^{1-1}}M^{1-1}C_1=I_3C_1=C_1$

(la proposition est valide pour $n=1$)

* Soit n de $\mathbb{N}^*$, supposons que $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

et prouvons que $C_{n+1} = \frac{1}{5^n} M^n C_1$

On a $C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n$ (cf 10(a))

$$= \frac{1}{5} M \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot M^{n-1} C_1 = \frac{1}{5^n} M \cdot M^{n-1} C_1$$

$$= \frac{1}{5^n} M^n C_1$$

* par récurrence, on a $(\forall n \geq 1)$
$$C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$$

c/

On a $(\forall n \geq 1)$ $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

et comme $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $X_1 = 1$)

alors $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1} + 2^n \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} \end{pmatrix} \cancel{\begin{matrix} 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5^{n-1} + 2^n \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} \end{matrix}} \cancel{\begin{matrix} 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5^{n-1} - 2^{n-1} \\ 5 \end{matrix}} \right)$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

et donc $(\forall n \geq 1)$: $\begin{cases} P(X_n = 1) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \\ P(X_n = 2) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \\ P(X_n = 3) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \end{cases}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom: MOUHAJIRI

Prénom (s): ILIAS

20 / 20

Ecricome

Épreuve : Maths T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 08

Numéro de table 041

Commencez à composer dès la première page.

11)

a/ On a $E(X_n) = 1\,p(X_n=1) + 2\,p(X_n=2) + 3\,p(X_n=3)$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$= 2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

b/

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \lim_{n \to +\infty} 2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 2$$

car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ comme $\frac{2}{5} \in]-1,1[$

partie h

12)

La requête saisie devra afficher le nom et la puce des chats qui sont à la fois grises et féminin

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

13)

```
Update propriétaires
Set nom chat = "Niels"
Set puce chat = "987654321"
Where id prop = "1234" ;
```

14)

```
Alter Table chats
Add values(457", "Niels", "birmane", "M", "blanche"
          , '1', '2', '98765423';) ;
```

15)

```
Select chats.nom chat, race, puce, nom prop,
  adresse
From chats join propriétaires
On chat.puce = propriétaires.puce chat ;
```

Exercice 2

1)

comme f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, alors

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = (e^x + e^{-x})' = \cancel{e^x - e^{-x}} = e^x + (-x)' e^{-x}$

$= e^x - e^{-x} = g(x)$

et par dérivabilité de g.

$$g'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x - (-x)'e^{-x} = e^x + e^{-x} = f(x)$$

2)

a/ on a $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - e^{-x} = -\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

et on a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x - e^{-x} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \text{ comme } \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty \end{cases}$

b/

on a $g'(x) = f(x) = e^x + e^{-x}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

or, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$

donc $f(x) > 0$ et $g'(x) > 0$

et alors g est strictement croissante.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$

3) a/

On a $g(x) = 0 \iff e^{x} - e^{-x} = 0$

$\iff e^{x} = e^{-x}$

$\iff \ln(e^{x}) = \ln((e^{x})^{-1})$

$\iff x = -x$

$\iff x = 0$

b/

Tableau de signe de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(D'après le tableau de variation de g (2(b)))

c/

D'après le tableau de signe de g, on peut présenter le tableau de variation de f ainsi:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

car $f'(x) = g(x)$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom MOUHAJIRI

Prénom (s) ILIAS

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths I

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 08

Numéro de table 041

et comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ $\left(\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty\right)$

et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\left(\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\right)$

d/

f est de classe C^2 car $f'(x) = g(x)$
et g est de classe C^1

Ainsi, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\cancel{g''(x)} = f''(x) = g'(x) = f(x)$

et comme f est minorée par 2, ($c.f.$ 3(c))

Alors $f''(x) > 0$ et f est bien convexe.

4)

On a $g''(x) = f'(x) = g(x)$.

