Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 25	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 approfondies ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie

1 (a) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Comme $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Par la linéarité de l'espérance et par le fait que les X_i admettent une variance, on sait que $E(X_i^2)$ existe par la formule de Koenig Huygens : $V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$

On peut alors calculer l'espérance de S_n :

$E(S_n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$ par linéarité de l'espérance

$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + E(X_i)^2$ par Koenig Huygens

Or $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc $V(X_i) = 1$ et $E(X_i) = 0$

Ainsi, $\boxed{E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n}$

(b)
Avec les bibliothèques importées :

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

```
def simul(n)
    S=0
    for K in range(1,n+1):

        S=S+(rd.normal(0,1))**2
    return S
```

(c) La fonction f du programme renvoie une simulation de la variance de S_n. Car t/N est une approximation de $E(S_n^*)$ et (-n**2) correspond à $-E(S_n)^2$

N correspond au nombre de simulation et n est celui de S_n

le graphique montre donc que $V(S_1) \approx 2$, $V(S_2) \approx 4$, $V(S_3) \approx 6$, ..., $V(S_9) \approx 18{,}5$.

On peut alors conjecturer que $V(S_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ est une suite croissante et que $V(S_n) = 2n$

2. (a) $W_1 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{1}{2} X_1^2$

Donc W_1 est une fonction de variable à densité, par la fonction continue $t \mapsto t^2$ et la multiplication de $\frac{1}{2}$.

Donc W_1 est bien une variable à densité car X_1 en est une.

Cherchons alors une densité de W_1 :

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

On en déduit que $\frac{1}{2}X_1^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$; $W_1(\Omega) = \mathbb{R}^+$

Donc $\forall x < 0$: $F_{W_1}(x) = 0$

$\forall x \geq 0$: $F_{W_1}(x) = P(W_1 \leq x) = P(\frac{1}{2}X_1^2 \leq x)$

$= P(X_1^2 \leq 2x) = P(|X_1| \leq \sqrt{2x})$ par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}^+$

$= P(-\sqrt{2x} \leq X_1 \leq \sqrt{2x})$

$= \phi(\sqrt{2x}) - \phi(-\sqrt{2x})$ car $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$= \phi(\sqrt{2x}) - (1 - \phi(\sqrt{2x}))$

$= 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$

Donc $\boxed{F_{W_1}(x) = \begin{cases} 2\phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

On peut alors dériver sa fonction de répartition sur $]0;+\infty[$:

$F'_{W_1}(x) = f_{W_1}(x) = 2 \times (\sqrt{2x})' \times \varphi(\sqrt{2x})$

$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \varphi(\sqrt{2x}) \times \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{x}}\,\varphi(\sqrt{2x})$

Or, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$

Donc $\varphi(\sqrt{2x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{2x})^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x)$

$f_{W_1}(x) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times e^{-x} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\forall x \in]-\infty; 0[$, $f_{W1}(x) = 0$ et on pose une valeur arbitraire en 0 telle que $f_{W1}(0) = 0$.

Finalement, $\boxed{f_{W1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$

(b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$

Or, comme $W1$ est une variable aléatoire à densité,

On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{W1}(x) dx$ converge et vaut 1.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{W1}(x) dx = \int_0^{+\infty} f_{W1}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}} e^{-x} dx = 1$

Ainsi, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} = \sqrt{\pi}}$

Donc $\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}}$

(c) Si une variable suit une loi gamma sa fonction de répartition est ainsi :

Si $H \hookrightarrow \gamma(t)$ $\quad F_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

On remarque alors que

$f_{W1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 25

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\boxed{W_1 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$

Montrons alors que $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation : Pour $n=1$, on a bien $W_1 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Hérédité : On suppose que $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ est vraie pour un certain n et on cherche à montrer que $W_{n+1} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(S_n + X_{n+1}^2\right) = \frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$$

$$W_{n+1} = W_n + \frac{1}{2} X_{n+1}^2$$

On a donc $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ et par un raisonnement ~~annato~~ analogue au précédent (pour W_1) on montre que $\frac{1}{2} X_{n+1}^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Par stabilité de la loi gamma $W_{n+1} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)$

Donc $\boxed{W_{n+1} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

(d) $E(S_n) = E(2W_n) = 2E(W_n)$ par caractéristique de l'espérance.

