Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées Em lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1-a-) Pour $n=0$

$u_0 = 1 > 0$

donc vrai dans ce cas-là.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n > 0$

On a $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n} > 0$ car $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence

et $1 \geq \frac{1}{u_n} > 0$

donc $e^{1/u_n} > 0$ car $t \mapsto e^{1/t}$ est strictement croissante

d'où on en déduit par récurrence que pour $\underline{\text{tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$

b-) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n e^{1/u_n} - u_n$

$= u_n(e^{1/u_n} - 1)$ or $u_n > 0$ d'après 1-a-)

et $1 \geq \frac{1}{u_n} > 0$

donc $e^1 \geq e^{1/u_n} > e^0 = 1$, car $t \mapsto e^t$ strictement croissante

donc $e^{1/u_n} \geq 1 \iff e^{1/u_n} - 1 \geq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n \geq 0$

donc $u_{n+1} \geq u_n$

donc $\underline{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c-) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
On a d'après 1-b, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0=1$ donc la limite L de u_n serait telle que $L>1$.

et on a $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n e^{1/u_n}$

donc $L=Le^{1/L}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n e^{1/u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$L=Le^{1/L} \iff e^{1/L}=1$ car $L>1$

donc $e^{1/L}=e^0$

donc $\frac{1}{L}=0$ donc $L=0$ ce qui est absurde car $L>1$.

donc on en déduit en raisonnant par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, donc elle admet $+\infty$ comme limite.

2-)

```
import numpy as np
u=1
n=0
while u < 10**6 :
    u= u* np.exp(1/u)
    n= n+1
print (n)
```

Partie B

3-) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1/x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}\times e^{u}$ avec $u=\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u}{u}=+\infty$

car $\lim\limits_{u\to 0} e^u=1$

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x e^{1/x} = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{1}{u} e^{u} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{e^{u}}{u} = +\infty$ par croissance comparée

4-) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit et composé de fonctions dérivables

et $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 \times e^{1/x} + x \times -\frac{1}{x^2} e^{1/x}$

$= e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x}$

$= e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

et $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{1/x} > 0$

et $1 - \frac{1}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow 1 \leq x$, car $t \to \frac{1}{t}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

donc on a

x	0		1		$+\infty$
$e^{1/x}$	‖		+		
$1-\frac{1}{x}$	‖	−	0	+	
$f'(x)$	‖	−	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

5-) a-) $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum\limits_{k\geq 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{k} \times \frac{1}{k!} = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(1/x)^k}{k!}$

On reconnait une somme de référence donc converge

et on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/x)^k}{k!} = e^{1/x}$

b-) On a $f(x) = x \times e^{1/x} = x \times \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/x)^k}{k!}$

$= x \times \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$ $\cancel{= x \times \frac{1}{x} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{1-k}}{k!}}$

03/20

donc

$$f(x) = x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$$

$$= x \cdot \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= x + 1 + x \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x^2} \cdot x \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

d'où $$\underline{f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}}$$

6-a-) - le premier terme de la série $\sum_{k\geq 2} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est égal à $\frac{1}{2} = \frac{x^{2-2}}{2!}$

or $\sum_{k\geq 2} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est croissante en tant que somme de termes positifs

d'où $$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

- et $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e$$

or $x^{2-k} \leq x^k$

d'où $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq e$$

d'où $$\underline{\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e}$$

b-) donc d'après 6-a on a :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

d'où $$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$$ car $x > 0$ donc $\frac{1}{x} > 0$

or $$f(x) - (x+1) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} - (x+1)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

d'où on a $$\underline{\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}} \quad (*)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées Em lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Suite exercice 1

7.) on a d'après 6-b.)

