Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 31

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1.

1 - a)

on pose $P(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = O_2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1/9 \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 4/3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/9 & 4/3 \\ 4/27 & 5/9 \end{pmatrix}$$

on obtient : $A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I_2$

$$= \begin{pmatrix} 5/9 & 4/3 \\ 4/27 & 5/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/9 & 4/3 \\ 4/27 & 8/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$= \boxed{0_2}$

Donc $X^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ est un polynome annulateur de A.

b) On a $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ un polynôme annulateur de A. Donc les valeurs propres possibles de A sont les racines du polynôme.

<u>étude des racines du polynôme.</u>

$\Delta = \frac{16}{9} - 4\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{16}{9} - \frac{4}{3}$

$= \frac{4}{9} > 0$

$\Delta > 0$ donc le polynôme possède deux racines distinctes que l'on note δ_1 et δ_2 et de sorte que :

$\delta_1 = \frac{\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}}}{2} = \frac{4/3 + 2/3}{2} = \underline{1}$

$\delta_2 = \frac{\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{9}}}{2} = \frac{4/3 - 2/3}{2} = \underline{\frac{1}{3}}$

Ainsi : $\boxed{sp(A) \in \{ 1/3 ; 1 \}}$

c)

$$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3 & 1\\1/9 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{1 \times \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

$$A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3 & 1\\1/9 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1/3\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $1/3$.

2.

a)

$$Pq = \begin{pmatrix}3 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$$

$$= \boxed{6 I_2}$$

b)

$$Pq = 6 I_2$$

$$\Leftrightarrow P \frac{1}{6} q = I_2$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6} q$

on obtient : $P^{-1} = \underline{\begin{pmatrix}1/6 & 1/2\\1/6 & -1/2\end{pmatrix}}$

c)

$$AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

On a : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible et : $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que :

$$AP = PD$$
$$\Rightarrow A = PDP^{-1}$$

Donc par définition A est diagonalisable.

d) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$A^n = PD^nP^{-1}$

<u>Initialisation :</u> $n = 0$

$A^0 = I_2$

$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$

Donc la proposition est vraie au rang 0.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 31	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Hérédité :

On suppose que la proposition est vraie pour un rang n fixé. Montrons qu'elle est vraie au rang n+1

d'après l'hypothèse de récurrence :

$A^n = PD^nP^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^nP^{-1}(A)$

$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$ (d'après 2c)

$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^nDP^{-1}$

$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Ce qui prouve l'hérédité. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$A^n = PDP^{-1}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c)

D est une matrice diagonale donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3^n \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3^{n-1}} \\ 1 & -\frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1/3^{n-1} \\ 1 & -\frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{3^{n-1}} & 9 - \frac{1}{3^{n-2}} \\ 1 - \frac{1}{3^n} & 3 + \frac{1}{3^{n-1}} \end{pmatrix}}$$

$=$

3- a)

$$A X_n = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3\, u_n + v_n \\ 1/9\, u_n + 2/3\, v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{X_{n+1}}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ A X_n = X_{n+1}$

b)

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

<u>Initialisation</u> : $n = 0$

$A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$

La proposition est vrai au rang 0.

<u>Hérédité</u>

On suppose que $X_n = A^n X_0$ pour un certain rang rang fixé.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$X_n = A^n X_0$

$\Leftrightarrow A X_n = A^{n+1} X_0$

$\Leftrightarrow X_{n+1} = A^{n+1} X_0$ (d'après 3 a)

a qui prouve l'hérédité.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

c)
On a : $X_n = A^n X_0$.

