Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1. $l : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto l(x)$

$x \in E$, or $B_E = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E.
Ainsi, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$$

De plus $a_0 \in E$ donc $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$a_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$$

Montrons par l'absurde qu'il existe un vecteur $a_0 \in E$ tel que $\forall x \in E$, $l(x) = \langle a_0, x \rangle_E$ et montrons qu'il est unique.

On suppose alors qu'il existe un autre vecteur, b_0 tel que $l(x) = \langle b_0, x \rangle_E$ et $b_0 \in E$. $(b_0 \neq a_0)$
Ainsi $\exists (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $b_0 = \sum_{l=1}^{p} \beta_l e_l$

On aurait donc $\langle b_0, x \rangle_E = \langle a_0, x \rangle_E$

$$\Leftrightarrow \left\langle \sum_{l=1}^{p} \beta_l e_l, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \right\rangle_E = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \right\rangle_E$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Leftrightarrow \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} \beta_l \lambda_k \langle e_l, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \lambda_k \langle e_i, e_k \rangle$

Or B_E est une base orthonormale donc $\langle e_l, e_k \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } l \neq k \\ 1 \text{ si } l = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \beta_k \lambda_k = \alpha_k \lambda_k \Leftrightarrow \boxed{\beta_k = \alpha_k}$

Donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\beta_k = \alpha_k$ entraîne $b_0 = a_0$

Donc c'est absurde car on a supposé b_0 différent.

Finalement, $\boxed{\text{le vecteur } a_0 \in E \text{ existe et il est unique.}}$

2. $\forall y \in F$, u va de E dans F donc $u(x) \in F$

3. Montrons que u^* est linéaire.
Soient $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$u^*(\lambda x + y) = z \lambda x + y$

4. Montrons que $Mat_{B_E, B_F}(u^*) = {}^tA$

On sait que $A = mat_{B_F, B_E}(u)$

* $mat_{B_E,B_F}(u^*) \underset{=}{\overset{t}{}} A$ et $mat_{B_F,B_E}(u) = A$

Or, une matrice et sa transposée <u>ont même rang</u> d'après le cours. Donc $rg(A) = rg({}^tA)$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{rg(u^*) = rg(u)}$

De plus, ${}^t({}^tA) = A$, ce qui nous permet d'affirmer

que $\boxed{(u^*)^* = u}$ par l'analyse de leurs matrices.

5. <u>$Im(u^*) \subset Ker(u)^{\perp}$</u>?

Soit $Y \in Im(u^*)$ où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$

Donc $Y = {}^tAX$

Montrons alors que ${}^tAX \in Ker(U)^{\perp}$.

~~$\langle Y, A \rangle = {}^tYA = {}^t({}^tAX)A = {}^tXA^2$~~ Soit $W \in Ker(U)$

$\langle Y, W \rangle = \langle {}^tAX, W \rangle = {}^t({}^tAX)W = {}^tXAW = 0$

car $AW = 0$ car $W \in Ker(U)$

Donc $\boxed{Y \in Ker(u)^{\perp}}$

Soit $X \in Ker(u)^\perp$
c'est-à-dire que $\forall Y \in Ker(u)$, tel que $AY=0$

alors $\langle X, Y\rangle = 0 \Leftrightarrow {}^tXY = 0 \Leftrightarrow {}^tYX = 0$

6. <u>$Ker(u) \subset Ker(u^* \circ u)$</u> ?

Soit $X \in Ker(u)$ donc $AX=0$

$\times({}^tA)$

${}^tAAX = 0$

Donc $\boxed{X \in Ker(u^* \circ u)}$

<u>$Ker(u^* \circ u) \subset Ker(u)$</u> ? Soit $X \in Ker(u^* \circ u)$ donc ${}^tAAX=0$

$\Leftrightarrow \langle A, AX\rangle = 0 \Leftrightarrow AX=0$ car $A \neq 0$ donc $\boxed{X \in Ker(u)}$

<u>D'après le théorème du rang</u> : On a $rg(u^*) = rg(u)$

u^* va de F dans E et u va de E dans F.

Donc $\dim(F) = rg(u^*) + \dim Ker(u^*)$

De plus $u^* \circ u$ va de E dans E,

Donc $\dim(E) = \dim(Im(u^* \circ u)) + \dim(Ker(u^* \circ u))$

et $\dim(E) = \dim(Im(u)) + \dim(Ker(u))$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Or, $\ker(u^* o u) = \ker(u)$ donc ils ont la même dimension.

