Copie anonyme - n°anonymat : 251303

Première Partie

1a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, X_i^2 admet une espérance car X_i admet une variance et $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$

$E(X_i^2) = 1$

Donc par combinaison linéaire, S_n admet une espérance et $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$ par linéarité de l'espérance

Donc $E(S_n) = n$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \text{ admet une espérance et } E(S_n) = n}$

1b)

```
def simul(n):
    return np.sum([rd.normal(0, 1, n)**2])
```

1c)

Le graphe affiche les valeurs approximatives de $\frac{1}{50000} \sum_{i=1}^{50000} (S_i^2) - E(S_i)^2$ environ.

pour i parcourant $[\![1; 9]\!]$.

On remarque que pour un i "grand" ($\simeq 9$), la valeur affichée vaut environ 18 soit 2×9

soit $2 \times E(S_9)$ On peut conjecturer que $\boxed{V(S_n) = 2n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2a) On note G_1 la fonction de répartition de W_1.

$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = P(W_1 \leq x) = P\left(\frac{1}{2} X_1^2 \leq x\right)$

Si $x \leq 0$ alors $\left(\frac{1}{2} X_1^2 \leq x\right) = \emptyset$ car $X_1^2 > 0$

car $\begin{cases} \forall \omega \in \Omega,\ X_1^2(\omega) \geq 0 \\ \forall \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) \neq 0 \end{cases}$

donc $G(x) = 0$

donc $\forall \omega \in \Omega,\ X_1^2(\omega) > 0$

Si $x > 0$, alors $G(x) = P\left(|X_1| \leq \sqrt{2x}\right)$

$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$

Donc $\forall x > 0\quad G(x) = \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) \text{ sinon.} \end{cases}$

- G est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_-$ car nulle. $x \mapsto \sqrt{2x}$ et $x \mapsto -\sqrt{2x}$ sont, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car φ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\Phi' = \varphi$. Donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) = \Phi(0) - \Phi(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$

car Φ est continue en 0

Donc G est continue en 0.
Donc $\underline{G \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

De plus elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$
Donc $\underline{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

Donc $\boxed{W_1 \text{ est une variable à densité.}}$

$\forall x > 0,\ G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \Phi'(\sqrt{2x}) + \frac{1}{\sqrt{2x}} \Phi'(-\sqrt{2x})$

$\forall x > 0 \quad G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left(\varphi(\sqrt{2x}) + \varphi(-\sqrt{2x}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} \right)$

Donc $\forall x > 0,\ G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} e^{-x}$

$\forall x < 0,\ G'(x) = 0$

$$\boxed{\text{On pose } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}}$$

g est une densité de W_1.

2b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$ ($\frac{1}{2} > 0$ donc $\Gamma(\frac{1}{2})$ est bien défini)

$= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}} e^{-t} dt$

$= \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} g(t) dt$

Donc $\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$ car g est une densité nulle sur $\mathbb{R}_-$.

2c)

$\forall \nu > 0$, Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ l_\nu(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu - 1} e^{-t} dt \text{ si } t > 0 \end{cases}$

l est une densité de la loi $\gamma(\nu)$

Donc la densité de $\gamma(\frac{1}{2})$ est :

$\forall t \in \mathbb{R},\ l_{\frac{1}{2}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{t}^{-1} e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t \leq 0 \end{cases}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R},\ l_2(t) = g(t)$.

Donc $W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$.

$\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} X_i^2$ a la même loi que $\frac{1}{2} X_1^2$ car (X_i) est iid

est une famille de variables de même loi $N(0,1)$
Donc $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}X_i^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ $(*)$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n)$: " $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ "

$W_1 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ comme montré précédemment donc $Q(1)$ est vraie.

Supposons $Q(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} S_{n+1} = \frac{1}{2}(S_n + X_{n+1}^2)$$

$$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$$

Or $\begin{cases} W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ \frac{1}{2}X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \text{ d'après } (*) \end{cases}$
$X_1, \dots, X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc par lemme des coalitions $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ et $\frac{1}{2}X_{n+1}^2$ sont indépendants. Donc W_n et $\frac{1}{2}X_{n+1}^2$ sont indépendants.