Tableau de convexité. (Suite : dernière page de la feuille 05)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

d'où $g(x) \leq 2x$

et on a g convexe sur $[0,+\infty[$, donc $(\forall x \in [0,+\infty[)$

$g''(x) - y \geq 0$

et $g(x) \geq y$

d'où $g(x) \geq 2x$

b)

a)

on a $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) - g(x) = e^{x} + e^{-x} - e^{x} + e^{-x}$

$= e^{-x} + e^{-x}$

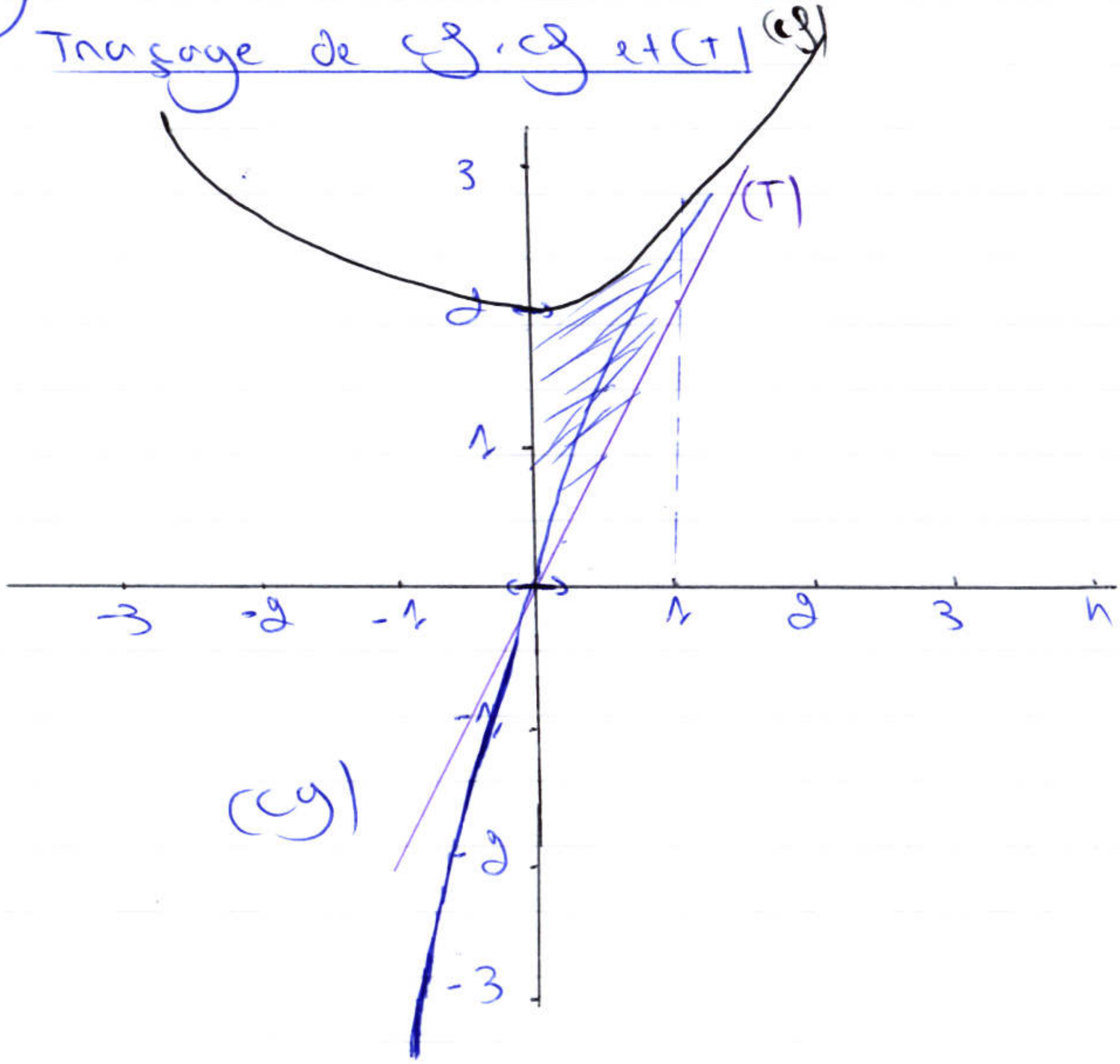
et par positivité de $t \to e^{t}$ sur $\mathbb{R}$

