Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 **Nombre de pages :** 28 **Session :** 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

1.a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ~~et~~ en effet, $x \mapsto x$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

On sait que $\ln x \geq 1$ $\forall x \geq e$ donc comme $x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

On a

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$			0		
g	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

par produit de limites $\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Soit $k \geq 3$ entier

On a $k \geq e$ et donc $k+1 \geq e$

Donc comme $k+1 \geq k$, par décroissance de g sur $[e;+\infty[$

On a $g(k+1) \leq g(k)$ donc $\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln k}{k}$ $\forall k \geq 3$

donc $\boxed{(g(k))_{k \geq 3} \text{ est décroissante}}$

non décroissante

2.a) Soit $x \in]n;+\infty[$

On a $n < x$ donc ~~$n < x$~~ $x - n > 0$

~~$n < x$~~

donc $x \mapsto \ln(x-n)$ est dérivable sur $]n;+\infty[$ et ~~$\forall x \geq n$ $x > 0$ donc $\ln$~~

~~$f_n'(x) =$~~ $\ln$ est dérivable sur $]n;+\infty[$ car $n > 0$

Donc f_n est dérivable comme produit, puis somme de fonctions dérivables sur $]n;+\infty[$ et $\forall x > n$

$$\boxed{f_n'(x) = \ln x + \frac{(x-n)}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}}$$

b) ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa courbe est en dessous de ses tangentes, donc en dessous de sa tangente en $x=1$ d'équation

$$y = \ln'(1)(x-1)+\ln(1)$$
$$= x-1$$

$\boxed{\text{Donc on a } \ln(t) \leq t-1 \quad \forall t>0}$

On a pour $x \in]n;+\infty[$

$$f_n'(x) = \ln x + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n}$$

~~$= \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \left(\frac{x}{x-n} - 1\right) - \frac{n}{x}$~~

Or $\frac{x}{x-n} > 0$ pour $x \in]n;+\infty[$

Donc $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leq \frac{x}{x-n} - 1$ donc $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + 1 \leq 0$

et comme $0<n<x$ donc $0<\frac{n}{x}$ donc $-\frac{n}{x}<0$

donc $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + 1 - \frac{n}{x} < 0$ (stricte car $-\frac{n}{x}<0$)

strictement

donc $\boxed{f_n'(x) \leq 0 \text{ donc } f_n \text{ est décroissante sur }]n;+\infty[}$

Soit $n \geq 1$

c) f_n est strictement décroissante sur $]n;+\infty[$ et continue sur $]n;+\infty[$ qui est un intervalle ~~donc f_n est bijective~~ donc comme $[n+1;n+2] \subset]n;+\infty[$

f_n est strictement décroissante et continue sur $[n+1;n+2]$ qui est un

intervalle donc f_n est bijective de $[n+1; n+2]$ dans ~~$[\ln(n+1); 2\ln(n+2)-(n+2)\ln 2]$~~
$[2\ln(n+2)-(n+2)\ln 2 ; \ln n+1]$

~~donc $f_n(x)=0$~~ Posons $I = [2\ln(n+2) - (n+2)\ln 2 ; \ln n+1]$

Comme $n \geq 2$, $n+2 \geq 4$ donc d'après 2.b)

$$\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln 2}{2} \text{ d'où } 2\ln(n+2) - (n+2)\ln 2 \leq 0$$

donc on a $0 \in I$ (car $\ln(n+1) \geq 0$)

donc l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution sur $[n+1; n+2]$

Soit $n \geq 2$

3. $x_n \in [n+1; n+2]$ donc $n+1 \leq x_n \leq n+2$

donc $\frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$ ~~or car $\frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $\frac{n+2}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$~~

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n} = 1$

donc par encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = 1 \text{ donc } x_n \underset{+\infty}{\sim} n$$

4.a) En utilisant $f_n(x_n)=0$

On a $\forall n \geq 2$ $(x_n - n)\ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n) = 0$

Donc comme $x_n > 0$ ($x_n \in [n+1; n+2]$) on a

$$\ln(x_n - n) = \frac{(x_n - n)\ln(x_n)}{x_n}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) $x_n \sim n$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y}$ par composition