Donc par stabilité de la loi gamma :

$$W_n + \frac{1}{2}X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Donc $W_{n+1} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$
Donc $Q(n+1)$ est vraie.

$\begin{cases} Q(1) \text{ est vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \end{cases}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n)$ est vraie

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$E(W_n) = \frac{n}{2}$ car $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ et $S_n = 2W_n$

Donc $E(S_n) = 2E(W_n) = 2 \times \frac{n}{2} = n$
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ E(S_n) = n}$ On retrouve 1(a)

Copie anonyme - n°anonymat : 251303

Code épreuve : 283	Nombre de pages : 21	Session : 2025

Épreuve de : Maths Approfondis II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$V(W_n) = \frac{n}{2}$ car $W_n \sim \gamma(\frac{n}{2})$

Donc S_n admet une variance et $V(S_n) = 2^2 V(W_n)$

$V(S_n) = 4\frac{n}{2}$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, V(S_n) = 2n}$

3a) Soit $n \geq 3$, W_n admet $l_{\frac{n}{2}}$ pour densité. (
D'après le théorème de transfert,
$\frac{1}{W_n}$ admet une espérance $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} l_{\frac{n}{2}}(r)\,dr$ converge absolument

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{r} l_{\frac{n}{2}}(r)\,dr = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-r}\,dr = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ donc

converge absolument donc converge.

Donc $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance et d'après le

théorème de transfert, $E(\frac{1}{W_n}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} l_{\frac{n}{2}}(r)\,dr = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Donc $\boxed{\forall n \geq 3, \frac{1}{W_n} \text{ admet une espérance et } E(\frac{1}{W_n}) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}}$

$\forall \omega$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i(\omega) \neq 0$ donc $X_i^2(\omega) \neq 0$ donc par somme de termes positifs non nuls, $S_n \neq 0$

Donc $\frac{1}{S_n}$ est bien définie et $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2W_n}$

$\frac{1}{W_n}$ admet une espérance donc $\frac{1}{S_n}$ aussi et

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{n}{2}-1}$

Donc $\boxed{\forall n \geq 3,\ E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}}$

3b) Soit $n \geq 3$, $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une variance

4) Soit $\alpha \in]0;1[$, soit $y \in \mathbb{R}$,

$$P(|T_n| \leq y) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{\sqrt{n}\, Y}{\sqrt{S_n}}\right| \leq y\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\right| |Y| \leq y\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(|Y| \leq \left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| y\right) = 1-\alpha \quad \left(\text{car } \left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| y \leq Y \leq \left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| y\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| y\right) - \Phi\left(-\left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| y\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\,\Phi\left(\left|\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right| y\right) - 1 = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\, y\right) = -\frac{\alpha}{2} \qquad \left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}} > 0\right)$$

Or Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ car φ est strictement positive donc Φ est strictement croissante et car φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
Donc en notant Φ^{-1} la bijection réciproque de Φ on a :

$$P(|T_n| \leq y) = 1-\alpha \Leftrightarrow \frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\, y = \Phi^{-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\, \Phi^{-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Donc en posant $v_{n,\alpha} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\, \Phi^{-1}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$ on a que celui ci est unique et que $P(|T_n| \leq v_{n,\alpha}) = 1-\alpha$

Donc $\boxed{\exists!\, v_{n,\alpha} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S_n}}\, \Phi^{-1}\left(\frac{-\alpha}{2}\right),\ P(|T_n| \leq v_{n,\alpha}) = 1-\alpha}$

Soit $n \geq 3$,

5a) Y est indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$
Donc Y est indépendante de $\frac{1}{\sqrt{\sum X_i^2}}$ par lemme des coalitions. Donc Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}$ sont indépendants.
De plus, Y admet une espérance et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ aussi :
Donc, T_n admet une espérance et

$$E(T_n) = \sqrt{n}\, E(Y)\, E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$$

Donc $\quad E(T_n) = 0 \qquad$ car $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $E(Y) = 0$

Donc $\boxed{\forall n \geq 3,\ E(T_n) \text{ existe et } E(T_n) = 0}$

5b)