Ce qui nous donne $\dim(\operatorname{Im}(u^* o u)) = \dim(\operatorname{Im}(u))$

Or d'après 4) $rg(u) = rg(u^*)$

Donc $rg(u^* o u) = rg(u^*)$

De plus $\operatorname{Im}(u^* o u) \subset \operatorname{Im}(u^*)$

En effet, Soit $x \in u^* o u$: $\exists y \in E$ tel que

$$x = u^* o u(y) = u^*(u(y)) \in \operatorname{Im}(u^*)$$

$$\boxed{\text{Donc } \begin{cases} \dim(\operatorname{Im}(u^* o u)) = \dim(\operatorname{Im}(u^*)) \\ \operatorname{Im}(u^* o u) \subset \operatorname{Im}(u^*) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Im}(u^* o u) = \operatorname{Im}(u^*)}$$

7. $w(x) = u^* o u(x)$

* Linéarité : Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$w(\lambda x + y) = u^* o u(\lambda x + y) = u^*(\lambda u(x) + u(y))$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

par linéarité de u.

$w(\lambda x+y) = \lambda u^* \circ u(x) + u^* \circ u(y)$ par linéarité de u^*.

$= \lambda w(x) + w(y)$

Donc w est bien linéaire.

Etudions son noyau:

Soit $x \in \ker(w)$ donc $w(x) = 0_E$

$\Leftrightarrow u^* \circ u(x) = 0_E$

On sait que $\ker(u^* \circ u) = \ker(u)$ donc $u(x) = 0_E$
${}^tAAX=0$ et $AX=0$
$\Leftrightarrow \langle A, AX\rangle = 0 \Leftrightarrow AX=0 \Leftrightarrow \langle {}^tA, X\rangle = 0 \Leftrightarrow \boxed{X=0}$

8. Soit π le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$

et $Q = \mathrm{mat}_{B_F} \pi$

(a) $B_F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

Or π est le projecteur de F sur $\mathrm{Im}(u)$

Donc $\forall x \in F$, $\pi(x) = x$ et $\forall x \in \mathrm{Im}(u)$, $\pi(x) = 0$

Ainsi, dans B_F, Q est la matrice identité

car $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\pi(f_k) = f_k$.

Donc $\underset{B_F}{\text{mat}}\,\pi = Q = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \pi(f_1) & \cdots & \pi(f_n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \end{array}$

Donc $Q = I_n$. Ainsi $\boxed{{}^tAQ = {}^tA I_n = {}^tA}$

(c) $rg(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$

Or dans le cas d'un projecteur, on a $\ker(\pi) = \operatorname{Im}(u)$

9. M inversible $\Leftrightarrow rg(A) = p$ avec $M = {}^tAA$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $rg(A) = p$

Montrons que M est inversible. $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Or M inversible $\Leftrightarrow rg(M) = p$.

Or une matrice et sa transposée ont même range donc

$rg({}^tA) = p$.

De plus, d'après 6) $\operatorname{Im}(u^* \circ u) = \operatorname{Im}(u^*)$

donc $\dim \operatorname{Im}(u^* \circ u) = \dim(\operatorname{Im} u^*)$

donc $rg(u^* \circ u) = rg(u^*)$

$\boxed{\begin{array}{ll} \text{donc} & rg({}^tAA) = rg({}^tA) = p \\ \text{donc} & rg(M) = p \end{array}}$

Comme $rg(M)=p$, M est inversible.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose M inversible.

Donc $rg(M) = rg({}^tAA) = p$

Ce qui par 6) nous donne $rg({}^tA)=p$

et donc pour les mêmes raisons (une matrice et sa transposée ont même rang) On obtient

$$\boxed{rg(A)=p}$$

10. On suppose $rg(A)=p$

(a) Donc M est bien inversible.

(b)