$= 0$ par croissance comparée

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$

J'admets que $\lim_{n\to+\infty} x_n - n = 1$

~~8~~

5. a) ~~Soit~~ $\lim_{n\to+\infty} x_n - n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} x_n - n - 1 = 0$

donc $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

J'admets que $\ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

b) On a $\ln(1+n+\ln) \sim \ln n$

Soit $\ln(x_n) \sim \ln n$ <u>recherché</u>

6. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$ pour $n \geq 3$ $\ln n \geq 1$

donc $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$

Or $\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc comme

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 3}$ et $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ sont à <u>termes positifs</u>, par critère de comparaison

$\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$ diverge donc par critère d'équivalence $\boxed{\sum_{n\geq 3} u_n \text{ diverge}}$

(donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge)

$u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$ par exponentiation

Or, $\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées donc $\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o(1)$

donc $\frac{\ln^2 n}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ or $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)_{n\geq 2}$ et $\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)_{n\geq 2}$ sont à termes positifs et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (serie de Riemann cv. $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

donc par critère $\sum_{n\geq 2} a_n \frac{\ln^2 n}{n^2}$ converge puis par critère d'équivalence

$\boxed{\sum_{n\geq 2} a_n^2 \text{ converge}}$

Exercice 2

1.a) Soit $x \in E$

il existe un unique couple $(y,z) \in F \times F^{\perp}$ tel que

$x = y + z$ ~~on~~ et on a $p(x) = y$

et $\forall (a,b) \in E^2 \ \langle p(a), b\rangle = \langle a, p(b)\rangle$

donc $\langle p^2(x), p(x)\rangle = \langle p(x), x\rangle$ donc $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$ par linéarité

b) Soit $x \in E$

$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 + 2\langle x - p(x), p(x)\rangle$

~~Or $2\langle x - p(x), p(x)\rangle = 2(\langle x - p(x)$~~

~~$= 2(\langle x, p(x)\rangle - \langle p(x), p(x)\rangle)$~~

Or $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$

~~et p(x)~~ donc $x - p(x) \in \underset{F^{\perp}}{\operatorname{Ker} p}$ et $p(x) \in \underset{F}{\operatorname{Im} p}$

donc

~~$2\langle x,$~~ $2(\langle x - p(x), p(x)\rangle) = 0$

$\boxed{\text{Ainsi, } \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2}$

c) Soit $x \in E / \|p(x)\| = \|x\|$

alors $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2$ donc $\|x-p(x)\|^2 = 0$ d'après b)

Donc $\|x-p(x)\| = 0$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$

donc $x - p(x) = 0$ donc $x = p(x) \in F$ donc $x \in F$

Ainsi, par double inclusion avec a), $\boxed{F = \{x \in E / \|p(x)\| = \|x\|\}}$

d) pour $x \in E$ $\|x-p(x)\|^2 \geq 0$

donc $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$

et par injectivité de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ $\boxed{\|x\| \geq \|p(x)\|}$

2.a) Soit $x \in F_1 \cap F_2$

~~alors $\|x\| = \|p_1(x)\| = \|p_2(x)\|$~~

$x \in F_1$ donc $\exists y \in E / x = p_1(y)$

$x \in F_2$ donc $\exists z \in E / x = p_2(z)$

donc $p_1(y) = p_2(z)$ donc $p_1(p_1(y)) = p_1(p_2(z))$

donc $\underline{p_1(y)^2 = p_3(z)}$ donc $p_1(y) = p_3(z)$ car $p_1^2 = p_1$ car p_1 projecteur

donc $x = p_1(y) = p_3(z)$

donc $\exists z \in E / x = p_3(z)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p_3 = F_3$

donc $x \in F_3$ donc $\boxed{F_1 \cap F_2 \subset F_3}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 207

Nombre de pages : 18

Session : 2025

Épreuve de : Maths ED HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2. b) Soit $x \in F_3$, on a $\|p_3(x)\| = \|x\|$

~~On $\|p_3(x)\| \leq \|x\|$ et~~

~~et $x \in E$ donc $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$~~

donc $\|p_1 o p_2(x)\| = \|x\|$

J'admets que $\|x\| \leq \|p_2(x)\|$

On a donc égalité, comme $x \in E$

$\|p_2(x)\| \leq \|x\|$ donc $\|x\| = \|p_2(x)\|$

donc $x \in F_2 = \{x \in E / \|p_2(x)\| = \|x\|\}$

On montrerait également que $\|x\| \leq \|p_1(x)\|$, puis $\|p_1(x)\| \leq \|x\|$

puis $\|p_1(x)\| = \|x\|$ donc $x \in F_1$

c) On a donc $F_1 \cap F_2 = F_3$ par double inclusion

d) p_3 est un projecteur orthogonal, donc c'est un endomorphisme symétrique, donc $\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle}$

donc $\langle p_3(x), y \rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$

$= \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle$ remarquable

e) ~~Notons P_1 et P_2 les matrices de p_1 et p_2 dans une base de E et soit $(x,y) \in E^2$ et X et Y leurs coordonnées en vecteur colonne~~