5c) Soit $n \geq 3$,

$$(T_n - Y)^2 = T_n^2 - 2T_nY + Y^2$$

Or $\left\{ \right.$ T_n admet une variance donc T_n^2 admet une espérance et $E(T_n^2) = V(T_n) + E(T_n)^2 = V(T_n) = \frac{n}{n-2}$ car $E(T_n)=0$

Y^2 admet une espérance qui vaut 1 car $Y \hookrightarrow N(0,1)$

$T_nY = \frac{Y^2}{\sqrt{S_n/n}}$ et Y^2 et indépendante de $\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}$ car Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}$ sont indépendantes

donc $E(T_nY)$ existe et vaut $E(Y^2)E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n/n}}\right)$ car Y^2 et $\sqrt{S_n/n}$ admettent une variance

Donc $(T_n-Y)^2$ admet une espérance par combinaison linéaire et :

$$E((T_n-Y)^2) = E(T_n^2) - 2E(Y^2)\sqrt{n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) + 1$$

$$= \frac{n}{n-2} + 1 - 2\times 1\times\sqrt{n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2W_n}}\right)$$

car $S_n = 2W_n$ donc $\sqrt{S_n} = \sqrt{2W_n}$

Donc $E((T_n-Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n\geq 3,\ E((T_n-Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)}$$

6) a) Soit $n \geq 2$,

$$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2}X_{n+1}^2$$

donc $W_{n+1} \geq W_n > 0$ car $W_n > 0$ et $\frac{1}{2}(X_{n+1})^2 \geq 0$

Donc $\sqrt{W_{n+1}} \geq \sqrt{W_n} > 0$ par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 251303

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 21 | Session : 2025

Épreuve de : Maths Approfondies II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc par croissance de l'espérance,

$\forall n \geq 2,\ E\left(\frac{1}{\sqrt{U_{n+1}}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{U_n}}\right)$

$\forall n \geq 2,\ U_{n+1} \leq U_n$

Donc $\boxed{(U_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante}}$

6b)

On pose $h = U_2$ (je n'ai pas pu calculer U_2)

6c)

```
def suite_u(n):
    U = np.arange(h, n+1, 1)
    for i in range(n-1):
        U[i+1]=(2/i-1) * 1/U[i]
    return U
```

6d) Le graphe affiche les valeurs $(\sqrt{i}\, v_i)^2$ pour i parcourant l'ensemble $[\![2;80]\!]$.

On remarque que pour un i "grand" (proche de 80) $(\sqrt{i}\, v_i)^2 \simeq 2$

On peut donc conjecturer que $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n}\, v_n)^2 = 2$

Donc $\boxed{\text{on peut conjecturer l'équivalence } v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}$

e) $v_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\frac{2}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

Donc $v_{n+1} v_n \underset{+\infty}{\sim} v_n^2$ et $\frac{2}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

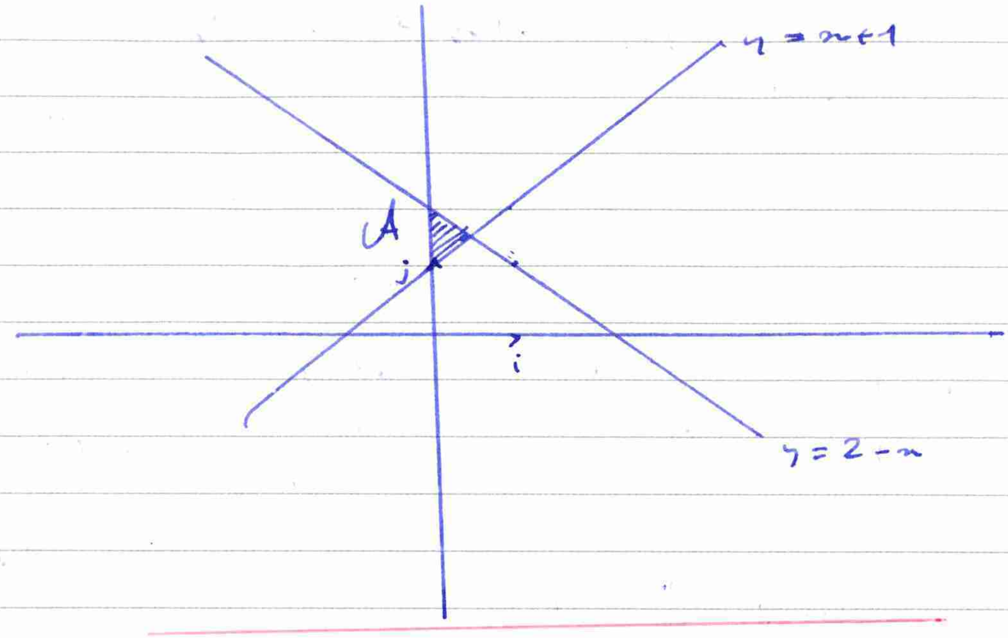
Donc $v_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ car $\forall n \geq 2, v_{n+1} v_n = \frac{2}{n-1}$

