

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 31

Session : 2025

Épreuve de :

Maths 2 HEC/ESCP

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie

1a) $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

donc X_i admet un moment d'ordre 2.

Par Koenig-Huygens : on a $\forall i \geq 1$ $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2$

donc $\forall i \geq 1$ $E(X_i^2) = 1 + 0^2 = 1$

De fait, par la linéarité de l'espérance :

$E(S_m)$ existe et $E(S_m) = E\left(\sum_{i=1}^m X_i^2\right) = \sum_{i=1}^m E(X_i^2) = m$

b) def $\text{minut}(m)$:

Y = sd. normal $(0,1)$ $n \geq 2$

T = mp. array $(Y, [m, n])$

S = mp. sum $(T, 0)$

$\text{print}(S)$

c) Le script semble simuler un grand nombre de fois la moyenne empirique de S_n .

En représentant les valeurs de S_n à l'aide d'un graphique

$$2a) W_n = \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} X_n^2$$

$$W_n(x) \subset \mathbb{R}^+$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note F_{W_n} la fonction de répartition de W_n .

si $x < 0$: $F_{W_n}(x) = 0$

si $x \geq 0$: $F_{W_n}(x) = P\left(\frac{1}{2} X_n^2 \leq x\right) = P(X_n^2 \leq 2x)$

$$F_{W_n}(x) = P(|X_n| \leq \sqrt{2x})$$

car $t \mapsto \sqrt{t}$ est
une bijection de \mathbb{R}^+
dans \mathbb{R}^+

$$F_{W_n}(x) = \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})$$

car $X_n \sim N(0,1)$
donc X_n est une VA
à densité.

$$\underline{F_{W_n}(x) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Montrons que ϕ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\phi(n) = \int_{-\infty}^n \varphi(t) dt = \phi(0) + \int_0^n \varphi(t) dt$$

or φ est continue sur \mathbb{R} .

donc $G: x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$ est l'unique primitive de φ sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.

donc G est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . donc ϕ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

Par ailleurs, $x \mapsto \sqrt{2x}$ est \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

donc $x \mapsto 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$ est \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ par composition.

Ainsi, F_{wn} est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0. (1)

Le fait, F_{wn} est déjà continue sur \mathbb{R}^* .

Étude en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{\text{wn}}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{\text{wn}}(x) = 2\phi(0) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$$

par valeurs de ϕ en 0.

$$\text{et } \underline{F_{\text{wn}}(0) = 0}$$

Donc F_{wn} est continue en 0. donc F_{wn} est continue sur \mathbb{R} . (2)

(1) et (2) car ce W_1 est une VA à densité

Une densité est donnée par:

$$\forall n \in \mathbb{R}^* \quad f_{W_1}(n) = F_{W_1}'(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 2\sqrt{2} \phi'(\sqrt{2n}) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{R}^* \quad f_{W_1}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-n} \times \frac{1}{2\sqrt{n}} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Pour $f_{W_1}(0) = 0$

et au final: $\forall n \in \mathbb{R} \quad f_{W_1}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{2}-1} e^{-n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$

c) Au titre de densité de probabilité:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{W_1}(t) dt = \int_0^{+\infty} f_{W_1}(t) dt = 1 \quad \text{car } f_{W_1} \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^-$$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} n^{\frac{1}{2}-1} e^{-n} dn = 1$$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\text{Au final: } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 35	Session : 2025
	Épreuve de : Maths 2 HEC/ESCP		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$d) W_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2}$$

or (X_1, \dots, X_n) sont mutuellement indépendantes. Ainsi, par le lemme des conditions, $(\frac{X_1^2}{2}, \dots, \frac{X_n^2}{2})$ sont aussi indépendants.

avec ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_{W_n}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} n^{n/2-1} e^{-n} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

donc $W_n \hookrightarrow \chi^2(\frac{n}{2})$

or (X_1, \dots, X_n) sont de même loi donc

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{X_i^2}{2}$ suit la même loi que W_n .

donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{X_i^2}{2} \hookrightarrow \chi^2(\frac{n}{2})$