~~def Calcule_Q(A):~~

~~if al.matrix_rank(A)==~~

```
def Calcule_Q(A):
    n,p = np.shape(A)
    if al.matrix_rank(A)==p:
        L= np.transpose(A)
        M= np.dot(L,A)
        R= np.dot(al.inv(M),L)
        return np.dot(A,R)
    return "erreur"
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11.

Partie II :

12. $J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H)-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$

Utilisons les formules suivantes : $\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \end{cases}$

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\Big(\|A(X+H)\|^2 - 2\langle A(X+H), Y\rangle + \|Y\|^2$

$-\left(\|AX\|^2 - 2\langle AX, Y\rangle + \|Y\|^2\right)\Big)$

$= \frac{1}{2}\Big(\|AX+AH\|^2 - 2\langle A(X+H), Y\rangle + \cancel{\|Y\|^2} - \|AX\|^2 + 2\langle AX, Y\rangle$

$- \cancel{\|Y\|^2}\Big)$

$= \frac{1}{2}\Big(\cancel{\|AX\|^2} + 2\langle AX, AH\rangle + \|AH\|^2 - \cancel{2\langle AX, Y\rangle} - 2\langle AH, Y\rangle$

$- \cancel{\|AX\|^2} + \cancel{2\langle AX, Y\rangle}\Big)$

$= \frac{1}{2}\left(2\langle AX, AH\rangle + \langle AH, AH\rangle - 2\langle AH, Y\rangle\right)$

$= \langle AX, AH\rangle + \frac{1}{2}\langle AH, AH\rangle - \langle AH, Y\rangle$

$= \langle AX, AH \rangle + \frac{1}{2} \langle AH, AH \rangle - \langle AH, Y \rangle$

$= {}^t(AX)(AH) + \frac{1}{2} {}^t(AH)(AH) - {}^t(AH)Y$

$= {}^tX{}^tA\,AH + \frac{1}{2} {}^tH({}^tAA)H - {}^tH{}^tAY$

$= {}^tX MH + \frac{1}{2} {}^tH MH - {}^tH{}^tAY$

Or, $\langle D(X), H \rangle = \langle H, D(X) \rangle$ par symétrie du produit scalaire.

$= {}^tH D(X) = {}^tH(MX - {}^tAY) = {}^tHMX - {}^tH{}^tAY$

Et, $\langle AX, AH \rangle = \langle AH, AX \rangle = {}^t(AH)(AX) = {}^tH{}^tAAX = {}^tHMX$

Donc $J_0(X+H) - J_0(X) = \underbrace{{}^tHMX - {}^tH{}^tAY}_{\langle D(X), H \rangle} + \frac{1}{2} {}^tHMH$

$\boxed{\text{Finalement, } J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH}$

13. J_0 possède un minimum global $\Leftrightarrow D(X) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $D(X) = 0$

Alors $J_0(X+H) - J_0(X) = \langle 0, H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH = \frac{1}{2} {}^tHMH$

Or d'après 11), $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$

Donc comme $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $\frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$

Donc $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $J_0(X+H) \geq J_0(X)$

$\boxed{\text{Donc } J_0 \text{ possède un minimum global}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que J_0 possède un minimum global

Donc $J_0(X+H) \geq J_0(X)$

$\Leftrightarrow \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\, {}^tHMH \geq 0$

$\Leftrightarrow \langle MX - {}^tAY, H\rangle + \frac{1}{2}\, {}^tHMH \geq 0$

$\Leftrightarrow \langle MX, H\rangle - \langle {}^tAY, H\rangle + \frac{1}{2}\, {}^tHMH \geq 0$

|

14. $\ker(A)^\perp = \ker(u)^\perp$

15. $X \in S_0$

(a)

(b) ~~$\{X_0\}$~~ $X_0 \in \ker(A)^\perp$ et $D(X) = 0 \Leftrightarrow MX = {}^tAY$

Montrons que $X - X_0 \in \ker(A)$

$(X - X_0)A = XA - X_0A$

* On suppose $X \neq X_0$ et on a $(X - X_0) \in \ker(A)$

$\Leftrightarrow XA - X_0A = 0 \Leftrightarrow XA = X_0A$

(c) $rg(A)=p$, $Q = A(M)^{-1}\,{}^tA$

$AX = QY$ (15(a))

$\Leftrightarrow$ $AX = A(M)^{-1}\,{}^tAY$

Or M est inversible car $rg(A)=p$. Donc,

$$AX = A(M)^{-1}\,{}^tAY$$

$\times {}^tA$

$$MX = M(M)^{-1}\,{}^tAY$$

$\times M^{-1}$

$$\boxed{X = (M)^{-1}\,{}^tAY}$$

16. (a) ~~$T = \|A(X-U_0)\|^2 = \|AX - AU_0\|^2$~~

~~Or $AU_0 = Z - Y$ d'après l'énoncé.~~

~~Donc $T = \|AX + Z - Y\|^2$~~

$\|QZ\|^2 = \|Q(Y - AU_0)\|^2 = \|QY - QAU_0\|^2$

Or $AX = QY$ (15.a)

De plus, ${}^tAQ = {}^tA \Leftrightarrow {}^t({}^tAQ) = {}^t({}^tA)$

$\Leftrightarrow$ ${}^tQA = A$ Or Q est ~~diagonale comme montré précédemment~~ la matrice d'un projecteur orthogonal, donc ${}^tQ = Q$

$\Leftrightarrow$ $QA = A$

$$\boxed{\|QZ\|^2 = \|AX - AU_0\|^2 = \|A(X-U_0)\|^2 = T}$$

* Pour l'égalité de droite :

$\|QZ\|^2 = \langle QZ, QZ\rangle = {}^t(QZ)(QZ) = {}^tZ\,{}^tQQZ$

$= {}^tZQ^2Z = \boxed{{}^tZQZ}$ Car $Q^2 = Q$, car Q est la matrice d'un projecteur orthogonal.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

(b) $Z = {}^t(z_1, \dots, z_n)$ où $z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