De plus, $E(W_n) = \frac{n}{2}$ car $W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$

Donc $\boxed{E(S_n) = 2\times(\frac{n}{2}) = n}$

On retrouve bien la valeur de 1a).

* $V(S_n) = V(2W_n) = 2^2 V(W_n) = 4\times\left(\frac{n}{2}\right) = 2n$

Donc $\boxed{V(S_n) = 2n}$

3. (a) $\forall n \geq 3$,

$E(\frac{1}{W_n})$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{W_n}(t)\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-2} e^{-t}\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1-1} e^{-t}\,dt$ converge

Or on reconnait $\Gamma(\frac{n}{2}-1) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-1-1} e^{-t}\,dt$ qui converge.

Donc $\boxed{E\left(\frac{1}{W_n}\right) \text{ existe et } E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}$

* On sait que $W_n = \frac{1}{2} S_n \Leftrightarrow 2W_n = S_n \Leftrightarrow \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2W_n}$

Donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = E\left(\frac{1}{2W_n}\right) = \frac{1}{2} E\left(\frac{1}{W_n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

Or, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Donc $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$

$E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\cancel{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{n-2}{2}} = \boxed{\frac{1}{n-2}}$

(ii)

4. $T_n = \frac{U}{\sqrt{S_n/n}}$

5. (a) $\forall n \geq 3$,

~~$E(T_n)$ existe $\Leftrightarrow$~~

$$T_n = \frac{Y}{\sqrt{S_n/n}} \leq Y$$

Donc par domination, comme $V(Y)$ existe et vaut 1 car $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, $E(T_n)$ existe.

$$E(T_n) = E\left(\frac{Y}{\sqrt{S_n/n}}\right) = E\left(\frac{Y}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} E\left(Y \times \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$$

Or, d'après l'énoncé Y est indépendante des $(X_k)_{k \geq 1}$.

Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, par le lemme des coalitions

Y est indépendante de $\frac{1}{\sqrt{S_n}}$ donc $E\left(Y \times \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = E(Y) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$

$E(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(Y) E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right) = 0$ car $E(Y) = 0$ car $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{\text{Donc } E(T_n) = 0}$$

(b) $V(T_n)$ existe $\Leftrightarrow$ T_n admet un moment d'ordre 2.

Or $T_n^2 = \dfrac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{S_n}{n}}\right)^2} = \dfrac{Y^2}{\frac{S_n}{n}} = n \times \dfrac{Y^2}{S_n}$

Or d'après 3(a) $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-2}$ et $E(Y^2)$ existe aussi

et vaut : $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1$ (Koenig Huygens)

Pour les mêmes raisons que précédemment Y^2 et S_n sont indépendants. Ce qui prouve que $E(T_n^2)$ existe et donc $V(T_n)$ existe (par Koenig Huygens)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 25	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$E(T_n^2) = E\left(n \times \frac{Y^2}{S_n}\right) = n \times E\left(\frac{Y^2}{S_n}\right) = n \times E(Y^2) \times E\left(\frac{1}{S_n}\right)$

Par le lemme des coalition et indépendance pour l'espérance : si X et Y indépendants alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

$E(T_n^2) = n \times 1 \times \frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

Par Koenig Huygens, $V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2$

$$\boxed{V(T_n) = \frac{n}{n-2}}$$

(c) $\forall n \geq 3$, $E((T_n - Y)^2) = E(T_n^2 - 2T_nY + Y^2)$

$= E(T_n^2) - 2E(T_nY) + E(Y^2)$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{n}{n-2} + 1 - 2E(T_nY)$ ~~$= 2n$~~

$= \frac{n + (n-2)}{n-2} - 2E(T_nY) = \frac{2n-2}{n-2} - 2E(T_nY)$

Calculons $E(T_nY)$:

$T_n Y = \frac{Y^2}{\sqrt{S_n/n}} = \sqrt{n}\frac{Y^2}{\sqrt{S_n}}$ Or $\underline{S_n = 2W_n}$

$T_n Y = \sqrt{n}\frac{Y^2}{\sqrt{2W_n}}$

Encore par indépendance de Y^2 et de S_n (et W_n), on a :

$E(T_n Y) = E\left(\sqrt{n}\frac{Y^2}{\sqrt{2W_n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\underbrace{E(Y^2)}_{1} \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$E(T_n Y) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