L'indépendance de $(\frac{X_1^2}{2}, \dots, \frac{X_n^2}{2})$ et la stabilité de la loi gamma assure que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^+ \quad W_m = \sum_{i=1}^m \frac{X_i^2}{2} \hookrightarrow \delta\left(\frac{m}{2}\right)$$

d) Ainsi, $W_m \hookrightarrow \delta\left(\frac{m}{2}\right)$

donc $E(W_m) = V(W_m) = \frac{m}{2}$.

or $S_m = 2W_m$ ainsi par linéarité de l'espérance :

$E(S_m)$ existe et $E(S_m) = 2E(W_m) = 2 \times \frac{m}{2} = m$

$V(W_m)$ existe donc $V(S_m)$ existe et :

$V(S_m) = V(2W_m) = 4V(W_m) = 4 \times \frac{m}{2} = 2m$

3a) Soit $m \geq 3$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$

et $W_m \hookrightarrow \delta\left(\frac{m}{2}\right)$ donc $W_m(\omega) \in]0; +\infty[$

par théorème de transfert :

$\frac{1}{W_m}$ admet une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_m}(t) dt$ converge absolument.

si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_m}(t) dt$ converge.

car f_{wm} est nulle sur \mathbb{R}^- et $\forall t > 0 \frac{1}{t} f_{wm}(t) > 0$.

$$\text{or } t \mapsto \frac{1}{t} f_{wm}(t) = \frac{1}{t} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t}$$

qui est continue sur $]0; +\infty[$.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{wm}(t) dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

$$\text{or } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{wm}(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt$$

or $\Gamma: n \mapsto \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ est définie sur $]0; +\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{wm}(t) dt$ converge si $\frac{m}{2}-1 > 0$

si $m > 2$

si $m > 3$

or $m > 3$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{wm}(t) dt$ converge.

donc $\frac{1}{wm}$ admet une espérance.

$$\text{Donc } E\left(\frac{1}{wm}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{wm}(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{2}-1} e^{-t} dt$$

$$\text{donc } E\left(\frac{1}{wm}\right) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

Par un raisonnement similaire à: 2d)

$$2W_n = S_n \quad \text{or} \quad X_i(\omega) \neq 0 \quad \text{donc} \quad S_n(\omega) \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2W_n}$$

or $\frac{1}{W_n}$ admet une espérance donc par linéarité de l'espérance: $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe.

$$\text{or} \quad E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$\text{or} \quad \forall n > 0 \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

$$\text{pour} \quad n = \frac{n}{2} - 1 > 0 \quad \text{car} \quad n \geq 3.$$

$$\text{or} \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$$\text{donc} \quad E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{n}{2}-1}$$

$$\underline{E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}}$$

d) Soit $n \geq 3$

On peut montrer similairement que: $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ admet une espérance.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 35

Session : 2025

Épreuve de : HEC Maths 2

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

en effet, $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur \mathbb{R}^+
et $W_n(\sigma) \subset \mathbb{R}^+$

Ainsi par théorème de transfert :

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existe ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t) dt$ converge absolument

ssi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t) dt$ converge

car f_{W_n} est nulle sur \mathbb{R}^- et $\forall t > 0 \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t) > 0$

or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t) dt$ est égale en $+\infty$ et en 0

or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_n}(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{(n-1)}{2}-1} e^{-t} dt$

qui converge ssi $\frac{n-1}{2} > 0$ ou $n > 1$ ou $n \geq 2$

car $\Gamma: n \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ est définie sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$

or $n \geq 3 \geq 2$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{\omega_n}(t) dt$ converge.

et $E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existe.

de plus $\forall \omega \in \Omega \quad W_n(\omega) > 0$

donc $\forall \omega \in \Omega \quad \sqrt{W_n(\omega)} > 0$

et $\frac{1}{\sqrt{W_n(\omega)}} > 0$ (cela a bien du sens)
car $W_n \in \mathcal{S}\left(\frac{n}{2}\right)$

avec la relation $S_n = 2W_n$

on a $\sqrt{S_n} = \sqrt{2} \sqrt{W_n}$

donc $\frac{1}{\sqrt{S_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{W_n}}$

par linéarité de l'espérance: $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe et

vaut $\frac{1}{\sqrt{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

donc $\forall n \geq 3$ (voire même $n \geq 2$ dans ce cas précis)
 $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ admet une espérance.