$$A^n X_0 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 + \frac{1}{3^{n-1}} & 9 - \frac{1}{3^{n-2}} \\ 1 - \frac{1}{3^n} & 3 + \frac{1}{3^{n-2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} U_0\left(3 + \frac{1}{3^{n-1}}\right) + V_0\left(9 - \frac{1}{3^{n-2}}\right) \\ U_0\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + V_0\left(3 + \frac{1}{3^{n-2}}\right) \end{pmatrix}$$

par identification:

$$U_n = \frac{1}{6}\left(U_0\left(3 + \frac{1}{3^{n-1}}\right) + V_0\left(9 - \frac{1}{3^{n-2}}\right)\right)$$

$$V_n = \frac{1}{6}U_0\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6}V_0\left(3 + \frac{1}{3^{n-2}}\right).$$

d) La taille de la population à un certain temps n est donnée par $(V_n + U_n)$

Ainsi, la taille de la population après un temps très long est donnée par:

$$\lim_{n \to +\infty} V_n + U_n.$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 31

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques ESCP.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}U_0\left(3+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\frac{1}{6}V_0\left(9-\frac{1}{3^{n-2}}\right)$$

$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ donc $\frac{1}{3^n} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \boxed{\frac{1}{2}U_0 + 3/2\, V_0}$$

De manière analogue :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \boxed{\frac{1}{6}U_0 + \frac{1}{2}V_0}$$

Ainsi, la taille de la population tend vers :

$$\frac{1}{2}U_0 + 3/2\, V_0 + \frac{1}{6}U_0 + 1/2\, V_0$$

$$= \frac{2}{3}U_0 + 2V_0$$

Or : $(U_0, V_0) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ donc : $\frac{2}{3}U_0 + 2V_0 > 0$

Ainsi la taille de la population tend vers un réel strictement positif. Il y a donc un équi-

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

-libre entre les naissances et les décès. (les deux types de population sont à l'équilibre).

4.

a)

b)

Partie II.

5. a)

$W_{n+1} = r(W_n) + W_n$

$\Leftrightarrow W_{n+1} = (r+1) W_n.$

on reconnait une suite géométrique de paramètre $(r+1)$.

on obtient donc :

$\boxed{W_n = W_0 (r+1)^n}$

b) Une population ne peut avoir une taille négative. or si $r < -1$ alors :

$W_{n+1} < 0$ ce qui est absurde.

c) on a :

$$W_{n+1} = (r+1)\,W_n.$$

en passant par la limite, on obtient : (en supposant que W_n converge vers l :

$$l = l\,(r+1).$$

...

6-

a)

i- $f(x) = 0$

$$\iff \quad a x \left(1 - \frac{1}{B} x\right) = 0$$

$f(x)=0$ possède deux solutions : $\underline{\{0 ; B\}}$ sur $\mathbb{R}_+$

* ~~Je n'arrive pas à savoir si~~

ii.

f est dérivable d'après les théorèmes généraux et :

$$f'(x) = a\left(1 - \frac{1}{B}x\right) + \left(-\frac{1}{B}\right)a x$$

$$= a - \frac{a}{B}x - \frac{1}{B}a x$$

$$= a - \frac{2ax}{B}$$

$$= \frac{aB - 2ax}{B}$$

$$= \boxed{\frac{a(B-2x)}{B}}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

le signe de $f'(x)$ est donc celui de $B - 2x$

Ainsi : $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [B/2 ; +\infty[$

$f'(x) \geq 0 \quad . \forall x \in [0 ; B/2]$.

on obtient le tableau qui suit :

x	0		$B/2$		B		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

+ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax - \frac{ax^2}{B}$

$= \boxed{-\infty}$

b) i.

• $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = -x$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0}$

• $g(x) = x$

$\Leftrightarrow \quad x + f(x) = x$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 31

Session : 2025.

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\Leftrightarrow x = \boxed{\{0 ; B\}}$.

$g(x) = B$

$\Leftrightarrow x + f(x) = B$

$\Leftrightarrow f(x) = B - x$

$\Leftrightarrow \boxed{x = B}$

ii.

