Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC / ESSEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1) Soit $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Soit $x \in E$.

Supposons $\exists\, a_0 \in E \quad \ell(x) = \langle a_0, x\rangle_E$.

et $\exists\, a_1 \in E \quad \ell(x) = \langle a_1, x\rangle_E$

donc $\langle a_0, x\rangle_E = \langle a_1, x\rangle_E$

donc $\langle a_0 - a_1, x\rangle_E = 0$ par linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot\rangle_E$.

donc $(a_0 - a_1) \in E^{\perp} = \{0_E\}$

donc $a_0 = a_1$

Cl: $\exists!\, a_0 \in E \quad \ell(x) = \langle a_0, x\rangle_E$

2) Soit $y \in F$ et on a $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $x \in E$

$\ell' : x \mapsto \langle u(x), y\rangle_F$ est une application de E dans $\mathbb{R}$

avec 1) $\exists!\, z_y \in E \quad \ell'(x) = \langle z_y, x\rangle$

donc $\exists!\, z_y \in E \quad \langle u(x), y\rangle = \langle z_y, x\rangle$

3) Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u^*(\lambda y_1 + y_2) = z_{\lambda y_1 + y_2}$

or $\lambda u^*(y_1) + u^*(y_2) = \lambda z_{y_1} + z_{y_2}$.

or $z_{\lambda y_1 + y_2}$ est l'unique vecteur de E tel que :

$\forall x \in E \quad \langle u(x), \lambda y_1 + y_2 \rangle_F = \langle z_{\lambda y_1 + y_2}, x \rangle_E$ $(*)$

par linéarité à droite de $\langle .,. \rangle_F$

$\langle u(x), \lambda y_1 + y_2 \rangle_F = \lambda \langle u(x), y_1 \rangle_E + \langle u(x), y_2 \rangle_E$

$\langle u(x), \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle z_{y_1}, x \rangle + \langle z_{y_2}, x \rangle_E$ $(**)$

avec (2)

finalement : avec $(*)$ et $(**)$ on a :

$\langle z_{\lambda y_1 + y_2}, x \rangle_E = \lambda \langle z_{y_1}, x \rangle_E + \langle z_{y_2}, x \rangle_E$

donc par linéarité de $\langle .,. \rangle_E$.

$\langle u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) - u^*(y_2), x \rangle = 0$

donc $u^*(\lambda y_1 + y_2) - \lambda u^*(y_1) - u^*(y_2) \in E^\perp = \{0_E\}$

donc $u^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda u^*(y_1) + u^*(y_2)$

Au final, u^* est linéaire

4) On a avec 3):

$\forall (x,y) \in E \times F \quad \langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E$

On a donc $\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*) = {}^tA$.

Or A et ${}^tA$ ont même rang (cours).

donc $rg(\mathrm{Mat}_{B_F, B_E}(u)) = rg(\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*))$

ce qui assure finalement que : $rg(u) = rg(u^*)$

Matriciellement, on a : ${}^t({}^tA) = A$

donc $\mathrm{Mat}_{B_F, B_E}(u) = \mathrm{Mat}_{B_F, B_E}((u^*)^*)$ avec ce qui précède car ${}^tA = \mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*)$

donc ${}^t({}^tA) = \mathrm{Mat}_{B_F, B_E}((u^*)^*) = \mathrm{Mat}_{B_F, B_E}(u) = A$

Au final, $(u^*)^* = u$

5) On a $\ker(u) \oplus \ker(u)^\perp = E$ car $u \in \mathcal{L}(E,F)$

ainsi $\dim \ker(u) + \dim \ker(u)^\perp = \dim E = p$

or $rg(u^*) = rg(u)$ avec 4) et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie.

Par le théorème du rang on a :

$$rg(u) + \dim \ker(u) = \dim E = p$$

donc $rg(u^*) + \dim \ker(u) = p$

donc $rg(u^*) = \dim \ker(u)^\perp = p - \dim \ker(u)$

donc $\dim \operatorname{Im}(u^*) = \dim (\ker(u))^\perp$ (1)

Soit $x \in \operatorname{Im}(u^*)$ donc $\exists t \in F$ $x = u^*(t)$

Soit $y \in \ker(u)$

$$\langle x, y \rangle_F = \langle u^*(t), y \rangle_F = \langle u(y), t \rangle_E = 0$$

car $y \in \ker(u)$

donc $\operatorname{Im}(u^*) \subset \ker(u)^\perp$ (2)

(1) et (2) assure que : $\operatorname{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$

6) Soit $x \in \ker(u)$

$$u(x) = 0_E$$

donc par linéarité de u^* :

$u^*(u(x)) = 0_F$ car $u^* \in \mathcal{L}(F,E)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 26	Session : 2025
Épreuve de : Maths 1 HEC / ESSEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc $\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u)$

Travaillons Matriciellement pour la deuxième inclusion.