4) Soit $\alpha \in]0, 1[$

Soons F_{T_n} la fonction de répartition de T_n .

Montrons F_{T_n} réelle ne l'écriture de \mathbb{R} dans $]0, 1[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_{T_n}(x) = P(T_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{T_n}(t) dt = F_{T_n}(0) + \int_0^x f_{T_n}(t) dt$$

or f_{T_n} est continue sur \mathbb{R} .

donc $G: x \mapsto \int_0^x f_{T_n}(t) dt$ est l'unique primitive

de f_{T_n} sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Ainsi G est \mathcal{C}^1

sur \mathbb{R} . donc F_{T_n} est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (1)

Donc F_{T_n} est continue sur \mathbb{R} (2) (car dérivable sur \mathbb{R} ,
car \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R})

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_{T_n}'(x) = G'(x) = f_{T_n}(x) > 0$

car f_{T_n} est strictement positive sur \mathbb{R} .

donc F_{T_n} est strictement croissante. (3)

Au titre de fonction de répartition (d'une VA à densité):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{T_n}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{T_n}(x) = 1 \quad (4)$$

Les 4 points (1), (2), (3), (4) amènent que:

F_{T_n} réelle ne bijection de \mathbb{R} sur $]0,1[$.

$$\text{On } p(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = F_{T_n}(t_{n,\alpha}) - F_{T_n}(-t_{n,\alpha})$$

car T_n est une VA à densité.

$$\text{Mais on } \exists! t_{n,\alpha} \in \mathbb{R}, \quad F_{T_n}(t_{n,\alpha}) - F_{T_n}(-t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Je n'aboutis pas ici... Je me propose

alors plutôt de montrer que $F_{|T_n|}$ réelle ne de conclure.

$$\text{or } \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{|T_n|}(n) = F_{T_n}(n) - F_{T_n}(-n)$$

or F_{T_n} est une bijection donc $n \mapsto F_{T_n}(n) - F_{T_n}(-n)$ est une bijection de \mathbb{N} dans $]0,1[$. (différence de deux bijection est une bijection?)

↳ Si ce n'est pas le cas, j'admet que $F_{|T_n|}$ réelle ne bijection de \mathbb{N} dans $]0,1[$.

or $1 - \alpha \in]0,1[$ et $F_{|T_n|}$ est une bijection de \mathbb{N} dans $]0,1[$.

D'après le théorème de la bijection: $\exists! t_{n,\alpha} \in \mathbb{N} /$

$$\underline{F_{|T_n|}(t_{n,\alpha}) = \alpha \in]0,1[}$$

L'existence et l'unicité est prouvée

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 35	Session : 2025
	Épreuve de : Maths 2 HEC / ESCP		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

5a) Soit $n \geq 3$

Y et les (X_1, \dots, X_n) sont indépendantes.

Le lemme de coalition assure alors que :

* Y et S_n sont indépendantes (car Y et (X_1^2, \dots, X_n^2)

le sont, donc encore par le lemme de coalition :

Y et $\sum_{i=1}^n X_i^2$ le sont).

* De même, Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes.

encore par le lemme de coalition.

* Finalement, encore par le lemme de coalition,

Y et $\frac{1}{\sqrt{S_n/m}}$ sont indépendantes.

or avec 3b) $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe donc $E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}\right)$ existe

et $Y \sim N(0,1)$ donc $E(Y)$ existe et vaut 0.

Par indépendance de Y et $\frac{1}{\sqrt{S_m}}$

$$E(T_m) \text{ existe, et } E(T_m) = E(Y) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right)$$

par linéarité de l'espérance

En effet si $E(X)$ et $E(Y)$ existent et X et Y sont indépendants, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$

$$\text{donc } E(T_m) = E(Y) \times \sqrt{m} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right) = 0$$

car $E(Y) = 0$

b) Soit $m \geq 3$

de la même manière :

$V(T_m)$ existe si $E(T_m^2)$ existe

$$\text{or } \forall \omega \in \Omega \quad T_m^2(\omega) = \left(\sqrt{m} \frac{Y(\omega)}{\sqrt{S_m(\omega)}} \right)^2 = m \times \frac{Y^2(\omega)}{S_m(\omega)}$$

$$\text{donc } T_m^2 = m \times \frac{Y^2}{S_m}$$

or Y et S_m sont indépendantes d'après la question précédente (avec le lemme de coalition)

donc par le lemme de coalition : nY^2 et $\frac{1}{S_n}$

sont indépendantes.