On regroupe alors nos résultats :

$E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - 2 \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$$\boxed{E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)}$$

6. $\underline{\forall n \geq 2}$,

(a) $U_{n+1} - U_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$

$= E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$ Or, $W_n = \frac{1}{2} S_n$.

$$\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{S_{n+1}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S_{n+1}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{W_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S_n}}$$

<u>De plus</u>: $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + X_{n+1}^2$

$= S_n + X_{n+1}^2 \geq S_n$ car $X_{n+1}^2 \geq 0$

Donc $S_{n+1} \geq S_n$

$\Leftrightarrow \sqrt{S_{n+1}} \geq \sqrt{S_n}$ par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_*^+$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{S_n}}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_*^+$

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}}} - \dfrac{1}{\sqrt{S_n}} \leq 0$

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} - \dfrac{1}{\sqrt{W_n}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}}} - \dfrac{1}{\sqrt{S_n}}\right) \leq 0$

Par croissance de l'espérance on a donc :

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \leq E(0) = 0$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) \leq 0$$

$\boxed{E\left(\frac{1}{\sqrt{W_{n+1}}}\right) \leq E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)}$ par <u>linéarité de l'espérance</u>

Donc, $\boxed{(U_n)_{n\geq 2} \text{ est bien décroissante}}$

$u_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{w_2}}\right)$

(b) $\forall n \geq 2$; $u_{n+1} \cdot u_n = E\left(\frac{1}{\sqrt{w_{n+1}}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{w_n}}\right)$

$= E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} S_{n+1}}}\right) E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} S_n}}\right) = 2 \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}\right) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$

(c)

```
def suite_u(n):
    w = np.zeros(n-1)
    w[0] = valeur u2 ## à trouver en b(a)...
    for k in range(1, n):

        w[k] = (2/k) x (1 / w[k-1])

    return w
```

On utilise la formule $u_{n+1} u_n = \frac{2}{n-1}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{2}{n-1} \times \frac{1}{u_n}$ pour $u_n \neq 0$

~~(d)~~ On voit que (u_n) est bien décroissante et ~~on peut conjecturer que~~ $\cancel{\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 25	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(d) Le graphique ~~convoit~~ montre en abscisse des valeurs allant de 2 à 80.
et en ordonnée, n*Un**2, nU_n^2

$\boxed{\text{On conjecture alors que } \lim_{n\to+\infty} nU_n^2 = 2}$

(e) On suppose que U_n converge vers un réel $\ell \in \mathbb{R}^+$.
En effet la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ converge car elle est décroissante et minorée par 0 car $E\left(\frac{1}{\sqrt{U_n}}\right) \geq 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

D'après 6(b), on a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\ell^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n-1} \quad \text{donc } \ell^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

Par continuité de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt{\ell^2} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}} \iff |\ell| \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Or $\ell \geq 0$ donc $|\ell| = \ell$

Ainsi $\ell \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$ donc $\boxed{U_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7. Montrons que $T_n \xrightarrow{P} Y$. C'est-à-dire que

$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$$

$P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = P((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2)$ par croissance de $t \mapsto t^2$.

D'après l'inégalité de Markov comme $E(|T_n - Y|^2)$ existe et que $\varepsilon \neq 0$:

$$0 \leq P((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((T_n - Y)^2)}{\varepsilon^2}$$

Or, d'après la question 5. c), $E((T_n - Y)^2) = \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\, U_n$

D'un côté, $\frac{2n-2}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{n} = 2$

De l'autre, $\sqrt{2n}\, U_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}\sqrt{\frac{2}{n}} = 2$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} E(|T_n - Y|^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-2}{n-2} - \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\, U_n = 2 - 2 = 0$

Donc par le théorème de l'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} P((T_n - Y)^2 \geq \varepsilon^2) = 0$$