Soit $X \in \ker({}^tAA)$

donc ${}^tAAX = 0_{n,1}$

donc ${}^tX{}^tAAX = 0$

donc $\|AX\|^2 = 0$

donc $AX = 0_{p,1}$

$X \in \ker(A)$

donc $\ker({}^tAA) \subset \ker(A)$

fonctionnellement, on a bien : $\ker(u^* \circ u) \subset \ker(u)$

Par double inclusion, $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u^* \circ u \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Le théorème du rang assure que : (appliqué 2 fois)

$\dim \ker(u) + rg(u) = \dim E = p$

et $\dim \ker(u^* \circ u) + rg(u^* \circ u) = \dim E = p$

donc $\dim Im(u) = \dim Im(u^* \circ u) = p - \dim \ker(u)$
$(= p - \dim \ker(u^* \circ u))$

car $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$
d'après ce qui précède.

donc $\dim Im(u) = \boxed{\dim Im(u^* \circ u) = \dim Im(u^*)}$
car $rg(u) = rg(u^*)$ avec 4)

Par ailleurs, soit $x \in Im(u^* \circ u)$

$\exists t \in E \quad x = u^*(u(t))$

donc en posant $z = u(t) \in F$

$x = u^*(z)$ et $Im(u^* \circ u) \subset Im(u^*)$

On a donc $\begin{cases} rg(u) = rg(u^*) = rg(u^* \circ u) \\ Im(u^* \circ u) \subset Im(u^*) \end{cases}$

donc $Im(u^* \circ u) = Im(u^*)$

7) $w = u^* \circ u_{|Im(u^*)}$

or $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et u^* est aussi un endomorphisme de F dans E d'après 3).

donc $u^* \circ u \in \mathcal{L}(E)$

La restriction de $u^* \circ u$ à $\mathrm{Im}(u^*)$ est de fait aussi une linéaire.

En effet, soit $(x,y) \in \mathrm{Im}(u^*) \times \mathrm{Im}(u^*)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$w(\lambda x + y) = u^* \circ u(\lambda x + y)$

$w(\lambda x + y) = u^*(\lambda u(x) + u(y))$ car u est linéaire.

$w(\lambda x + y) = \lambda u^*(u(x)) + u^*(u(y))$ car u^* est linéaire

$w(\lambda x + y) = \lambda w(x) + w(y)$

Donc w est linéaire.

Soit $x \in \ker(w)$

donc $w(x) = 0_{\mathrm{Im}(u^*)}$

donc $u^*(u(x)) = 0_{\mathrm{Im}(u^*)}$

donc $x \in \ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ d'après 6).

donc $u(x) = 0_{\mathrm{Im}(u^*)}$.

or $(\ker(u))^\perp = \mathrm{Im}(u^*)$

donc $\ker(u) = (\mathrm{Im}(u^*))^\perp$

donc $\ker(w) \subset \{0_{Im(u^*)}\}$

or $\ker(w)$ est un sev de $Im(u^*)$

donc $\ker(w) = \{0_{Im(u^*)}\}$

w est injective, or w est une application linéaire de $Im(u^*)$ dans $Im(u^*)$ et $Im(u^*)$ est un sev de E qui est de dimension finie.

donc w injective $\Leftrightarrow$ w bijective

w est un isomorphisme. Au titre d'isomorphisme, la matrice de w dans une base de $Im(u^*)$ est de fait inversible

8) a) $Q = Mat_{BF}(\pi)$

$A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ donc ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

${}^tA\,Q\,X = {}^tA\,{}^tQ\,X$

car Q est symétrique, en effet, π est le projecteur orthogonal sur $Im(u)$ donc π est un endomorphisme symétrique.