```
def simuleT(A, sigma)
        Q = Calcule - Q(A) ## fonction écrite précédemment
        n,p = np.shape(Q)
        Z = rd.normal(0, sigma, n) ##vecteur (z1,...,zn)
        W = np.dot(Q, np.transpose(Z))

        return np.dot(Z, W)
```

(c)

```
def esperance (A, sigma)
        n = 100
        G = np.zeros(n)
        for k in range(n):
                G[k] = simuleT(A, sigma)

        return np.cumsum(G) / n
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

(d) Plus la matrice est grande, plus l'espérance de T augmente.

D'après le graphique lorsque sigma augmente, l'espérance de T augmente aussi. Ainsi pour $\sigma = 1$ $E(T) \approx 2$; ..., $\sigma = 5$ on a $E(T) \approx 50$ et $\sigma = 6$ on a $E(T) \approx 72$.

(e) $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$E(Z_1^2)$? D'après Koenig Huygens, $V(Z_1) = E(Z_1^2) - E(Z_1)^2$

Donc $\boxed{E(Z_1^2) = E(Z_1)^2 + V(Z_1) = \sigma^2}$

(f) Montrons que $T = T_1 + 2 T_2$

$T = {}^tZ Q Z$ où $Z = {}^t(Z_1, \dots, Z_n)$
et ${}^tZ = (Z_1, \dots, Z_n)$

On note les coefficients de $Q \Rightarrow Q_{i,j}$.

$$QZ = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,1} & \cdots & Q_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} Q_{1,k} Z_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} Z_k \end{pmatrix}$$

$${}^tZQZ = (Z_1, \dots, Z_n) \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} Q_{1,k} Z_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} Z_k \end{pmatrix}$$

$= z_1 \sum_{k=1}^{n} Q_{1,k} z_k + \dots + z_n \sum_{k=1}^{n} Q_{n,k} z_k$

$\cancel{= \sum_{j=1}^{n} Q_{j,k} z_k z_j}$ On change les variables muettes j et k : $\begin{cases} j = i \\ k = j \end{cases}$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Q_{j,k} z_k z_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j$

On sépare la somme lorsque $i = j$ et $i \neq j$

$${}^tZQZ = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} Q_{i,j} z_i z_j$$

$${}^tZQZ = T = T_1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i-1} Q_{i,j} z_i z_j + \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j \right)$$

Or Q est symétrique car ${}^tQ = Q$ car matrice d'un projecteur orthogonale. Alors $Q_{i,j} = Q_{j,i}$

~~Donc~~ $\cancel{\sum_{j=1}^{i-1} Q_{i,j} z_i z_j = \sum_{j=i+1}^{n} Q_{j,i} z_i z_j}$

Donc $\boxed{T = T_1 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j}$

Car $\sum_{j=1}^{i-1} Q_{i,j} z_i z_j = \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j$ $({}^tQ = Q)$

$*E(T) = E(T_1 + 2T_2) = E(T_1) + 2E(T_2)$ par linéarité de l'espérance.

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2\right) + 2E\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j\right)$$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} E(z_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} E(z_i z_j)$ par linéarité de l'espérance

Or $E(Z_i^2) = V(Z_i) + E(Z_i)^2 = \sigma^2$

Et $E(Z_iZ_j) = E(Z_i)E(Z_j)$ car les Z_K sont indépendantes

$E(Z_iZ_j) = 0$

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\sigma^2 = \boxed{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}}$$

L'espérance est donc bien croissante si σ est plus grand.