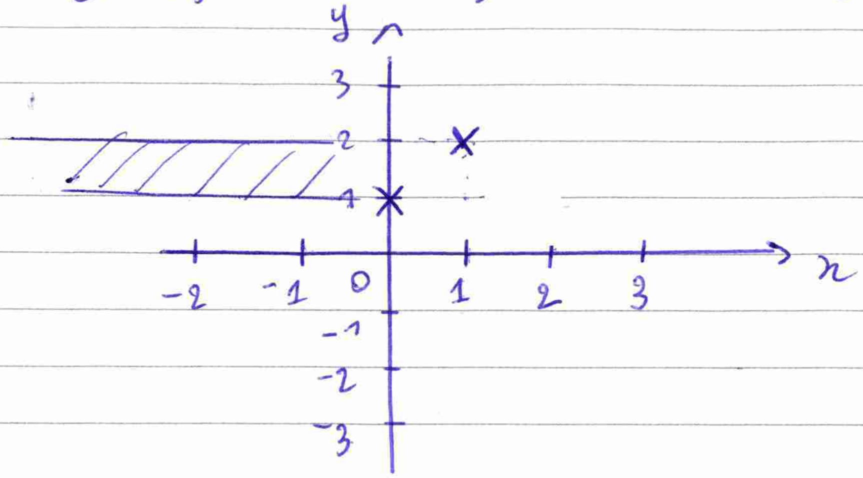
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P(|T_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$$

Ce qui prouve que $T_n \xrightarrow{P} Y$

Deuxième partie :

8. $a=2$ et $b=-1$

$\mathcal{A} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 2$ et $x-y \leq -1\}$



9. $y \geq d$

(a) Montrons que $(x,y)\in\mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, a-y]$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $x \in \,]-\infty, a-y]$

alors $a-y \geq x \quad)+y$

$\boxed{a \geq x+y}$

* $x-y \leq b$? On a $2d = a-b \Leftrightarrow b = a-2d$

* $y \geq d \Leftrightarrow 2y \geq 2d \Leftrightarrow -2y \leq -2d$

$x \leq a-y \quad)-y$

$x-y \leq a-2y \leq a-2d = b$

Donc $\boxed{x-y \leq b}$

Donc $\boxed{(x,y)\in\mathcal{A}.}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Soient $(x,y) \in \mathcal{A}$.

Montrons que $x \in]-\infty, a-y]$

$*$ $\begin{cases} x+y \leq a \\ x-y \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a-y \\ x \leq b+y \end{cases}$

Donc $\boxed{x \leq a-y \text{ c'est-à-dire } x \in]-\infty; a-y]}$

On a bien l'équivalence recherchée.

(b). $\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq a-y \\ 0 & \text{si } x > a-y \end{cases}$ d'après ce qu'on vient de montrer

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a-y} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)\,dx$

$+ \int_{a-y}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{1}_A(x,y)}_{0}\varphi(x)\,dx$ (Relation de Chasles).

$= \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)\,dx$ on reconnait la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

$= \boxed{\Phi(a-y)}$

10. $\underline{\forall y \geq d}$

On montre d'abord de façon équivalente que

$(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in]-\infty, b+y]$, lorsque $y \leq d$.

Rapidement : $(\Rightarrow)$ $x-y \leq b \Leftrightarrow x \leq b+y$ donc $x \in]-\infty; b+y]$.

$(\Leftarrow)$ Soit $x \in]-\infty, b+y]$; on a $x \leq b+y$ $\Big) -y$
$x-y \leq b$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 25	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

et $x \leq b+y \; +y$

$x+y \leq b+2y$ Or $2y \leq 2d$

$x+y \leq b+2d = b+(a-b) = a$

Donc $x+y \leq a$

On a bien l'équivalence.

$$\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq b+y \\ 0 \text{ si } x > b+y \end{cases}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{b+y} 1 \times \varphi(x)dx = \boxed{\Phi(b+y)}$

Pour les mêmes raisons que pour la Q.9 b)

11. (a) $A \subset \mathbb{R}^2$ qui est une partie fermée donc par cette inclusion A est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$

(b) X et Y sont chacunes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ elles ont donc la même densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'après le théorème de l'énoncé en notant f et g : φ

On a :

$P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)dx \right) \varphi(y)dy$

Or on a vu que $\forall y \geq d$: $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)dx = \Phi(a-y)$

et $\forall y \leq d$: $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)dx = \Phi(b+y)$

D'après la relation de Chasles :

$P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{d} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)dx \right) \varphi(y)dy$

$+ \int_{d}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_A(x,y)\varphi(x)dx \right) \varphi(y)dy$

On remplace alors par nos résultats des questions 9) et 10)

$P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{d} \Phi(b+y)\varphi(y)dy + \int_{d}^{+\infty} \Phi(a-y)\varphi(y)dy$

On effectue un changement de variable affine dans ces deux intégrales :

Dans celle de gauche : On pose $y = d - z$ où $d \in \mathbb{R}$

Ce changement de variable est licite car bijection strictement décroissante de coefficient directeur égal à -1.