Par ailleurs $Q = Mat_{BF}(\pi)$ et BF est une base orthonormée de F donc Q est une matrice symétrique donc ${}^tQ = Q$

Au titre de matrice d'un projecteur, on a aussi : $Q^2 = Q$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Au final, $Q^2 = Q = {}^tQ$

donc $\cancel{{}^tA\,QX = {}^tA\,{}^tQ\,X = {}^t(QA)X = \langle \pi(u), x\rangle}$

Montrons plutôt $QA = A$ (i.e ${}^tQA = A$)

car ${}^tQ = Q$

Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$AX \in \operatorname{Im}(A)$

donc fonctionnellement $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$

or π est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(u)$.

donc $\operatorname{Im}(\pi) = \operatorname{Im}(u)$.

or $\pi(u(x)) = u(x)$ (*) car $u(x) \in \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(\pi)$

et $\forall y \in \operatorname{Im}\pi \quad \pi(y) = y$

(*) Matriciellement cela nous donne :

$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \quad QAX = AX$ donc $QA = {}^tQA = A$

donc si $^tQA = QA = A$.

en transposant dans l'égalité il vient :

$^t(^tQA) = {}^tA$ id est : ${}^tAQ = {}^tA$

b) Q est une matrice symétique au titre de matrice représentative d'un projecteur orthogonal (qui est donc symétrique) dans une b.o.n :

De fait Q est diagonalisable dans une b.o.n de vecteurs propres de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de Q associés aux valeurs propres $(0,1)$.

En notant P la matrice de passage de B_F à la b.o.n de vecteurs propres, P est orthogonale au titre de matrice de passage entre deux b.o.n.

et $Q = P\Delta{}^tP$ où $\Delta = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{\dim E_1(\pi)\text{ fois}},0\dots,0)$

En effet, π est un projecteur orthogonal donc un projecteur et étant un projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$

on a $\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Im}(u)$

et comme $\pi^2 = \pi$, on a $Sp(\pi) \subset \{0,1\}$

or $E_1(\pi) = \mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Im}(u)$

donc Δ est une matrice diagonale constituée de 1 et de 0 où le nombre de 1 vaut la dimension du sous-espace propre associé à la valeur 1 (i-e $\dim E_\pi(\pi) = \underbrace{\dim \operatorname{Im}(\pi) = \dim \operatorname{Im}(u)}$ $= rg(u)$)

car π projection orthogonale sur $\operatorname{Im}(u)$

et où le nombre de 0 est représenté $n - \dim E_1(\pi) = \dim E_0(\pi)$

car $E = E_1(\pi) \oplus E_0(\pi) = \operatorname{Im}(\pi) \oplus \ker(\pi) = \operatorname{Im}(u) \oplus (\operatorname{Im}(u))^\perp$

donc Q et Δ sont semblables car représentent le même endomorphisme π dans deux bases différentes.

On a $tr(Q) = tr(\Delta) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}\right) = rg(u)$

$\dim E_1(\pi)$ fois $= rg(u)$

Au final, $tr(Q) = rg(u)$

9) Supposons $rg(A) = p$.

or $rg({}^tA) = rg(A) = p$.

or avec 6) $\operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im}(u^*) \Leftrightarrow \operatorname{Im}({}^tAA) = \operatorname{Im}({}^tA)$

donc $rg({}^tAA) = rg({}^tA) = rg(A) = p$

or $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

donc ${}^tAA \in M_p(\mathbb{R})$ et $rg({}^tAA) = p$

donc ${}^tAA = M$ est inversible

Supposons M est inversible

donc $rg({}^tAA) = p$

or $rg({}^tAA) = rg({}^tA) = p$ d'après 6)