$f(x) - g(x) \geq 0$ et $f(x) \geq g(x)$

b/ comme $f(x) \geq g(x)$ $(\forall x \geq 0)$

alors C_f est au dessus de C_g sur $\mathbb{R}$

7) Traçage de $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et (T)



8)

a/ Voir (7)

b/

On calcule alors $\int_0^1 f(x)\,dx$

On a $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x + e^{-x})\,dx$

$= \left[e^x - e^{-x} \right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{e}\right) - (1 - 1)$

$= e - \frac{1}{e}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
convexité	$\frown$	$(0,0)$	$\smile$

5)

a/

On a $(T) : y = g'(0)(x-0)+g(0)$

$$= g(0)x + 0$$
$$= 2x$$

b/

~~On a $(\forall x \in \mathbb{R})$ $g(x) \geq y$~~

comme g est concave sur $]-\infty, 0]$, donc C_g est en dessous de tout ses tangentes y compris (T) sur $]-\infty, 0]$

et puisque g est convexe sur $[0, +\infty[$, donc C_g est au dessus de tout ses tangentes y compris (T) sur $[0, +\infty[$.

c/

g est concave sur $]-\infty, 0]$, donc $(\forall x \in]-\infty, 0])$

$g''(x) - y \leq 0$

donc $g(x) - y \leq 0$ et $g(x) - 2x \leq 0$

(Suite : deuxième page de la feuille 05)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom | M | O | U | H | A | J | I | R | I |

Prénom (s) | I | L | I | A | S |

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths I

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 08

Numéro de table 047

Commencez à composer dès la première page

c/

On a $\mathcal{A} = \int_0^1 (g(x) - 1)\,dx = \int_0^1 g(x)dx - [x^2]_0^1$

$= e - \frac{1}{e} - 1$

9)

a/

f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $f'(x) = (g(x) - 2 - x^2)' = (e^x + e^{-x} - 2 - x^2)'$

$= e^x - e^{-x} - 2x$

$= g(x) - 2x$

b/

On a $g(x) \geq 2x$ sur $[0, +\infty[$ et $g(x) \leq 2x$ sur $]-\infty, 0]$. (cf 5(c))

Tableau de variation de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

(*) $f(0) = g(0) - 2 - 0 = 2 - 2 = 0$

Ainsi, 0 est une valeur minimale de f
et donc $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow g(x) - 2 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow g(x) \geq 2 + x^2$

c/

k dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$k'(x) = \left(g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3\right)'$$

$$= g'(x) - 2 - x^2$$

$$= g(x) - 2 - x^2$$

Or, $g(x) \geq 2 + x^2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ (cf $g(6)$)

donc k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
et car $k(0) = g(0) - 0 - 0 = g(0) = 0$
alors on en déduit que :

$(\forall x \leq 0)$ $k(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3 \leq 0$

$\Rightarrow g(x) \leq 2x + \frac{1}{3}x^3$

et $(\forall x \geq 0)$ $k(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3 \geq 0$

$\Rightarrow g(x) \geq 2x + \frac{1}{3}x^3$

partie 2

10)
On a g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
et on a g strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Ainsi, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
(cf $g(\mathbb{R})$)

et comme $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ ($\forall n \geq 1$)
alors $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique
solution notée U_n.

11)
On a ~~$g(x)$~~
On a $0 < 1 < e - \frac{1}{e}$ ($e \simeq 2{,}7$, $e^{-1} \simeq 0{,}4$)

donc $g(0) < g(U_1) < g(1)$
et par croissance de g :
$0 < U_1 < 1$

12)
Faisant recours à une récurrence.