$\frac{dy}{dz} = -1 \Leftrightarrow dy = -dz$

$$\int_{-\infty}^{d} \phi(b+y)\varphi(y)\,dy = -\int_{-\infty}^{d} -\phi(b+y)\varphi(y)\,dy$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \phi(b+d-z)\varphi(d-z)\,dz = \int_{0}^{+\infty} \phi(b+d-z)\varphi(d-z)\,dz$$

Or $b+d = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2} = c$

$$= \boxed{\int_{0}^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz}$$

Pour l'autre, on effectue un autre changement de variable :

$y = d+z$ donc $\frac{dy}{dz} = 1$

Ce changement est variable est licite pour les mêmes raisons sauf qu'ici c'est une bijection croissante.

$$\int_{d}^{+\infty} \phi(a-y)\varphi(y)\,dy = \int_{2d}^{+\infty} \phi(a-d-z)\varphi(d+z)\,dz$$

(Or $a-d = \frac{2a-a+b}{2} = \frac{a+b}{2} = c$)

$$= \int_{2d}^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d+z)\,dz \quad (\text{et } 2d = a-b)$$

$$= \int_{a-b}^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d+z)\,dz \quad \cancel{= \int_{0}^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d+z)\,dz}$$

je ne parviens pas à avoir un 0 ici. Je continue comme si...

Donc $\boxed{P((X,Y)\in A)} = \int_0^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d-z)\,dz + \int_0^{+\infty} \phi(c-z)\varphi(d+z)\,dz$

$$\boxed{= \int_0^{+\infty} (\varphi(d-z)+\varphi(d+z))\,\phi(c-z)\,dz}$$ par linéarité de l'intégrale

12. $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$

donc $\phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(t)\,dt$. On remplace dans l'intégrale :

$P((X,Y)\in A) = \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z) + \varphi(d-z))\,\phi(c-z)\,dz$

$= \int_0^{+\infty} (\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\left(\int_{-\infty}^{c-z}\varphi(t)\,dt\right) dz$

On effectue à nouveau un changement de variable :

On pose $t =$

Non abouti

13. $\forall u,v \in \mathbb{R}^2$,

$\varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} = \boxed{\frac{1}{2\pi} e^{\frac{-u^2-v^2}{2}}}$

De l'autre côté :

$\varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{(u+v)^2}{2} - \frac{(u-v)^2}{2}\right)\right)$

$= \cancel{\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+2uv+v^2-(u^2-2uv+v^2)}{2}\right)\right)} = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(2uv)\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+\cancel{2uv}+v^2+u^2-\cancel{2uv}+v^2}{2}\right)\right)$

$= \boxed{\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right)}$ On obtient bien l'égalité.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 25	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies ESCP BS/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

14. $P((X,Y)\in A)=\int_{-\infty}^{c}\left(\int_0^{+\infty}(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dz\right)dt$

Intéressons nous à l'intérieure de l'intégrale:

$(\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)$

$=\varphi(d+z)\varphi(t-z)+\varphi(d-z)\varphi(t-z)$

$=\varphi\left(\frac{d+z+t-z}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d+z-t+z}{\sqrt2}\right)+\varphi\left(\frac{d-z+t-z}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{t-z-d+z}{\sqrt2}\right)$

$=\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt2}\right)+\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)$

Donc: $\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt2}\right)dz+\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt2}\right)dz$

par linéarité de l'intégrale.

$=\varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt2}\right)dz+\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt2}\right)dz$

Or, $\Phi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{t-d}{\sqrt2}}\varphi(t)\,dt$ et $\Phi\left(\frac{t+d}{\sqrt2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{t+d}{\sqrt2}}\varphi(t)\,dt$

Par deux changements de variables dans les intégrales:

à gauche on pose $u=\frac{d-t+2z}{\sqrt2}$ où $\frac{du}{dz}=\sqrt2$.