or A et ${}^tA$ ont même rang donc

$rg({}^tAA) = rg({}^tA) = rg(A) = p$

donc A est de rang p

M est inversible ssi $rg(A) = p$

10a) $rg(A) = p$ donc avec ce qui précède M est inversible

On a ${}^tAQ = {}^tA$

donc ${}^t({}^tAQ) = A$
donc ${}^tQ\,A = QA = A$ car $Q \in S_p(\mathbb{R})$

On a $QA = A$

b)
```
def Calcule_Q(A):
        if al.matrix_rank(A) =! p :
print('message d'erreur')
        else:
            Q = (A. dot(al.inv(np.dot(np.transpose(A),A)))).dot(*
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 26	Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC/ ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(*) (np. transpose (A))
return (Q(A))

11) Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tA \times {}^t({}^tA) = {}^tAA = M$

M est symétrique donc diagonalisable dans une b.o.n de vecteurs propres de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ non nécessairement deux à deux distincts.

et $\exists P \in O_p(\mathbb{R})$ $\quad M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) {}^tP$

Soit $\lambda \in Sp(M)$

$\exists X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{p,1}\}$ $\quad MX = \lambda X$

donc $\quad {}^tXMX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$

donc $\quad {}^tX{}^tAAX = \lambda \|X\|^2$

donc $\quad \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} = \lambda$ $\quad$ car $X \neq 0_{p,1}$ donc $\|X\|^2 > 0$

donc $\quad \lambda \geq 0$ et $Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

${}^tXMX = {}^tX P \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_p) {}^tP X$ d'après ce qui précède.

${}^tXMX = {}^tY \Delta Y$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = {}^tPX \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_p)$

${}^tXMX = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} y_i y_j \Delta_{i,j}$

or $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2 \quad \Delta_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc ${}^tXMX = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \lambda_i$

or $\forall i \in [\![1;p]\!] \quad y_i^2 \lambda_i \geq 0$ car $y_i^2 \geq 0$ et $\lambda_i \geq 0$ car $Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$

Par somme finie, ${}^tXMX = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 \lambda_i \geq 0$

$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXMX \geq 0$

Partie II

12) Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et Soit $H \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} \|A(X+H) - Y\|^2 - \frac{1}{2} \|AX - Y\|^2$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\left(\|A(X+H)\|^2 - 2\langle A(X+H), Y\rangle + \|Y\|^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 - 2\langle AX, Y\rangle + \|Y\|^2 \right)$$ (avec les identités de polarisation)

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\left(\|AX + AH\|^2 - 2\langle AX + AH, Y\rangle + \|Y\|^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 - 2\langle AX, Y\rangle + \|Y\|^2 \right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\|AX\|^2} + \langle AX, AH\rangle + \frac{1}{2}\|AH\|^2 - \cancel{\langle AX, Y\rangle} - \langle AH, Y\rangle + \cancel{\frac{1}{2}\|Y\|^2}$$

$$- \cancel{\frac{1}{2}\|AX\|^2} + \cancel{\langle AX, Y\rangle} - \cancel{\frac{1}{2}\|Y\|^2}$$

$$= \langle AX, AH\rangle - \langle AH, Y\rangle + \frac{1}{2}\,{}^t(AH)AH$$

$$= \langle AX, AH\rangle - \langle Y, AH\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH M H$$

or $D(X) = MX - {}^tAY = {}^tAAX - {}^tAY$