D'abord :

$$B - \frac{(a+1)B}{2a}$$

$$= \frac{2B - (a+1)B}{2a}$$

$$= \frac{B(2a - a - 1)}{2a}$$

$$= \frac{B(a-1)}{2a}$$

Or : $a \in]0;1[$ donc : $\frac{B(a-1)}{2a} < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{B < \frac{(a+1)B}{2a}}$

De plus :

$$(a+1)B < 2B$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)B}{2a} \leq \frac{2B}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)B}{2a} < \frac{B}{a}$$

D'où : $\boxed{B < \frac{(a+1)B}{2a} < \frac{B}{a}}$

Enfin : $B < (a+1)B$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{a} < \frac{(a+1)B}{a}$$

donc : $\boxed{B < \frac{(a+1)B}{2a} < \frac{B}{a} < \frac{(a+1)B}{a}.}$

iii.

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

$$= \frac{a(B-2x)}{B} + 1$$

$$= \frac{a(B-2x)+B}{B}$$

$$= \boxed{\frac{B(a+1)-2x}{B}.}$$

$g'(x)$ est du signe de $B(a+1) - 2x$

$B(a+1) - 2x \leq 0 \quad \forall x \in [\frac{B(a+1)}{2} ; +\infty[$

$B(a+1) - 2x \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty ; \frac{B(a+1)}{2}]$

donc : $g'(x) \leq 0$ sur $[\frac{B(a+1)}{2} ; +\infty[$

$g'(x) \geq 0$ sur $]0 ; \frac{B(a+1)}{2}]$.

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left((a+1)x - \frac{a x^2}{B} \right)$$

$$= \underline{-\infty}$$

On obtient :

x	0	B	$\frac{B(a+1)}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		0	$-$
$g(x)$	0 ↗	B ↗		↘ $-\infty$

c) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $W_n \in [0, B]$.

<u>Initialisation</u> : $n = 1$.

$W_0 \in]0 ; B[$

$\Leftrightarrow \quad 0 < W_0 < B$

$\Rightarrow \quad g(0) < g(W_0) < g(B)$ par croissance de g sur $[0 ; B]$.

$\Rightarrow \quad 0 < W_1 < B$

$\Rightarrow \quad 0 < W_1 < B$

La proposition est donc vraie ~~aussi~~ pour $n=1$.

Hérédité

on suppose que : $W_n \in]0;B]$ pour un certain rang n fixé.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$0 < W_n \leq B$

$\Leftrightarrow g(0) < g(W_n) \leq g(B)$

$\Leftrightarrow 0 \leq W_{n+1} \leq B$

ce qui prouve l'hérédité. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $W_n \in]0;B]$.

ii.

$$f(W_n) = a W_n \left(1 - \frac{1}{B}\right) W_n$$

or : $\forall x \in [0;B]$, f est minorée par 0
donc, si $(W_n) \in [0;B]$ alors : $f(W_n) \geq 0$

Ainsi :

$$W_{n+1} - W_n = f(W_n) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow W_{n+1} - W_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow W_{n+1} \geq W_n$$

Donc $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 31 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

iii. (w_n) est croissante et majorée par B donc elle converge vers une limite finie notée l.

iv. w_n est croissante donc elle est minorée par w_0. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n \geq w_0$$

v. $w_{n+1} = w_n + f(w_n)$

en passant par la limite en $+\infty$.

$$l = l + f(l).$$

$$\iff \quad f(l) = l$$

L'équation a deux solutions $(0 ; B)$ or. Or, $l \geq w_0 > 0$ donc $l = B$.

Ainsi : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = B.}$

d) i.

$g\left(\cancel{\frac{(a+1)B}{2a}}\right)$

J'admets que $g\left(\frac{(a+1)B}{2a}\right) < \frac{B}{a}$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_n \in [B ; B/a]$.

Initialisation : $n=0$.

$u_0 \in [B ; B/a]$.

La proposition est vraie pour $n=0$.

Hérédité

D'après l'hypothèse de récurrence..

$B < u_n \leq B/a \leq \frac{B(a+1)}{2} \leq \frac{B(a+1)}{2a}$

$\Leftrightarrow$ $g(B) < g(u_n) \leq$

J'admets.