Or avec Koenig-Huyghens $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1$

car $Y \sim N(0,1)$ donc par linéarité $E(nY^2) = n \cdot 1 = n$

et $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n-2}$ d'après (3-).

L'indépendance de nY^2 et $\frac{1}{S_n}$ et l'existence

de $E(nY^2)$ et $E\left(\frac{1}{S_n}\right)$ assure que :

$E(T_n^2)$ existe et que $E(T_n^2) = E\left(\frac{nY^2}{S_n}\right) = E(nY^2) \times E\left(\frac{1}{S_n}\right)$

donc $E(T_n^2)$ existe et $E(T_n^2) = (n \times 1) \times \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

T_n admet un moment d'ordre 2 donc $V(T_n)$ existe

et par Koenig-Huyghens et le fait que $E(T_n) = 0$

$$V(T_n) = E(T_n^2) + E(T_n)^2 = \frac{n}{n-2} + 0 = \frac{n}{n-2}$$

c) Soit $n \geq 3$

Sous réserve d'existence :

Par Koenig-Huyghens : $E((T_n - Y)^2) = V(T_n - Y) + (E(T_n - Y))^2$

or par linéarité de l'espérance : $E(T_n - Y) = E(T_n) - E(Y) = 0$
d'après 5a)

donc $E((T_n - Y)^2) = V(T_n - Y)$

or $V(T_n)$ existe, $V(Y)$ existe et T_n et Y admettent un moment d'ordre 2 donc $\text{cov}(T_n, Y)$ existe.

Ann: $E((T_n - Y)^2) = V(T_n - Y) = V(T_n) + (-1)^2 V(Y) + 2 \text{cov}(T_n, Y)$

car T_n et Y ne sont pas indépendantes

$$E((T_n - Y)^2) = V(T_n) + V(Y) - 2 \text{cov}(T_n, Y)$$

$$E((T_n - Y)^2) = \frac{n}{n-2} + 1 - 2 \text{cov}(T_n, Y) \text{ (avec } S_b)$$

$$E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - 2 \text{cov}(T_n, Y)$$

or $\text{cov}(T_n, Y) = E(T_n Y) - \underbrace{E(T_n)E(Y)}_{=0}$ avec Koeng
Hughes.

car $E(T_n) = E(Y) = 0$

donc $\text{cov}(T_n, Y) = E(T_n Y) = E\left(\frac{\sqrt{n} Y^2}{\sqrt{S_n}}\right)$

sous réserve d'existence

même justification
qu'à (S_n) et (S_b)

a avec tout le travail ^{fait} précédemment, on a encore
que Y et S_n sont indépendantes (lemme des coalitions)

donc le lemme des coalitions assure encore que :

$\sqrt{n} Y^2$ et $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ sont indépendantes

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 35	Session : 2025
	Épreuve de :	Maths 2 HEC / ESCP	
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Ω $E(V_m Y^2)$ existe et vaut avec K-H et par linéarité de l'opérateur $V_m \times 1 = V_m$.

et $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right)$ existe avec b)

$$\text{et avec } W_m = \frac{1}{2} S_m \quad \frac{1}{\sqrt{S_m}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{W_m}}$$

sur $\forall w \in \Omega \quad S_m(w) > 0$ et $W_m(w) > 0$.

$$\text{donc } E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_m}}\right)$$

Ainsi, l'indépendance de $V_m Y^2$ et $\frac{1}{\sqrt{S_m}}$ et le fait que leurs opérateurs existent assure que :