or $\underline{\langle AX, AH\rangle} = {}^t(AX)AH = {}^tXMH = \underline{{}^t(XM)H = \langle MX, H\rangle}$ $\underline{\text{car } {}^tM = M}$

et de même on montre que :

$\langle AH, Y\rangle = {}^tH\,{}^tAY$ or ${}^tH \in M_{1,p}(\mathbb{R})$ ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\underline{\text{donc } {}^tH\,{}^tAY \in \mathbb{R}}$

et $\underline{{}^tH\,{}^tAY = {}^t({}^tH\,{}^tAY)} = {}^t({}^tAY)H = \langle {}^tAY, H\rangle$

car un réel a et sa transposée sont égaux

Fondent :

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle MX, H \rangle - \langle {}^tAY, H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle MX - {}^tAY, H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH$$ par linéarité à gauche de $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH$$

(13) Supposons $D(X) = 0$ | Soit $H \in M_{p,1}(\mathbb{R})$
Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH \text{ avec (12)}$$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$$

d'après 11)

donc $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid D(X) = 0$

$$J_0(X+H) \geq J_0(X)$$

donc J_0 possède un minimum global en $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

Supposons que J_0 possède un minimum global en $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

donc $J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$

Montrons : $\forall H \in M_{p,1}(H) \quad \langle D(X), H \rangle = 0$

de ce fait, $D(X) \in [M_{p,1}(\mathbb{R})]^{\perp}$

Admis

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 26	Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC / ESSEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

14)

donc $\exists Y_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $X_0 = {}^tA Y_1$

donc pour

on $MX_0 = {}^tA X_0$ donc $D(X_0) = 0$

donc $X_0 \in S_0$

donc $\{X_0\} \subset S_0 \cap (\ker A)^{\perp} = S_0 \cap \mathrm{Im}({}^tA)$

Soit $X \in S_0 \cap \ker(A)^{\perp}$

- $X \in S_0$ donc $MX - {}^tAY = 0$
  donc $D(X) = 0$
- et $X \in (\ker A)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^tA)$

donc $\exists$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

15a) Soit $X \in S_0$

donc $D(X) = 0$

donc $MX - {}^tAY = 0$

donc ${}^tAY = MX$

or $QY = A(M)^{-1}\,{}^tAY = A(M)^{-1}MX = AX$

car $M^{-1}M = I_p$

donc $AX = QY$

b) $A(X - X_0) = AX - AX_0 = QY - AX_0$

or $X_0 \in S_0 \cap (\ker A)^\perp$ donc $X_0 \in S_0$.

donc $D(X_0) = 0$ et $MX_0 - {}^tAY = 0$

donc d'après le même raisonnement qu'en 15a).

$AX_0 = QY$.

donc $A(X - X_0) = QY - QY = 0$

et $X - X_0 \in \ker(A)$

Supposons $X \neq X_0$. et $X \in S_0$ et $X_0 \in S_0$.

Admis

c) Supposons $rg(A) = p$ et $X \in S_0$.

donc d'après (9) M est inversible.

donc on a déjà $\{X\} \subset S_0$.

Soit $X \in S_0$

$$MX - {}^tAY = 0$$

donc $MX = {}^tAY$

donc $X = M^{-1}AY$. car M est inversible.

Au final, $S_0 = \{X\}$ et $X = M^{-1}\,{}^tA\,Y$

16a) $T = \|A(X - V_0)\|^2 = \|AX - AV_0\|^2$

or $AX = (AM^{-1}\,{}^tA)Y = QY$ d'après 1a).

$T = \|QY - AV_0\|^2$

$T = \|Q(AV_0 + Z) - QAV_0\|^2$ or avec 8a) ${}^tQA = {}^tA \iff AQ = A$

$T = \|QZ + \cancel{QAV_0} - \cancel{QAV_0}\|^2$

donc $T = \|QZ\|^2$

or $\|QZ\|^2 = {}^tZ\,{}^tQ\,Q\,Z = {}^tZ\,Q^2\,Z = {}^tZ\,Q\,Z$

d'après ce qui a été fait precedemment

car Q est la matrice d'un projecteur orthogonal dans BF, qui est une b.o.n

donc $Q^2 = Q$ ((car π projecteur)

et ${}^tQ = Q$ (car π endomorphisme symétrique)
↳ car projecteur orthogonal

Au final : $T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ$

b)
```
def simulT(A, sigma):
        Z = rd.normal(0, sigma**2, n)