Exercice 2.

1 - a)

```
if position [j] < bille :
        position [j+1] = j+1
~~if position [j] > bille :~~
else :
        position [j+1] = j-1.

Return (position [j+1]).
```

b)

c)

2 -

$X_0 = 0$.

Il y a n billes dans l'urne numérotées de 1 à n. Ainsi tous les numéros sont supérieurs à 0 de sorte que l'on est sur que le pion avance d'une case.

Ainsi : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$ / $P(X_1 = 1) = 1$, $E(X_1) = 1$

3 -

On sait qu'à l'instant 1 le pion est à la case 1.

On obtient : $X_2(\Omega) = \{0 ; 2\}$.

$P(X = 2) = \frac{n-1}{n}$

$P(X = 0) = \frac{1}{n}$.

Ainsi :

$$E(X_2) = \boxed{\frac{2n-2}{n}}$$

4_ on a $k \geq n$

5_ ~~$P(X_{k+1}=0)$~~

on a $(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3), \dots, (X_k = n)$ un système complet d'événements associé à $(X_{k+1} = 0)$. Donc d'après la formule des probabilités totales.

$$P(X_{k+1} = 0) = \sum_{i=0}^{n} p(X_{k+1} = 0 \cap X_k = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} p_{X_k = i}(X_{k+1} = 0)\, P(X_k = i)$$

or. on ne peut avoir l'événement $X_{k+1} = 0$ que si l'événement $X_k = 1$ est réalisé.

$$= p(X_k = 1)\, p_{X_k = i}(X_{k+1} = 0)$$

or la probabilité d'obtenir une boule dont le numéro est inférieure à 1 est $\frac{1}{n}$

$$= \frac{1}{n} P(X_k = 1).$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 31 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

De manière similaire :

$$p(X_{k+1} = n) = \sum_{i=0}^{\sim} p(X_k = i \cap X_{k+1} = n)$$

$$= p(X_k = n-1)\, p_{X_k = n-1}(X_{k+1} = n)$$

pour avoir une boule supérieure à $n-1$, il n'y a qu'une possibilité. donc.

$$= p(X_k = n-1)\, \frac{1}{n}.$$

6 _

a)

$$p_{X_k = l-1}(X_k = l) = \frac{n-l+1}{n}$$

il y $n-l+1$ boules qui ~~sont~~ ont un numéro qui est supérieur à $l-1$.

$$p_{X_k = l+1}(X_k = l) = \frac{l+1}{n}.$$

Il y $l+1$ boules qui sont inférieures ou égales à $l+1$.

c) on a : $(X_k = l-1)$, $(X_k = l+1)$ un système complet d'événements associé à X_{k+1}. D'après la formule des probabilités totales.

$$P(X_{k+1} = l) = P(X_k = l-1 \cap X_{k+1} = l \cup X_k = l+1 \cap X_{k+1} = l)$$

$$= P(X_k = l-1 \cap X_{k+1} = l) + P(X_k = l+1)p(X_{k+1} = l)$$

$$= p(X_k = l-1)P(X_{k+1} = l) + P(X_k = l+1)p(X_{k+1} = l)$$

$$= \underline{\frac{n-l+1}{n} p(X_k = l-1) + \frac{l+1}{n} P(X_k = l+1).}$$

7 -

$$E(X_{k+1}) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{n-l+1}{n}(l)p(X_k = l-1) + l\left(\frac{l+1}{n}\right) p(X_k = l+1)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{n-l+1}{n}\right) l\, p(X_k = l-1) + \sum_{l=1}^{n-1} l\left(\frac{l+1}{n} p(X_k = l+1)\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{n-l+1}{n}\right) l\, P(X_k = l-1) + \sum_{l=2}^{n} \frac{l}{n}(l-1)P(X_k = l)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\left(1 - \frac{l+1}{n}\right)(l)\, P(X_k = l-1) + \sum_{l=2}^{n} \frac{(l-1)}{n} l\, P(X_k = l)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} l\, P(X_k = l-1) - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{l(l+1)}{n} P(X_k = l-1)$$