* pour $n=1$, on a $U_1 > 0$ (cf (11))
* soit $n \geq 1$, supposons que $U_n > 0$ et
prouvons que $U_{n+1} > 0$.
On a par hypothèse de récurrence :
$U_n > 0$

Ainsi, par croissance de g sur $\mathbb{R}$:

$$g(U_n) > g(0)$$

donc $U_{n+1} > 0$

* par récurrence, on a $(\forall n \geq 1)$ $U_n > 0$

13)

a/ on a bien pour tout $n \geq 1$:

$$n+1 > n$$

et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ (par décroissance de la fonction $t \to \frac{1}{t}$)

donc $g(U_{n+1}) < g(U_n)$

et $U_{n+1} < U_n$ (par croissance de g)

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors décroissante.

b/ comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0 et $(U_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Alors par théorème de la limite monotone, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

14)

a/
```
import numpy as np
def d(x,n):
    return (np.exp(x)-np.exp(-x))-(1/n)
```

b/

```
def SuiteU(n) :
    U = np.zeros(n) :
    for k in range(n):
        a=0 ; b=1
```

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom MOUHAJIRI

Prénom (s) ILIAS

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths T

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 08

Numéro de table 041

```
while b-a > 10**(-3):
        c = (a+b)/2
        if d(a, k+1)*d(c, k+1) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    U[k] = c
return (U)
```

c/

On constate d'après le comportement de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ présenté par le graphique que sa limite vaut 0.

Exercice 3

partie 1

1)

a/

Comme E_T suit une loi exponentielle de paramètre 1, alors une densité est donnée ainsi :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$$\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$$

et puis, $E(T) = \frac{1}{1} = 1$ et $V(T) = \frac{1}{1^2} = 1$

b/

puisqu $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ dans sa fonction de répartition F_T est donnée ainsi :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$$

c/

cet évènement est traduit à $[T \leq 3]$

donc $P(T \leq 3) = F_T(3) = 1 - e^{-3}$

d/

cet évènement est traduit à $\underset{[T \geq 1]}{[T \geq 2]}$

donc $P_{[T \geq 1]}(T \geq 2) = \frac{P([T \geq 2] \cap [T \geq 1])}{P(T \geq 1)} = \frac{P([T \geq 2])}{P([T \geq 1])}$

$= \frac{1 - F_T(2)}{1 - F_T(1)} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = \frac{1}{e}$

2)

a/

U suit une loi uniforme sur $]0,1[$.
alors

$$f_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [0,1] \\ \frac{1}{1-0} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin [0,1) \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

et $F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

b/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq x) = P(-\ln(U) \leq x)$$
$$= P(\ln(U) \geq -x)$$
$$= P(U \geq e^{-x})$$

c/

si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $e^{-x} \geq 1$

or $F_U(x) = 1$ si $x \geq 1$

Ainsi, $P(X \leq x) = P(U \geq e^{-x})$

$$= 1 - F_U(e^{-x})$$
$$= 1 - 1 = 0$$

d/

pour $x < 0$, $P(X \leq x) = 0$ (cf 2(c))

et pour $x \geq 0$, $P(X \leq x) = 1 - F_U(e^{-x})$

$= 1 - e^{-x}$ (car $e^{-x} \in]0,1[$ pour $x \geq 0$)

et donc la fonction de répartition de X est donnée ainsi :

$$\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$$

On constate que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

et donc sa densité est la suivante :

$$\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ e^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$$

e/

```
import numpy.random as rd
def simulT():
    return rd.exponential(1)
```

<u>partie 2</u>

3)

a/ pour $A > 0$, on a $I_1(A) = \int_0^A e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^A$

$= 1 - e^{-A}$

b/ on a $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} 1 - e^{-A} = 1$

comme $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A} = 0$

I_1 est bien convergente et vaut 1.

4)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom MOUHAJIRI

Prénom (s) ILIAS

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 08

Numéro de table 041

Commencez à composer dès la première page.