Soit $x \in E$ alors $\forall y \in E \quad \langle p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x), y \rangle = 0$

donc $p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) \perp y \quad \forall y \in E$

donc $p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) \in E^{\perp} = \{0_E\}$ donc $p_1 \circ p_2(x) = p_2 \circ p_1(x)$

donc $\boxed{p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1}$

3.a)

$p^2 = \underbrace{p_1 \circ p_2 \circ p_1}_{= p_1 \circ p_2} \circ p_2 = p_1 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2^2 = p_1 \circ p_2 = p$

~~donc p est un projecteur~~ p est un endomorphisme de E car p c'est la composée de deux endomorphismes et $p^2 = p$ donc p est un projecteur de E

b) Soit $(x,y) \in E^2$

$\langle x, p(y) \rangle = \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle = \langle x, p_1(p_2(y)) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \underline{p_1 \text{ est symétrique}}}}{=} \langle p_1(x), p_2(y) \rangle$

$= \langle p_2(p_1(x)), y \rangle$ car $\underline{p_2 \text{ est symétrique}}$

$= \langle p_2 \circ p_1(x), y \rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle = \langle p(x), y \rangle$

Donc $\underline{\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle}$ donc $\boxed{p \text{ est un endomorphisme symétrique}}$

c) Donc $\underbrace{p \text{ est symétrique}}_{\text{un endomorphisme}}$ et c'est un projecteur, donc p est un

$\boxed{\text{projecteur orthogonal sur } \mathrm{Im}(p_1 \circ p_2)}$

4. d'après 2, si on prend 3 projecteurs orthogonaux de E p_1, p_2, p_3 sur F_1, F_2, F_3

respectivement et qu'on suppose que $p_1 \circ p_2 = p_3$

alors p_1 et p_2 commutent.

Donc si une projection orthogonale est la composée de deux autres, alors
~~on peut échanger les deux~~ les deux autres commutent d'après 2.

Et d'après 3, si on prend deux projections orthogonales $\overset{p_1 \text{ et } p_2}{\vee}$ dans deux sous espaces

de E, ~~alors~~ qui commutent, alors leur composée est la projection

orthogonale sur $\mathrm{Im}(p_1 \circ p_2)$

Exercice 3. I)

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \begin{cases} -2x e^{-x^2} & si\ x \leq 0 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Pour $x \leq 0$ $-2x \geq 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$

exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme fonction nulle, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} -2x e^{-x^2} dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{0} -2x e^{-x^2} dx$ converge

Soit $B < 0$ $\int_B^0 -2x e^{-x^2} dx = [e^{-x^2}]_B^0 = \cancel{-(e^{-} - e^{0}) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} -(0-1) = 1}$

$= e^0 - e^{-B^2}$

$\underset{B \to -\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1

donc f peut être considérée comme une densité

2. Soit $x > 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = 1 + 0 = 1$

(car en sachant $X(\Omega) =]-\infty; 0]$)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 28

Session : 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $x \leq 0$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ Soit $B<0$ $\int_{B}^{x} f(t)dt = \left[e^{-t^2}\right]_B^x$

$= e^{-x^2} - e^{-B^2} \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}$ car $\lim_{B\to-\infty} -B^2 = -\infty$

et $\lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0$

$$\boxed{\text{Donc } F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

3. Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ une densité de X_1 est $f_{X_1} : x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{2}}}$

$$\boxed{= f_{X_1} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}}$$

4. On a d'après 3.

~~$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1$~~

comme $E(X_1) = 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{X_1}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = 0$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0$

Ainsi, $\int_{-\infty}$ X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument

si et seulement si $\int_{-\infty}^{0} -2t^2 e^{-t^2} dt$ converge absolument

~~Si et seulement~~ Or, d'après 3. puisque $X_1 \hookrightarrow N(0, \frac{1}{2})$