$E(T_m Y)$ existe et

$$\text{cov}(T_m Y) = E(T_m Y) = V_m E(Y^2) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_m}}\right)$$

$$\text{donc } \text{cov}(T_m Y) = V_m \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_m}}\right) \quad \text{par linéarité de l'opérateur}$$

Am final:

$$E((T_n - 4)^2) = V(T_n - 4) = \frac{2n-2}{n-2} - 2 \operatorname{cov}(T_n, 4)$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - 2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

$$E((T_n - 4)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

6a) Soit $n \geq 2$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} (X_{n+1})^2 = W_n + \frac{1}{2} (X_{n+1})^2$$

$$\text{or } \forall \omega \in \Omega \quad \frac{1}{2} X_{n+1}^2(\omega) \geq 0$$

$$\text{donc } \forall \omega \in \Omega \quad W_{n+1}(\omega) \geq W_n(\omega) > 0$$

$$\text{car } W_n \hookrightarrow \delta\left(\frac{n}{2}\right) \text{ donc } W_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur \mathbb{R}^+

$$\forall \omega \in \Omega \quad \sqrt{W_{n+1}(\omega)} \geq \sqrt{W_n(\omega)} > 0$$

au final, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur \mathbb{R}^{+*}

$$\text{On a } \forall w \in \Omega \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}(w)}} \leq \frac{1}{\sqrt{W_n(w)}}$$

$\forall n \geq 2 \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ existe d'après (b) (travail fait pour justifier que $E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe)

donc $\forall n \geq 2 \quad \forall w \in \Omega$ on a par croissance de l'espérance:

$$\underline{E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}(w)}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n(w)}}\right)}$$

donc $\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} \leq u_n$

donc $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante

$$u_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right) \quad \text{où } W_2 = \frac{1}{2} S_2 = \frac{1}{2} (X_1^2 + X_2^2)$$

On $W_2 \in \mathcal{E}(1)$ ou $W_2 \in \mathcal{G}(1)$ d'après (2c).

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur \mathbb{R}^{++} or $W_2 \in \mathcal{G}(1) \subset \mathbb{R}^{++}$

Par théorème de transfert :

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{W_2}(t) dt$ converge absolument

si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$ converge

car f_{w_2} est nulle sur \mathbb{R}^-

$$\text{et } \forall t > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{t}} f_{w_2}(t) > 0$$

$$\text{ou } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} f_{w_2}(t) \text{ est continue sur }]0; +\infty[$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{w_2}(t) dt \text{ est impropre en } 0 \text{ et en } +\infty$$

$$\text{ou } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{w_2}(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{1/2-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{car } \Gamma: n \mapsto \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \text{ est définie sur }]0; +\infty[$$

$$\text{ou } \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} f_{w_2}(t) dt \text{ est convergent.}$$

$$\text{donc } m_2 \text{ existe et } m_2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ d'après (2b)}$$

b) Soit $n \geq 2$

les densités de la suite sont définies et avec

le travail fait précédemment:

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \text{ et } E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \text{ existent et}$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t} dt$$

car $W_{n+1} \sim \chi^2\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 35	Session : 2025
	Épreuve de : HEC Maths 2		
Consignes <ul style="list-style-type: none"> • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre 			

$$\text{donc } E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

et de la même manière :

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt \quad \left| \text{car } W_n \sim \chi^2\left(\frac{n}{2}\right) \right.$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Au final :

$$m+1 \times m = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{m+1}}}\right) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_m}}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)$$

$$m+1 \times m = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \times \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

$$u_{n+1} \times u_n = \frac{1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2}{n-1}$$

$$\text{car } \forall n > 0, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

c) def suite_u(n):
 S = np.array[]
 u = np.pi
 for k in range(n):
 u = 2 / (u + (k-1))
 S = S + np.append(u)
 return(S)

On connaît u_2 donc on peut connaître les autres termes avec la relation donnée en 6b).

$$\forall n > 2, u_{n+1} = \frac{2}{u_n + (n-1)} \quad \text{car } u_n > 0$$

$$\text{donc } u_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}(2-1)}$$

$$u_4 = \frac{2}{u_3(3-1)}$$

etc.

d) Le programme suivant exécute ceci: \cup
 * il affiche dans un tableau numpy \cup les 80 premières valeurs de la suite u_n .