Donc $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}}$

7)

Deuxième partie

8) Dans le cas où $a=2$ et $b=-1$



9.) a) Soit $(x,y) \in \mathcal{A}$,

Alors $x+y \leq a$ et $x-y \leq b$
donc $x \leq a-y$ et $x \leq b+y$ donc $x \leq a-y$
donc $x \leq \min(a-y,\ b+y)$

On $\begin{cases} a-y \leq a-\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ b+y \geq b+\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{cases}$ donc $a-y-(b+y) \leq a-\left(\frac{a-b}{2}\right)-b-\left(\frac{a-b}{2}\right) \leq a-b-a+b$
donc $a-y-(b+y) \leq 0$ donc $a-y \leq b+y$

Réciproquement, si $x \in]-\infty; a-y[$ alors $x \leq a-y$
donc $x+y \leq a$

De plus, $-y \leq -d$ donc $x-y \leq x-d \leq a-y-d$ (car $x \leq a-y$)
$\leq a-2d$
$\leq a-2\left(\frac{a-b}{2}\right)$
donc $x-y \leq b$

Donc $x \in]-\infty; a-y[\Rightarrow (x,y) \in \mathcal{A}$.
Par double implication, $\boxed{(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in]-\infty; a-y[}$

9b)

$\forall x \in]-\infty ; a-y[$, $(x,y) \in A$ d'après 9a) donc
$\mathbb{1}_A(x,y) = 1$
et donc $\int_{-\infty}^{a-y} \mathbb{1}_A(x,y)\, \varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)dx = \Phi(a-y)$
donc converge.
(1)

$\forall x \notin]-\infty ; a-y[$, $(x,y) \notin A$ d'après 9a
donc $\mathbb{1}_A(x,y) = 0$ et donc $\int_{a-y}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx = 0$
(2)

Donc D'après (1) et (2),
$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\, \varphi(x)dx$ converge et vaut $\Phi(a-y)$

Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\, \varphi(x)dx = \Phi(a-y)}$

10) Soit $y \leq d$, si $x \leq b+y$ alors $x-y \leq b$

et $x-y \leq x-d \leq b+y+d \leq b+d+d$
donc $x-y \leq b+2\frac{(a-b)}{2}$
donc $x-y \leq a$

Donc $(x \leq b+y) \Rightarrow \begin{cases} x-y \leq b \\ x-y \leq a \end{cases}$

Réciproquement, si $(x,y) \in A$,
alors $x+y \leq a$ et $x-y \leq b$
donc $x \leq \min(\quad a-y, b+y)$

Or $(a-y)-(b+y) \geq a-\cancel{d}-(b+d) \geq a-b-2d \geq a-b-a+b$
donc $(a-y)-(b+y) \geq 0$
(**)

Donc $(a-y) \geq (b+y)$ donc $x \leq b+y$

Donc $(x,y) \in A \Rightarrow x \in]-\infty ; b+y[$ donc $\boxed{(x,y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty ; b+y[}$