à droite on pose : $u = \frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}$ où $\frac{du}{dz} = -\sqrt{2}$

$\star$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}\right) dt$ avec $u = \frac{d-t+2z}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{d-t}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \varphi(u)\,du \overset{\circledast}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{d-t}{\sqrt{2}}} \varphi(u)\,du = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{d-t}{\sqrt{2}}\right)}$

$\star$ $\int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt{2}}\right) dz = \frac{1}{-\sqrt{2}} \int_{\frac{d+t}{\sqrt{2}}}^{-\infty} \varphi(u)\,du$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{d+t}{\sqrt{2}}} \varphi(u)\,du = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{d+t}{\sqrt{2}}\right)}$

$\circledast$ Par un changement de variable rapide en posant $w = -u$ car $\varphi(-u) = \varphi(u)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{finalement, on a bien} \\ P((X,Y)\in A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{c} \left(\varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt{2}}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt{2}}\right)\right) dt\end{array}}$$

15.

16. On a montré que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont indépendants.

Troisième partie :

17. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ une base orthonormée.

(a)

19. (a) $\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ où $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Par stabilité $(X_1 + \dots + X_n) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,n)$

$\overline{X}(\Omega) = \mathbb{R}$ car $X_i(\Omega) = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$F_{\overline{X}}(x) = P(\overline{X} \leq x) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \leq x\right) = P(X_1 + \dots + X_n \leq nx)$

$= F_{X_1 + \dots + X_n}(nx)$

On dérive sur $\mathbb{R}$: $f_{\overline{X}}(x) = n \times f_{X_1 + \dots + X_n}(nx)$

Or $f_{X_1 + \dots + X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-x^2}{2n}}$

Donc $f_{\overline{X}}(x) = n \times \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2n}} = \boxed{\sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}}}$

18 (e) Montrons que :

R_1 et R_2 sont indépendantes $\Leftrightarrow$ $Cov(R_1, R_2) = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose R_1 et R_2 indépendantes.

Donc par définition de la covariance :

$Cov(R_1 R_2) = E(R_1 R_2) - E(R_1 R_2) = E(R_1)E(R_2) - E(R_1)E(R_2) = 0$

On a bien $\boxed{\mathrm{Cov}(R_1,R_2)=0}$

($\Leftarrow$) On suppose $\mathrm{Cov}(R_1,R_2)=0$

Donc $E(R_1R_2)=E(R_1)E(R_2)$

Donc R_1 et R_2 sont indépendants.

(b) $Y_k=\langle X,a_k\rangle$

D'après la relation 17(a) :

$$U=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{k=2}^{n}\langle X,a_k\rangle^2=\sum_{k=2}^{n}Y^2$$

Donc $\boxed{U=\sum_{k=2}^{n}Y^2}$ $a_1=\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)$ donc $\bar{x}=\frac{1}{\sqrt{n}}\langle x,a_1\rangle$

~~D'après (a), $\sum_{k=2}^{n}\langle x,a_k\rangle a_k=(x_1,\dots,x_n)-\bar{x}$~~

~~$\Leftrightarrow \bar{x}=\sum_{k=2}^{n}\langle x,a_k\rangle a_k-(x_1,\dots,x_n)$~~

~~Donc $\bar{X}=\sum_{k=2}^{n}Ya_k-X$. Non abouti~~

Donc

$\bar{X}=\frac{1}{\sqrt{n}}\langle X,a_1\rangle$

$\boxed{\bar{X}=\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1}$

(c) Comme on a exprimé $\bar{X}$ et U selon Y_k, avec $k\in[\![2,n]\!]$ pour U et Y_1 pour $\bar{X}$ et que l'énoncé nous informe que $Y_1,\dots,Y_n$ sont mutuellement indépendants, par le lemme des coalitions : $\boxed{\bar{X} \text{ et } U \text{ sont indépendants}}$

20(a) $\sigma=\frac{Z_i-\mu}{X_i}$, $V=\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 25

Session : 2025

Épreuve de : Maths 2 Appro ESCP/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\sigma X_i + \mu = Z_i$

On remplace Z_i dans l'expression de V :

$$V = \sum_{i=1}^{n} (\sigma X_i + \mu - \bar{Z})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\sigma X_i - \bar{Z})^2 + 2\mu(\sigma X_i - \bar{Z}) + \mu^2$$

$=$