        T = [np.transpose(Z).dot(Q(A))] @ Z

print(T)
```

c)
```
def esperance(A, sigma):
        n = 10000   N = 1000
        W = np.linspace(T, [n, N])
        Y = np.sum(T, 0)
    return (Y/n)
```

On simule un grand nombre de fois la VAT, et on s'interesse à sa moyenne empirique pour avoir une valeur approchée de son esperance à l'aide de la

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 26

Session : 2025

Épreuve de : Maths 1 HEC / ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

loi faible des grands nombres.

d) - $A_1 \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

- $A_2 \in M_{4,3}(\mathbb{R})$

- $A_3 \in M_{6,5}(\mathbb{R})$

En renvoyant une valeur approchée de $E(T)$ pour 3 matrices différentes, on peut conjecturer que $E(T) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

- En effet pour $A_1 \in M_{3,\underline{2}}(\mathbb{R})$ une valeur approchée est $1{,}99 \simeq \underline{2}$.

- pour $A_2 \in M_{4,\underline{3}}(\mathbb{R})$ une valeur approchée est $3{,}01 \simeq \underline{3}$

- pour $A_3 \in M_{6,\underline{5}}(\mathbb{R})$ une valeur approchée est $4{,}97 \simeq \underline{5}$

<u>Ainsi on conjecture : pour $A \in M_{n+1,n}(\mathbb{R})$</u>

<u>une valeur approchée de $E(T)$ est n.</u>

suite de la question page (23)

e) $Z_1 \hookrightarrow N(0,\sigma^2)$ donc Z_1 admet une variance

Par Koenig-Hughens on a $\underline{E(Z_1^2) = V(Z_1) + E(Z_1)^2 = \sigma^2}$

Montrons que $E(z_1^4)$ existe.

$t \mapsto t^4$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $Z_1(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Par théorème de transfert :

$E(z_1^4)$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^4 f_{Z_1}(t)| \, dt$ converge

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, dt$ converge.

car $\bigwedge_{\forall t \in \mathbb{R}} t^4 f_Z(t) \geq 0$

ssi $\int_0^{+\infty} t^4 f_Z(t) \, dt$ conv

car $t \mapsto t^4 f_Z(t)$ est paire.

or $t \mapsto t^4 f_Z(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

donc $\int_0^{+\infty} t^4 f_Z(t) \, dt$ est impropre en $+\infty$.

or $t^2 \times t^4 f_Z(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

donc $t^4 f_Z(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $\forall t \geq 1 \quad \frac{1}{t^2} \geq 0$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge (Riemann).

donc par critère de comparaison par négligeabilité :

$\int_1^{+\infty} t^4 f_Z(t)\,dt$ converge.

donc $\int_0^{+\infty} t^4 f_Z(t)\,dt$ converge. donc $E(Z_1^4)$ existe

Retour (d) (je n'avais pas vu la question...)
↳ je vous prie de m'excuser.

Avec le script et le graphique en sortie.

les valeurs approximées de l'espérance sont correctes en fonction de la taille de la matrice. Ce qui est bien cohérent avec ce qui a été conjecturé précedemment.

ainsi : avec ce qui précède.

$E(Z_3)$ existe et $E(Z_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 f_{Z_1}(t)\,dt$.

or $t \mapsto t^3 f_{Z_1}(t)$ est impaire et

d'intégrale convergente.

donc $E(Z_3) = 0$

de plus en posant $Z = Z_1^2$

$E(Z_1^4) = E(Z^2)$ or Z^2 admet une variance

donc par Koenig Huyghens :

$E(Z_1^4) = E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = V(Z) + E(Z_1^2)^2$

$E(Z_1^4) = V(Z) + \sigma^4$

Admis pour la suite.

f) $T = {}^tZ\,Q\,Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} z_i z_j\, Q_{i,j}$

$T = \sum_{i=1}^{m} z_i^2\, Q_{i,i} + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} Q_{i,j}\, z_i z_j\right)$

$T = T_1 + \sum_{i=1}^{m}\left(2 \times \sum_{j=i+1}^{m} Q_{i,j}\, z_i z_j\right)$,

$T = T_1 + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Q_{i,j}\, z_i z_j$

$T = T_1 + 2T_2$

car $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i-1}^{m} Q_{i,j}\, z_i z_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{n} q_{i,j}\, z_i z_j$

De fait, par linéarité de l'espérance :

$E(T_1)$ existe et $E(T_1) = \sum_{i=1}^{m} q_{i,i}\, E(z_i^2)$

$E(T_2)$ existe et $E(T_2) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Q_{i,j}\, E(z_i z_j)$

or z_i et z_j sont indépendants car $i+1 \geq j$
donc $i > j$.

donc $E(T_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j}\, E(z_i)E(z_j)$

Par linéarité de l'espérance, $E(T)$ existe et

$E(T) = E(T_1) + 2E(T_2) = \sum_{i=1}^{m} Q_{i,i}\,\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} q_{i,j}\,\sigma^4$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 28	Session : 2025
Épreuve de : HEC Maths 1		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

admis pour le reste.

h) $T_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\, z_i^2\right)^2$

$E(T_1^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\, z_i^2\right)^2\right)$

Admis.

i) T admet une variance car $T_1 + 2T_2$ admet un moment d'ordre 2.

$V(T) = cov(T_1 + 2T_2, T_1 + 2T_2)$

$= V(T_1) + 4V(T_2) + cov(T_1, 2T_2)$
$+ cov(2T_2, T_1)$.

$= V(T_1) + 4V(T_2) + 2cov(T_1, 2T_2)$

(j) Admis.

Partie 3

2aa)

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle v,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 =$$

$$\cancel{\|u\|^2} + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - \cancel{\|u\|^2} - 2\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\cancel{2\langle u,v\rangle}\|u\|^2 + \|v\|^2\|u\|^2 - \cancel{2\langle u,v\rangle}\|u\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\|v\|^2\|u\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

23a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda+\alpha_i^2)^2}$ (Soit $\lambda \in]0;+\infty[$

or $\displaystyle\frac{\alpha_i^2}{(\lambda+\alpha_i^2)^2} \leq \frac{1}{4\lambda}$ (identité remarquable)

donc $\displaystyle\frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda+\alpha_i^2)^2} \leq \frac{1}{4\lambda} y_i^2$

par Somme finie :

$$-1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda+\alpha_i^2)^2} \leq -1 + \frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

donc $\forall \lambda > 0 \quad F(\lambda) \leq -1 + \displaystyle\frac{1}{4\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$