Copie anonyme - n°anonymat : 251303

Code épreuve : 283 **Nombre de pages :** 21 **Session :** 2025

Épreuve de : Maths Approfondies II

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$\forall x \in]-\infty ; b+y[$, $(x,y) \in A$ (d'après $(**)$)
donc $\mathbb{1}_A(x,y) = 1$ et donc $\int_{-\infty}^{b+y} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx$
$= \int_{-\infty}^{b+y} \varphi(x)dx = \Phi(b+y)$

$\forall x \notin]-\infty ; b+y[$, $(x,y) \notin A$ d'après $(**)$
donc $\mathbb{1}_A(x,y) = 0$ et donc $\int_{b+y}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx = 0$

Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx = \Phi(b+y)}$

1(a) On pose $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} h(x,y) = x+y \\ g(x,y) = x-y \end{cases}$

h et g sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynômes.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / h(x,y) \leq a\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) \leq b\}$

Or ces deux ensembles sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
Donc par intersection finie de fermés de $\mathbb{R}^2$
$\boxed{A \text{ est une partie fermée de } \mathbb{R}^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

116)

13) Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(u)\varphi(v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

et $\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac12\left(\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)^2\right)}$

Or $\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)^2=\frac12\left(2u^2+2v^2\right)$

Donc $\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac12\left(\frac12(2u^2+2v^2)\right)}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac12(u^2+v^2)}$

Donc $\boxed{\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(u)\varphi(v)=\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt2}\right)}$

14) $P((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(r-z)\,dz\right)dr$

d'après 12)

$$=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(d+z)\varphi(r-z)+\varphi(d-z)\varphi(r-z)\,dz\right)dr$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+r}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d-r+2z}{\sqrt2}\right)+\varphi\left(\frac{d+r-2z}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d-r}{\sqrt2}\right)dz\right)dr$$

$$=\int_{-\infty}^{c}\left(\varphi\left(\frac{d+r}{\sqrt2}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-r+2z}{\sqrt2}\right)dz+\varphi\left(\frac{d-r}{\sqrt2}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+r-2z}{\sqrt2}\right)dz\right)dr$$

Or $\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-r+2z}{\sqrt2}\right)dz=\int_{\frac{r-d}{\sqrt2}}^{-\infty}\varphi(-u)\left(-\frac{1}{\sqrt2}du\right)$ en posant $u=-\frac{d-r+2z}{\sqrt2}$

+!

(Ce changement de variable est affine donc valide)

et $du = -\sqrt{2}\,dz$

lorsque $z \to +\infty$, $u = -\infty$

$z \to 0$, $u \to \frac{r-d}{\sqrt{2}}$

D'où $$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d-r+2z}{\sqrt{2}}\right) dz = \int_{-\infty}^{\frac{r-d}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(-u)\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{r-d}{\sqrt{2}}} \varphi(u)\,du$$ car φ est paire

$$\underline{\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d-r+2z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \Phi\left(\frac{r-d}{\sqrt{2}}\right)} \quad (1)$$

De même $$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+r-2z}{\sqrt{2}}\right) dz = \int_{\frac{r+d}{\sqrt{2}}}^{-\infty} \varphi(u)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,du\right)$$

en posant $u = \frac{d+r-2z}{\sqrt{2}}$

D'où $$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+r-2z}{\sqrt{2}}\right) dz = \int_{-\infty}^{\frac{r+d}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(u)\,du$$

$$\underline{= \frac{1}{\sqrt{2}}\, \Phi\left(\frac{r+d}{\sqrt{2}}\right)} \quad (2)$$

Finalement, d'après (1) et (2)

$$\boxed{P((X,Y)\in A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \varphi\left(\frac{r+d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{r-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{r-d}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{r+d}{\sqrt{2}}\right) dr}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 251303

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 21

Session : 2025

Épreuve de : Maths Approfondies II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $E(V)$ existe car $E(U)$ existe

et $E(V) = \sigma^2 E(U) = \sigma^2(n-1)$

car $U \hookrightarrow \chi^2(n-1)$

et d'après 1a) l'espérance de la loi du khi-deux à n degrés de liberté vaut n

$(E(S_n) = n)$ donc $E(U) = E(S_{n-1}) = n-1)$

Donc $E\left(\frac{1}{n-1} V\right) = \frac{1}{n-1}\sigma^2(n-1) = \sigma^2$

Donc $\boxed{\frac{1}{n-1} V \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2}$

c)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Copie anonyme - n°anonymat : 251303