* crée un vecteur \cup qui renvoie la liste des entiers entre 2 et 81 (non compris) donc $\llbracket 2; 80 \rrbracket$

* et génère la courbe de points définies par les listes V et U . et relie les points.

La forme de la courbe représentant les valeurs de $(un)^2/n$ semble converger vers 2. (pour $n=80$)

On conjecture que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (un^2 \times n) = 2$

on conjecture (à vue de ϵ) que pour $2 \pm \epsilon$

$$un^2 \times n \approx 2$$

$$\text{donc } un^2 \approx \frac{2}{n}$$

$$\boxed{\text{donc } un \approx \sqrt{\frac{2}{n}}}$$

e) On a $\forall n \geq 2 \quad u_{n+1} \times u_n = \frac{2}{n-1}$

soit $(un)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0.

donc $(un)_{n \geq 2}$ converge (théorie de la convergence monotone)

$$\text{Notons } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} un$$

$$\text{On a: } \forall n \geq 2 \quad 0 \leq un \leq u_2$$

Par théorème de prolongement des inégalités :

$$0 \leq l \leq 2$$

On par extraction, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

$$a \quad \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$$

donc $u_{n+1} \sim u_n + \frac{2}{n}$

or $u_n \sim \frac{2}{n}$ car $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

donc $u_n^2 \sim \frac{2}{n}$

par passage à la puissance constante deux termes équivalents. On a bien :

$$u_n \sim \frac{2}{n} \quad \text{car } \forall n \geq 2 \quad u_n > 0$$

7) On vise :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p(|T_n - 4| \geq \varepsilon) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 35

Session : 2025

Épreuve de :

Maths 2 HEC/ESCP

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie II

8) Supposons $a=2$ et $b=-1$

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 2 \text{ et } x-y \leq -1 \right\}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq -1 \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} 2x \leq 1 \\ x-y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x-y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{donc nécessairement } x \leq \frac{1}{2}$$

~~$$\text{donc } \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$~~

SUITE →

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \quad \begin{cases} x+y \leq 2 \\ x-y \leq 1 \end{cases} \right.$$

$$\text{donc } 2x \leq 3$$

$$\text{donc nécessairement } x \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{et nécessairement donc } x \leq 1+y$$

$$\text{donc } 2 \geq x+y \geq 2y+1$$

$$\text{donc } y \leq \frac{1}{2}$$

$$g) \text{ Soit } y \in \mathbb{R} \quad (y \geq 0)$$

$$a) \text{ Supposons } (x, y) \in A$$

$$\text{donc } \begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} x \leq a-y \\ x-y \leq b \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} x \leq a-y \\ x \leq b+y \end{cases}$$

$$\text{donc } x \leq a-y$$

$$\text{donc } x \in]-\infty, a-y]$$

$$\text{Supposons } x \in]-\infty, a-y]$$

donc $n \leq a-y$ et $n+y \leq a$

et $n-y \leq a-2y$ (1)

or $a = 2d + b$.

et $y \geq d$ donc $-2y \leq -2d$.

donc $a-2y \leq 2d-2d+b$. (2)

donc (1) et (2) assure que $n-y \leq 2d-2d+b = b$

donc $(n,y) \in A$

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(n,y) \varphi(n) dn = \int_{-\infty}^{a-y} 1 \times \varphi(n) dn + \int_{a-y}^{+\infty} 0 \times \varphi(n) dn = \phi(a-y) + 0$$

$$\text{car } \mathbb{1}_A(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (n,y) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

or avec a) $(n,y) \in A \Leftrightarrow n \in]-\infty, a-y]$

$$\text{donc } \mathbb{1}_A(n,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq a-y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(n,y) \varphi(n) dn = \phi(a-y)$$

1d) Supposons $y \leq d$.