$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}$

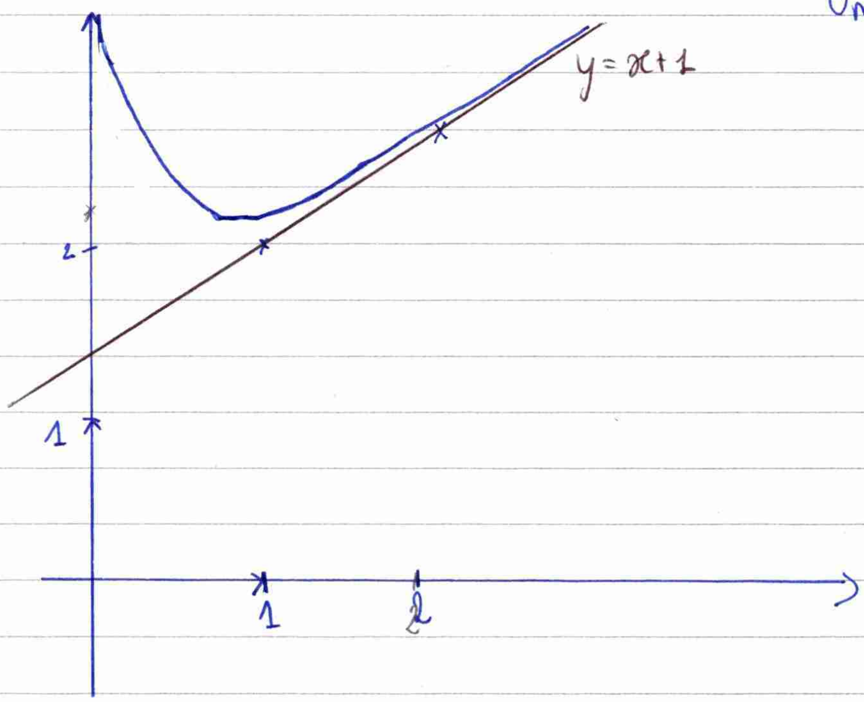
et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} \times 1 = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e/x}{1} = 0$

d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (x+1)}{1} = 0$ d'après le théorème par encadrement

donc on a $f(x) - (x+1) \underset{+\infty}{=} o(1)$

donc $f(x) = x + 1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$

8.)



On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie C

9-a) $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{u_k e^{1/u_k}}{u_k}\right)$$
$$= \ln(e^{1/u_k})$$
$$= \frac{1}{u_k}$$

on a bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) = \frac{1}{u_k}$

b-) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

on a par sommation de 9-a,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(U_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(U_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(U_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$
$$\ln(U_n) - \ln(U_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \text{, par telescopage}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ car $u_0 = 1$

10-a-) On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = f(u_k)$, car $u_k > 0$

donc d'après (*) on a

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - (u_k + 1) \leq \frac{e}{u_k}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{e}{u_k} + 1$

06/20

b-) par sommation on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1+\frac{1}{2u_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}-u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1+\frac{e}{u_k}$$

$$1\times(n-1+1)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k} \leq \sum_{k=1}^{n} u_k-\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq 1\times(n-1+1)+e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$$

$$n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k} \leq u_n-u_0 \leq n+e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}$$ par telescopage

d'où $\underline{n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k} \leq u_n-1 \leq n+e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}}$

donc on a d'après 9.b

$$n+\frac{1}{2}\times\ln(u_n) \leq u_n-1 \leq n+e\times\ln(u_n)$$

donc $n+1+\frac{1}{2}\times\ln(u_n) \leq u_n \leq n+1+e\ln(u_n)$

donc $\underline{1+\frac{1}{2}\times\ln(u_n) \leq u_n-n \leq 1+e\ln(u_n)}$

11-a-) $\underline{\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{u_n}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(u)}{u}=0}$ par croissance comparée car d'après 1-c $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

b-) On a d'après 11-a-) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{u_n}=0$
et d'après 10.b

$$1+\frac{1}{2}\ln(u_n) \leq u_n-n \leq 1+e\ln(u_n)$$

donc $\frac{1}{u_n}+\frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1-\frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n}+e\frac{\ln(u_n)}{u_n}$

d'où $1-\frac{1}{u_n}-\frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq \frac{u_n}{n} \leq 1-\frac{1}{u_n}-\frac{e\ln(u_n)}{u_n}$

et $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{u_n}-\frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n}=1=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{u_n}-\frac{e\ln(u_n)}{u_n}$

d'où par encadrement on a $\underline{u_n \underset{+\infty}{\sim} n}$

12-) $\frac{1}{u_k}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{k}$ donc $\underline{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k}\underset{+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$
car $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$

Exercice 2
Partie A

1.) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$aI + bJ + cK = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ a = b = c = 0$$

donc la famille est libre et génératrice car on a $\mathcal{E} = \text{vect}(I, J, K)$

donc (I, J, K) est bien une base de $\mathcal{E}$

et donc $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

2.) J et K sont diagonalisables en tant que matrices symétriques

3.) a.)