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths approfondies II

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

13)

Troisième partie

17) a) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(a_1, \dots, a_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{K}^n$.

base $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k$

base $(x_1, \dots, x_n) - \langle x, a_1 \rangle a_1 = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_2 \rangle a_2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $(x_1,\dots,x_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1) = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k$

Donc $\left(x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \dots, x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k$

Donc $\boxed{(x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) = \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k}$

17b)

Donc $\left\|\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle a_k\right\|^2 = \|(x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})\|$

Donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Car $(a_1,\dots,a_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc $(a_2,\dots,a_n)$ est orthonormée.

18a)

19a) $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes et de loi $N(0,1)$

Par stabilité de la loi normale,

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,n)$

Donc $\boxed{\bar{X} \sim N(0,1)}$

19b) D'après 17b), $\boxed{\sum_{k=2}^{n} Y_k^2 = U}$

Or $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle X, a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$

Donc $\boxed{\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1}$

19c) $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes par théorème de COCHRAN

Donc Y_1 et $Y_2^2, \dots, Y_n^2$ sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$ et $\sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ sont indépendantes par lemme des coalitions

Donc $\boxed{\bar{X} \text{ et } U \text{ sont indépendantes}}$

$U = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$ et $\forall k \in [\![2;n]\!], Y_k \sim N(0,1)$

Donc U suit la même loi que S_{n-1} car il y a $n-2+1$ variables de loi $N(0,1)$ au carré dans la somme.

Or $S_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$

Donc $\boxed{U \sim \chi^2(n-1)}$

20a)

$$\cancel{V = \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \bar{Z})^2}$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} \left((\sigma X_i + \mu) - \bar{Z}\right)^2}$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} \left((\sigma X_i + \mu)^2 - 2(\sigma X_i + \mu)\bar{Z} + \bar{Z}^2\right)}$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n} \left(\sigma^2 X_i^2 + 2\sigma X_i \mu + \mu^2 - 2\sigma X_i \bar{Z} - 2\mu \bar{Z} + \bar{Z}^2\right)}$$

$$\cancel{= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sigma\mu \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 - 2\sigma\bar{Z} \sum_{i=1}^{n} X_i - 2\mu n\bar{Z} + n\bar{Z}^2}$$

=

~~Or~~ $\cancel{\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma x_i + \mu = \frac{1}{n}\sigma\sum_{i=1}^{n} x_i + \mu}$

~~et~~ $\cancel{\overline{Z}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(\sigma x_i+\mu)^2 + \frac{1}{n^2}2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} z_i z_j}$

$\cancel{= \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\mu}{n}}$

$\cancel{= \sigma\overline{X}}$

~~Or~~ $\cancel{\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \mu}$

$\cancel{\overline{Z} = \sigma\overline{X} + \mu.}$ ~~(1)~~

~~et~~ $\cancel{\overline{Z}^2 = (\sigma\overline{X}+\mu)^2}$ ~~(2)~~

~~Donc d'après (1) et (2)~~

$$V = \sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{Z})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left((\sigma x_i+\mu)-(\sigma\overline{X}+\mu)\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\sigma x_i+\mu)^2 - 2(\sigma x_i+\mu)(\sigma\overline{x}+\mu) + (\sigma\overline{X}+\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sigma^2 x_i^2 + 2\sigma x_i\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 x_i\overline{x} - 2\mu\sigma x_i - 2\mu\sigma\overline{x} - 2\mu^2 + \sigma^2\overline{x}^2 + 2\sigma\overline{x}\mu + \mu^2\Big)$$

$$= \sigma^2\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + \overline{x}^2 - 2x_i\overline{x})$$

$$= \sigma^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$V = \sigma^2 U$ donc $\boxed{V = \sigma^2 U}$

b) V est un estimateur de σ^2 en tant que fonction des $Z_1, \dots Z_n$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$