Montrons que $(n,y) \in A$ si $n \in]-\infty, b+y]$

Supposons $(x, y) \in A$.

$$\text{donc } x + y \leq a \text{ et } x - y \leq b$$

$$\text{donc } x \leq b + y.$$

$$\text{et } x \in]-\infty; b + y]$$

Supposons $x \in]-\infty; b + y]$.

$$x \leq b + y \text{ donc } \boxed{x - y \leq b} \quad (1)$$

$$\text{et } x + y \leq b + 2y$$

$$\text{or } -b = 2d - a \text{ donc } b = a - 2d$$

$$\text{or } y \leq d \text{ donc } 2y \leq 2d.$$

$$\text{donc } x + y \leq b + 2y = a - 2d + 2y \leq a - 2d + 2d = a$$

$$\boxed{\text{donc } x + y \leq a} \quad (2)$$

(1) et (2) assure la réciproque

$$\text{donc } (x, y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty; b + y]$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x, y) \mathcal{L}(x) dx = \int_{-\infty}^{b+y} 1 \times \mathcal{L}(x) dx + \int_{b+y}^{+\infty} 0 \times \mathcal{L}(x) dx = \phi(b+y)$$

$$\text{car } 1_A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in A \Leftrightarrow x \leq b + y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{multiplions par : } \int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x, y) \mathcal{L}(x) dx = \phi(b+y)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 35	Session : 2025
	Épreuve de : Maths 2 HEC / ESCP		
	Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

$$11a) A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq a \text{ et } x-y \leq b \}$$

Posons: $f: (x, y) \mapsto x+y$ qui est continue sur \mathbb{R}^2
car polynomiale.

et $g: (x, y) \mapsto x-y$ est continue sur \mathbb{R}^2 car
polynomiale.

On $] -\infty; a]$ et $] -\infty; b]$ sont des fermés de \mathbb{R} .

Or l'image réciproque d'un fermé de \mathbb{R} par une
fonction continue sur \mathbb{R}^2 est un fermé de \mathbb{R}^2 .

donc $F_1 = f^{-1}(] -\infty; a])$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

de même $F_2 = g^{-1}(] -\infty; b])$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

donc $A = F_1 \cap F_2$ est un fermé de \mathbb{R}^2 par

intersection de fermés de \mathbb{R}^2

Mb) Soit $X \sim N(0,1)$ et $Y \sim N(0,1)$.

Avec le théorème Admis: - X et Y sont deux indépendantes

- de même densité φ

- A est une partie bornée de \mathbb{R}^2

(19a)

Le théorème admis assure que:

$$P((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(n,y) \varphi(n) dn \right) \varphi(y) dy$$

$$P((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^d \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(n,y) \varphi(n) dn \right) \varphi(y) dy +$$

→ (ici $y \leq d$)

$$\int_d^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(n,y) \varphi(n) dn \right) \varphi(y) dy \quad \text{(ici } y > d)$$

par linéarité d'intégrales convergentes.

avec les résultats de 9b) et 10)

$$P((X,Y) \in A) = \int_{-\infty}^d \underbrace{\phi(b+y)}_{(1)} \varphi(y) dy + \int_d^{+\infty} \underbrace{\phi(a-y)}_{(2)} \varphi(y) dy \quad (*)$$

posons dans la première intégrale ⁽¹⁾ $y = a - c - z$

$\Psi:]a-c-d, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$u \mapsto a-c-u$

et φ^a sur $]a-c-d, +\infty[$

et réelle ce changement s'écrit

monotone de $]a-c-d; +\infty[$ dans $] -\infty; d[$.

Par théorème de changement de variable:

sous réserve de convergence, on a l'égalité:

$$\int_{-\infty}^d \phi(b+y) \psi(y) dy \text{ et } \int_{a-c-d}^{+\infty} \phi(c-z) \psi(d-z) dz = \int_0^{+\infty} \phi(c-z) \psi(d-z) dz$$

$$b+y = 2c-a+y = c + \underbrace{(c-a+y)}_{=-z}$$

d'après le résultat
que l'on veut
démontrer.

et de plus $a-c-d = d-d = 0$

$$\text{et } y = a-c-z = d-z$$

on peut montrer que $\int_0^{+\infty} \phi(c-z) \psi(d-z) dz$

converge car: $\forall z \geq 0 \quad 0 \leq |\phi(c-z) \psi(d-z)| \leq \psi(d-z)$

$$\text{car } |\phi(c-z)| \leq 1$$

ou $\int_0^{+\infty} \psi(d-z) dz$ converge (dérivée d'1

loi nouvelle

entière et réduite)