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{2J}$$

b.) On a donc d'après 3-a.)

$$J^3 = 2J$$

donc $x^3 - 2x$ est polynôme annulateur de J

et $x^3 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 - 2 = 0$

donc $x^2 = 2$

donc $x = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$

d'où $sp(J) \subset \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées Emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4-a-)

$\bullet\ JU_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\,U_1$ et $U_1 \neq 0$

donc U_1 est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

$\bullet\ JU_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,U_2$ et $U_2 \neq 0$

donc U_2 est bien vecteur propre de J associé à la valeur propre 0.

b-) on pose $U_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ des réels

et $JU_3 = -\sqrt{2}\,U_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -\sqrt{2}a \\ a = -\sqrt{2}b \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c + \sqrt{2}a = 0 \\ a + \sqrt{2}b = 0 \\ a + \sqrt{2}c = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 - L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ b = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + 2b = 0 \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ \sqrt{2}a = -2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ a = -\sqrt{2}b \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

5-a-) (U_1, U_2, U_3) est une famille de vecteurs propres de J donc par concaténation des 3 vecteurs propres non nuls (libres) de J on obtient une famille libre de dimension 3 donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

b-) D'après la formule de changement de base on a

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ telle que } P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

6-a-)

- $KU_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.U_1$ et $U_1 \neq 0$

  donc U_1 vecteur propre de K associé à la valeur 1.

- $KU_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1U_2$ et $U_2 \neq 0$

  donc U_2 est le vecteur propre de K associé à la valeur propre -1.

- $KU_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.U_3$ et $U_3 \neq 0$

  donc U_3 est le second vecteur propre associé à la valeur propre 1.

6-b.) d'après la formule de changement de base on a alors

$$P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) a-)

$$P^{-1}MP = P^{-1}(aI + bJ + cK)P$$
$$= aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+\sqrt{2}b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a-\sqrt{2}b+c \end{pmatrix}, a, b, c \text{ des réels}$$

b-) les valeurs propres de M sont alors :

$$\{a+\sqrt{2}b+c \,;\, a-c \,;\, a-\sqrt{2}b+c\}$$

8-)

a-)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b-) On a $rg(S) = 3$ donc 0 n'est pas valeur propre

donc $\ker(S) = \{0\}$ et $\dim E = \dim \mathbb{R}^3$

donc <u>s est injective $\Leftrightarrow$ s est bijective</u>

Partie B

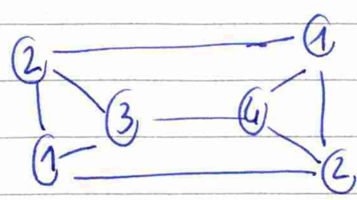
9-)
```
def voisins (A,i) :
    n = len(A[i])
    v = []
    for j in range (n):
        if j!=i and A[i,j]=1 :
            v.append (j)
    return (v)
```

10-)
```
def min_ext(L):
    m=0
    while (m in L)==True:
        m=m+1
    return m
```

11-)
```
def coloration (A):
    n= len(A[0])
    C=[ h for h in range(0,n)]
    for i in range(1,n):
        C_voisins = [voisins(A,i) for j in C]
        C[i]=min_ext(C_voisins)
    return (C)
```

12-) a-) $C = [c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]$
avec $c_0 = c_2$, $c_3 = c_1$

b-) Le graphe admet une coloration à 4 couleurs. telles que :



donc G n'admet pas une coloration à 3 couleurs.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

Partie A.

1-a-) si $U(\Omega) =]0,1]$ alors $\sqrt{U}(\Omega) =]0,1]$

et alors $\frac{1}{\sqrt{U}}(\Omega) = [1;+\infty[$

b) on a $V(\Omega) = [1;+\infty[$

donc si $x<1$, $F_V(x) = 0$

et si $x \geqslant 1$, $F_V(x) = P(V \leqslant x)$

$= P(\frac{1}{\sqrt{U}} \leqslant x)$

$= P(\sqrt{U} \geqslant \frac{1}{x})$, car $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$= P(U \geqslant \frac{1}{x^2})$

$= 1 - P(U < \frac{1}{x^2})$

$= 1 - F_U(\frac{1}{x^2})$ car U à densité

$= 1 - \frac{1}{x^2}$, car $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1-\frac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

c) • F_V est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ en tant que somme et composé de fonctions $\mathcal{C}^1$

• donc F_V est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

et en 1 : $\lim\limits_{x\to1^+} F_V(x) = 0 = \lim\limits_{x\to1^-} F_V(x) = F_V(1)$

donc F_V est bien une fonction de répartition d'une variable aléatoire V et donc par dérivation et prolongement arbitraire on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x \times 0 dx + \int_{1}^{+\infty} x \times \left(\frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$$

et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (Rieman $\alpha > 1$)

donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ converge.

et donc V admet une espérance

et $2 \times \int_1^A x^{-2} dx = 2 \times \left[-\frac{x^{-1}}{1} \right]_1^A$

$$= 2 \times \left(-A^{-1} + 1 \right)$$

$$= 2 - \frac{1}{A} \xrightarrow[+\infty]{} 2$$

donc $E(V) = 2$

et $$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x) dx = \int_{1}^{+\infty} x^2 \times \frac{2}{x^3} dx$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x} dx$$

or $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge (Rieman $\alpha \leq 1$)

donc V n'admet pas de variance.