$$+ \sum_{l=2}^{n} \frac{(l-1)}{n} l\, P(X_k = l)$$

$E(X_{k+1})$

$$= \sum_{l=0}^{n} l \left(\frac{n-l+1}{n} p(X_k = l-1) + \frac{l+1}{n} P(X_k = l+1) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} l \left((n-l+1) p(X_k = l-1) + \frac{l+1}{\cancel{n}} p(X_k = l+1) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l+1) P(X_k = l-1) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{l}{n} (l+1) P(X_k = l+1)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} l(n-l+1) P(X_k = l-1) + \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n} l P(X_k = l)$$

= J'admets par manque de temps.

8.

a) Soit $E(X_{k+1}) = 1 + \left(1 + \frac{2}{n}\right) E(X_k)$.

la suite $E(X_n)_{n \geq n}$ suit une loi arithmético-géométrique.

b)

$$x = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) x$$

$$\iff x - \left(1 - \frac{2}{n}\right) x = 1$$

$$\iff x + \frac{2}{n} x - x = 1$$

$$\iff \underline{x = \frac{n}{2}}$$

c)

$$x_{k+1} = E(X_{k+1}) - x$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k) - x$$

$$= (1 - x) + E(X_k) - \frac{2}{n} E(X_k).$$

= on pose : $x = \frac{n}{2}$

$$= \left(1 - \frac{n}{2}\right) + E(X_k) - \frac{2}{n} E(X_k)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)($$

$$x_{k+1} = E(X_{k+1}) - x$$

$$= 1 - x + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k)$$

Soit $x = \frac{n}{2}$

$$= 1 - \frac{n}{2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{n}{2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k)$$

d) Soit $(E(X_n))$ une suite arithmético-géométrique de forme : $E(X_{n+1}) = a E(X_n) + b$.

$$E(X_n) = a^{n-m}\left(E(X_m) - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-m}\left(E(X_m) - \frac{1}{1-1+\frac{2}{n}}\right) + \frac{1}{1-1+\frac{2}{n}}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-m}\left(E(X_m) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}.$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 31	Session : 2025.

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi :
$$E(X_k) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-n}\left(E(X_n) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}.$$

9-

$$\lim_{k \to +\infty} E(X_k)$$
$$= \lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-n}\left(E(X_n) - \frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}.$$

$\left|1 - \frac{2}{n}\right| < 1$ d'où $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-n}\left(E(X_n) - \frac{n}{2}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Ainsi :
$$\lim_{k \to +\infty} E(X_k) = \frac{n}{2}.$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice n° 3.

Partie 1.

1. Montrons que f_0 peut être considérée comme une densité de probabilité.

→ La positivité.

$\forall t \in [0;1]$, $f_0(t) = (a+1)t^a$

or $a > 1$, $t^a > 0$ donc $f_0(t) \geq 0$ sur $[0;1]$.

$\forall t \notin [0;1]$, $f_0(t) = 0 \geq 0$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_0(t) \geq 0$.

→ La continuité

f_0 semble continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0 et 1.

or : . $\lim_{t \to 0^-} f_0(t) = 0$

. $\lim_{t \to 0^+} f_0(t) = 0$

. $\lim_{t \to 1^-} f_0(t) = (a+1)$

. $\lim_{t \to 1^+} f_0(t) = 0$

Donc f_0 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

→ La convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f_0(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (a+1)\,t^a\,dt$$

$$= (a+1)\int_0^1 t^a\,dt$$

$$= (a+1)\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1$$

$$= a+1\left(\frac{1}{a+1} - 0\right)$$

$$= 1$$

Donc f_0 peut être considérée comme une densité de probabilité.

2_

a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a < b$. f est dérivable sur le segment $[a,b]$. si - .