Par critère de comparaison par infériorité:

$\int_0^{+\infty} \phi(c-z) \psi(d-z) dz$ converge absolument donc converge.

et on a l'égalité avec le théorème de changement de variable:

$$\text{et } \int_{-\infty}^d \phi(b+y) \psi(y) dy = \int_0^{+\infty} \phi(c-z) \psi(d-z) dz$$

Avec un changement de variable du type

$$\underline{y = c - b + z} \quad \text{dans (2)}$$

On trouve par la même analyse (méthode

et mêmes substitutions pour le deuxième (dans l'intégrale (2))
de variables que :

$$\int_d^{+\infty} \phi(a-y) \psi(y) dy = \int_0^{+\infty} \phi(c-z) \psi(d+z) dz$$

$$\underline{\text{car } c - b + z = d + z}$$

Au final avec les changements de variables dans
(1) et (2) on a : en reprenant (*)

$$P((X, Y) \in A) = \int_0^{+\infty} \psi(d-z) \phi(c-z) dz + \int_0^{+\infty} \psi(d+z) \phi(c-z) dz$$

par linéarité d'intégrals qui conduit :

On a bien :

$$\underline{P((X, Y) \in A) = \int_0^{+\infty} (\psi(d-z) + \psi(d+z)) \phi(c-z) dz}$$

(2) avec (1)

$$P((X, Y) \in A) = \int_0^{+\infty} (\psi(d-z) + \psi(d+z)) \phi(c-z) dz$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 35

Session : 2025

Épreuve de :

Maths 2 FIEC/ESCP

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{or } \phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(t) dt. \textcircled{+}$$

$$\text{on a } p(\mathcal{X}(u) \in A) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d-z) + \varphi(d+z)) \times \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{c-z} \varphi(t) dt \right]}_{\textcircled{+}} dz$$

avec le changement de variable dans $\textcircled{+}$

$$u = t + z$$

on se "permet" de justifier le changement de variable

de manière analogue à 11b) (autres φ^1 de $u \mapsto u-z$ et hectorian, tout avec la convergence) pour aller plus vite et avancer.

$$\text{Ainsi } \phi(c-z) = \int_{-\infty}^c \varphi(u-z) du$$

avec le
changement
de variable

or les variables "u" et "t" ont même,

$$\text{donc } \phi(c-z) = \int_{-\infty}^c \varphi(t-z) dt$$

en remplaçant dans $(*)$:

On a bien:

$$p((X, Y) \in A) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z)) \left(\int_{-\infty}^c \varphi(t-z) dt \right) dz$$

$$p((X, Y) \in A) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^c [\varphi(d+z) + \varphi(d-z)] \varphi(t-z) dt \right) dz$$

13) Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

$$\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

$$\text{et } \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(u+v)^2 + \frac{1}{2}(u-v)^2 \right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}u^2 + uv + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 - uv + \frac{1}{2}v^2 \right)}$$

$$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

donc $\psi(u, v) \in \mathbb{M}^2$

$$\psi(u) \psi(v) = \psi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) \psi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$$

$$14) \rho((X, Y) \in A) = \int_{-\infty}^c \left(\int_0^{+\infty} (\psi(d+z) + \psi(d-z)) \psi(t-z) dz \right) dt$$

d'après le résultat
admis.

$$= \int_{-\infty}^c \left(\int_0^{+\infty} \psi(d+z) \psi(t-z) dz + \int_0^{+\infty} \psi(d-z) \psi(t-z) dz \right) dt$$

par linéarité d'intégrales qui converge.

$$= \int_{-\infty}^c \left(\int_0^{+\infty} \psi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right) \psi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) dz + \int_0^{+\infty} \psi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right) \psi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right) dz \right) dt$$

avec 13)

Admis pour le reste.

17a)

$$\sum_{h=2}^{\infty} \langle n, a_h \rangle a_h = \sum_{h=2}^{\infty} \left(\right)$$