On a $I_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x}\,dx$ (pour $n \geq 1$)

posons:
$U(x) = x^n$ et $U'(x) = n x^{n-1}$
$V'(x) = e^{-x}$ $V(x) = -e^{-x}$

donc $I_{n+1}(A) = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^A + n\int_0^A x^{n-1}e^{-x}\,dx$

$= -A^n e^{-A} + n\,I_n(A)$

$= -\frac{A^n}{e^A} + n\,I_n(A)$

5)
On a $I_{n+1}(A) = \frac{-A^n}{e^A} + n\,I_n(A)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
lorsque $A \to +\infty$, si l'on suppose que

$I_n(A)$ admettra une limite finie, alors puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} -A^n e^{-A} = 0$, $I_{n+1}(A)$ admettra

également une limite finie vaut $n\ell$
avec ℓ la limite finie de $I_n(A)$
quand $A \to +\infty$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

6)

* pour $n=1$, on a $I_1 = 1$ (cf 3(6))
  I_1 est bien converge.
* soit $n \geq 1$, supposons que $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$

  converge et prouvons que I_{n+1} l'est également.

D'après (5), si I_n est converge alors
  I_{n+1} converge aussi
* par récurrence, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ I_n converge.

et on a $I_{n+1} = n I_n$
  car $\lim_{A \to +\infty} -A^n e^{-A} = 0$

7)

procédons par récurrence.
* pour $n=1$, on a $I_1 = 1$ et $(1-1)! = 0! = 1$
  (la proposition est valide pour $n=1$)
* soit $n \geq 1$, supposons que $I_n = (n-1)!$
  et prouvons que $I_{n+1} = n!$
  or $I_{n+1} = n I_n$ (cf (6))
  $= n \cdot (n-1)! = n!$
* par récurrence, on a $(\forall n \geq 1)$ $I_n = (n-1)!$

partie 3

8)

Continuité et positivité

* pour $x < 0$, f est continue car constante et positive comme elle est nulle.

* pour $x \geq 0$, f est continue par produit de deux fonctions continues et positive car $x \geq 0$, $n \geq 1$ et $e^{-x} > 0$

Ainsi, f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points.

Convergence.

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_n(x)\,dx$

(par relation de Chasles)

$= \int_{0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$

$= \frac{1}{(n-1)!} I_n = \frac{1}{(n-1)!}(n-1)! = 1$

Ainsi donc, f_n est une densité de probabilité

9)

a/ Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$ est absolument converge, le cas échéant, sa valeur est l'espérance de Y

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x f_n(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

$= \frac{1}{(n-1)!} I_{n+1}$

$= \frac{1}{(n-1)!} n! = n$

Y admet bien une espérance valant n.

b/

pour $N \geq 1$: $E(F_N) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k\right)$

$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E(Y_k)$ (par linéarité de l'espérance)

$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n = \frac{1}{N} \cdot Nn = n$

et on a $V(F_N) = V\left(\frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N} Y_k\right)\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} V(Y_k)$

(par indépendance de la famille $(Y_k)_{k \in [\![1,N]\!]}$)

$= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} n = \frac{1}{N^2} \cdot Nn$

$= \frac{n}{N}$

c/

par inégalité de Tchebychev, on écrit pour $\varepsilon > 0$

~~$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq$~~

$P(|F_N - E(F_N)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_N)}{\varepsilon^2}$

donc $P(|F_N - n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\cancel{N}}{\varepsilon^2}$

et $P(|F_N - n| \geq \varepsilon) \leq \frac{n}{N\varepsilon^2}$

d/

On sait que F_N est un estimateur de n.
La représentation graphique permet de conclure que lorsque N devient plus grand, F_N tend vers 3, on peut ainsi estimer n par 3.

e/

pour les intervalles représentés, le niveau de confiance est inférieur strictement à 100%.
Il sera donc normal d'avoir certains qui ne contiennent pas 3.