(g) $E(T_1T_2) = E\left(\left(\sum_{l=1}^{n} Q_{l,l} Z_l^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} z_i z_j\right)\right)$

$= E\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} (Q_{l,l} Z_l^2 Q_{i,j} z_i z_j\right)$

$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{l,l} Q_{i,j} E(Z_l^2 z_i z_j)$ par linéarité de l'espérance.

$\forall l \neq i$ et $l \neq j$, $E(Z_l^2 z_i z_j) = E(Z_l^2)E(z_i z_j)$ par indépendance des Z_K.

$= \sigma^2 \times \underbrace{E(Z_i)}_{0}\underbrace{E(Z_j)}_{0} = 0$

* Si $l = i$ et $l \neq j$ $E(Z_i^3 Z_j) = E(Z_i^3)\underbrace{E(Z_j)}_{0} = 0$ par le lemme des coalitions

* De même si $l = j$ et $l \neq i$.

On ne peut pas avoir $l = i$ et $l = j$ en même temps car $j \geq i+1$.

Donc $\boxed{E(T_1T_2) = 0, \text{ dans tous les cas}}$

(h)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Partie III :

17. $\frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t-0}$ est le taux d'accroissement

de la fonction $\|u+tv\|$ en 0.

Ce taux tend lorsque $t \to 0$, vers sa dérivée en 0.

$\|u+tv\|^2 = \cancel{\langle u+tv, u+tv\rangle} = \|u\|^2 + 2\langle u, tv\rangle + \|tv\|^2$

$\|u+tv\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, tv\rangle + |t|^2\|v\|^2$

$\|u+tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + |t|^2\|v\|^2$

Donc $\|u+tv\| = \sqrt{\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + |t|^2\|v\|^2}$

Dérivons alors cette fonction $t \mapsto \|u+tv\|$ qu'on appelle g.

$g'(t) = \frac{1}{2} \times (\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + t\|v\|^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2\langle u,v\rangle + 2|t|\|v\|^2)$

$$g'(t) = \frac{2(\langle u,v\rangle + |t|\|v\|^2)}{2\sqrt{\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + t\|v\|^2}}$$

Or $g'(0) = \frac{\langle u,v\rangle}{\sqrt{\|u\|^2}} = \frac{\langle u,v\rangle}{|\|u\||} = \boxed{\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}}$

car la norme est strictement positive car $u \neq 0$.

18. $J(X_0) \leq J(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

~~Ceci est vrai pour tout BX_0~~

~~Donc $J(X_0) \leq J(BX_0)$~~

$J(X_0) = \frac{1}{2}\|AX_0 - Y\|^2 + \|BX_0\|$

$D(X_0) = MX_0 - {}^tAY = {}^tAAX_0 - {}^tAY = {}^tA(AX_0 - Y)$

19. (a) $\forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$\langle D(X_0), H\rangle$

(b)

20. (a)

Partons de la gauche de l'égalité :

$$\|u+v\|^2 - \left(\|v\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - \left(\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2\right)$$

$$= \cancel{\|u\|^2} + \cancel{2\langle u,v\rangle} + \|v\|^2 - \cancel{\|u\|^2} - \cancel{2\langle u,v\rangle} - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \boxed{\frac{\|v\|^2\|u\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$$

(b) D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Donc $\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$

Ainsi $\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 \geq 0$

Et donc $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\|u+v\| + \|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\left(\|u+v\| - \|u\| - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \|u+v\| - \|u\| - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} \geq 0$ car la parenthèse de gauche est positive.

$\Leftrightarrow \boxed{\|u+v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}}$

21 (a)

(a) $J(X) - J(X_0) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \|BX\| - \left(\frac{1}{2}\|AX_0 - Y\|^2 + \|BX_0\|\right)$

$$= \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX_0 - Y\|^2 + \underbrace{\|BX\| - \|BX_0\|}_{\geq \langle W, X - X_0 \rangle}$$

Or,

~~$\langle D(X_0), X - X_0 \rangle$~~

23. (d)

i)

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):
    S=0
    n= np.len(Y)
    for k in range(n):
        num = (alpha[k]**2)*(Y[k]**2)
        den = (lda +alpha[k]**2)**2
        S = S+ num/den

    return -1 +S
```

ii)

K=0

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon)
    U= 1/4* Y[0]**2
    P = Y[0]**2 / alpha[0]**2  ## P(Y)
    while P>1 and U> epsilon:
        K=K+1
        P = P+ Y[K]**2 /(alpha[K]**2)
        U = U+ 1/4Y[K]**2
    return U
```