Partie B

3-a-) $\forall n \geq 1$, $M_n = \max(V_1, \dots, V_n)$

$\forall i \geq 1$, $V_i(\Omega) = [1; +\infty[$
donc $M_n(\Omega) = [1; +\infty[$

• si $x < 1$, $F_n(x) = 0$
• si $x \geq 1$, $F_n(x) = P(M_n \leq x)$
$= P(\max(V_1, \dots, V_n) \leq x)$
$= P(V_1 \leq x \cap \dots \cap V_n \leq x)$ car de même
$= (P(V_1 \leq x))^n$, car indépendance loi
$= (F_V(x))^n$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ (F_V(x))^n & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

donc $F_n = F_V^{\,n}$, (car $0^n = 0$) pour tout $n \geq 1$.

3-b-) • si $x < 1$,
$\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

• si $x \geq 1$,
$\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n$
$= 0$ car $\left|1 - \frac{1}{x^2}\right| < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c-) Si $(M_n)_{n \geq 1}$ convergeait en loi vers une variable aléatoire alors tendrait vers une fonction de répartition dont la limite vaut 1 lorsque x tend vers $+\infty$ or,
$\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0 \neq 1$

donc $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune

15/20

variable aléatoire.

4-a.) $M_n(\Omega) = [1 ; +\infty[$

$\frac{M_n}{\sqrt{n}}(\Omega) = [\frac{1}{\sqrt{n}} ; +\infty[$

donc si $x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $G_n(x) = 0$

et si $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $G_n(x) = P(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x)$

$= P(M_n \leq \sqrt{n}x)$

$= F_n(\sqrt{n}x)$

$= \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\forall x > 0$, on choisit l'expression : $G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n$
car pour un n assez grand $x > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

et $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n$

et $\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{n}x)^2}\right)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) = n \times -\frac{1}{nx^2}$ car $\begin{cases} \ln(1-u) \underset{0}{\sim} u \\ \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{nx^2} = 0 \end{cases}$

$= -\frac{1}{x^2}$

donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)} = e^{-\frac{1}{x^2}}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-1/x^2}$ pour tout $x > 0$

b) Donc $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers W.

puisque d'après 4-a. $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-1/x^2} = F_W$ pour tout $x > 0$
et $\forall x < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 0 = F_W$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie C

5-a) SELECT montant FROM sinistres WHERE annee = 2024 ;

b) SELECT mois, annee FROM sinistres WHERE montant > 1000000 ;

6-) UPDATE sinistres

Partie D

7-) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(N=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

8.) $T(\Omega) = \mathbb{N}$, aucun des éléments peut ne pas dépasser 1, ou tous (N élément) or $N(\Omega) = \mathbb{N}$

9-a-) La loi conditionnelle de T sachant $(N=n)$ suppose qu'on a $\{V_1, \dots, V_n\}$ donc on va tester n fois* l'expérience selon laquelle si $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $V_i > A$ alors il y a un succès.

*(de façon indépendante)

Donc n expériences de Bernoulli indépendantes.

et la probabilité du succès et $\frac{1}{A^2}$ car V_i suit la loi de V.

et donc $P(V_1 > A) = 1 - P(V_1 \leq A) = 1 - (1 - \frac{1}{A^2}) = \frac{1}{A^2}$

9-b.)

$$P_{(N=n)}(T=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

10.) D'après la formule des probabilités totales associées au système d'événement complet $\{[N=n]_{n \in \mathbb{N}}\}$

on a $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P(T=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=k \cap N=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\, P_{(N=n)}(T=k)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} + \sum_{n=0}^{k-1} 0 \text{, d'après 9-b)}$$

$$= \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} \times \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \times \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda \cdot \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)\right)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \times e^{\lambda(1 - 1/A^2)}$$

$$= \frac{(\lambda/A^2)^k}{k!} \times e^{-\lambda + \lambda - \lambda/A^2} = \frac{(\lambda/A^2)^k}{k!} \times e^{-\lambda/A^2}$$

donc $T \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)$

11.)

$$E(T) = \frac{\lambda}{A^2}$$

donc en moyenne il y aura $\frac{\lambda}{A^2}$ sinistres avec un coût supérieur à A en un an.