~~On. (a~~ ;

on pose $f(t) = (a+1)t$

or . f est dérivable sur $[0;1]$.

$f_0(t)$ est dérivable sur $[0;1]$.

De plus : $f_0'(t) = a(a+1)t^{a-1}$.

$$\lim_{t \to 0} f_0'(t) = 0$$

$$\lim_{t \to 1} f_0'(t) = a(a+1)$$

donc f_0 respecte les conditions pour être dérivable sur un segment ~~a, b~~ $[0;1]$.

b) $$f_0\, a^n = \begin{cases} (a+1)t^a a^n & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (t^a a + t^a)a^n & \text{si } t \in [0;1]. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t^a a^{n+1} + t^a a^n & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \Big\{$$

$\rightarrow$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285.
Nombre de pages : 31
Session : 2025
Épreuve de : Mathématiques.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$f_n = a^n f_0$

Initialisation : $n=0$

$a^0 f_0 = f_0$. La proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité
D'après l'hypothèse de récurrence.

$f_n(t) = a^n f_0(t)$ si $t \in [0;1]$ et 0 sinon.

$\Leftrightarrow a f_n(t) = a^{n+1} f_0(t)$

$\Leftrightarrow$

c) $f_n = a^n f_0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^n} f_n = f_0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, en posant $c_n = \frac{1}{a^n}$ on obtient $c_n f_n$ une densité.

d) $c_n f_n = \frac{1}{a^n} f_n = f_0$

donc $\frac{1}{a^n} f_n = f_0$.

3.

$\forall x \leq 0$.

$$F_{X_a}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0\, dt$$

$$= 0$$

$\forall x \in]0; 1]$.

$$F_{X_a}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{x} (a+1)\, t^a\, dt$$

$$= (a+1) \left[\frac{t^{a+1}}{a+1} \right]$$

$$= (a+1) \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

$$= x^{a+1}$$

$\forall x \geq 1.$

$$F_{X_\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\alpha(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f_\alpha(t)\,dt + \int_{0}^{1} f_\alpha(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} f_\alpha(t)\,dt$$

$$= 1$$

Ainsi :

$$F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\alpha+1} & \text{si } x \in [0,1]. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

4_

$$V(X_\alpha) = E(X_\alpha^2) - E(X_\alpha)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\alpha(t)\,dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_\alpha(t)\,dt\right)^2.$$

$$= \int_{0}^{1} t^{\alpha+2}(a+1)\,dt - \left(a+1\int_{0}^{1} t^{\alpha+1}\,dt\right)^2$$

$$= (a+1)\left[\frac{1}{\alpha+3}\right] - \left((\alpha+1)\ \frac{1}{\alpha+2}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+3} - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^2$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^2 - (\alpha+1)^2(\alpha+3)}{(\alpha+3)(\alpha+2)^2}.$$

$$= \frac{(s+1)(s^2+4s+4) - (s^2+2s+1)(s+3)}{(s+3)(s+2)^2}$$

$$= \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + s^2 + 4s + 4 - s^3 - 3s^2 - 2s^2 - 6s - s - 3}{(s+3)(s+2)^2}$$

$$= \frac{5s^2 - 3s^2 - 2s^2 + s + 1}{(s+3)(s+2)^2}$$

$$= \frac{s+1}{(s+3)(s+2)^2}.$$

Partie 2.

5. Cherchons c_0 tel que f_0 est une densité.

→ La positivité
$\forall t \in [0;1].\ f_0(t) = e^t \geq 0$
$\forall t \notin [0,1].\ f_0(t) = 0 \geq 0.$

→ La continuité.
f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1 et 0 où elle admet des limites finies à droite et à gauche.

elle est donc continue par morceaux.

→ La convergence..

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,dt = \int_0^1 e^t\,dt.$$
$$= e - 1.$$

donc $c_0 f_0$ est une densité si $c_0 = \frac{1}{e-1}.$