X_1 admet une variance et une espérance et d'après la formule de Koenig Huygens

$E(X_1^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 = V(X_1) + 0 = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On pose $u = -t$ dans $\int_{-\infty}^{0} -2t^2 e^{-t^2} dt$ (licite car $t \mapsto -t$ est une bijection de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$)

On sait alors que $\int_{-\infty}^{0} -2t^2 e^{-t^2} dt$ et $\int_{+\infty}^{0} -2(-u)^2 e^{-(-u)^2} (-du) = -\int_{0}^{+\infty} 2u^2 e^{-u^2} du$

et même méthode

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-u^2} du$ converge donc $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-u^2} du$ conv

donc $\int_{-\infty}^{0} -2t^2 e^{-t^2} dt = -2\int_{0}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du$

et avec $u = -t$ dans $\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-u^2} du$ on trouve $\int_{0}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{0} t^2 e^{-t^2} dt$

donc $2\int_{0}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc $\int_{0}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ et finalement X admet une espérance et

$E(X) = -2\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{-\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\boxed{E(X) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

5. ~~Soit~~
$Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $\forall x < 0 \quad G(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $\omega \in \Omega$

$\omega \in [Z \le x] \iff X^2(\omega) \le x \iff -\sqrt{x} \le X(\omega) \le \sqrt{x}$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

~~$\iff X(\omega) \le \sqrt{x}$~~ car

~~$\iff \omega \in [-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}]$~~

$\iff -\sqrt{x} \le X(\omega)$ car $X(\Omega) =]-\infty; 0]$

$\iff \omega \in [-\sqrt{x} \le X]$

~~donc $G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ car X est à densité~~

~~$= e^{-(\sqrt{x})^2} - e^{-(-\sqrt{x})^2} = e^{-x} - e^{-x} =$~~

Donc $G(x) = 1 - P(X < -\sqrt{x}) = 1 - P(X \leq -\sqrt{x})$ car X est à densité

$= 1 - e^{-(-\sqrt{x})^2} = 1 - e^{-x}$

donc $G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On reconnait que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

6. Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc Z admet une espérance et $E(Z) = 1$

donc $E(Z) = E(X^2) = 1$

Donc X admet un moment d'ordre 2 d'après la formule de Koenig-Huygens

~~et~~ X admet une variance et

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \left(\frac{-\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{\pi}}{2} = \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2}$

Donc $V(X) = \frac{2 + \sqrt{\pi}}{2}$

7.

```
Z = rd.exponential(1)
M[i] = - np.sqrt(Z)
```

```
def EsperanceX(n):
    S = 0
    for k in range(10 000):
        S = S + simulX(n)
    return S/10 000
```


IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 2

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. pour $x \in [0;1]$, $1-x \in [0;1]$

donc h est positive sur $[0;1]$, donc sur $\mathbb{R}$

h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ immédiatement

et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \int_0^1 h(t)dt$ car h est continue sur $[0;1]$ et

vaut $2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{2} - 0 + 0\right) = 2 - 1 = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 1$, h est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

$\boxed{\text{donc } h \text{ peut être considérée comme une densité}}$

9. $Y(\Omega) = [0;1]$ donc pour $x < 0$ $H(x) = 0$ et pour $x > 1$ $H(x) = 1$

Soit $x \in [0;1]$ $H(x) = \int_{-\infty}^{1} h(t)dt + \int_0^x h(t)dt = 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = 2x - x^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x(1-x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ $\quad M_n(\Omega) = [0;1]$

$[M_n \leq x] = \left[\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \leq x\right]$ donc en notant F_{M_n} la fonction de répartition de M_n

On a

$F_{M_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$ car les $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendants

$= \prod_{i=1}^{n} H(x) = [H(x)]^n$ donc $F_{M_n}(x) = [H(x)]^n \ \forall x \in \mathbb{R}$

~~Soit~~ Soit maintenant $y \in [0;1]$, $-1 \leq y-1 \leq 0$ donc $-\sqrt{n} \leq \sqrt{n}(y-1) \leq 0$

donc $T_n(\Omega) = [-\sqrt{n};0]$

On a pour $x \in [-\sqrt{n};0]$

$[T_n \leq x] = [\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x] = \left[M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right]$

donc $F_n(x) = F_{M_n}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \left(H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

Donc $F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \ \forall x \in [-\sqrt{n};0]$

Si $x < -\sqrt{n}$ alors $F_n(x) = 0$ ~~et~~

et ~~$x \sqrt{n}$~~ $\frac{x}{\sqrt{n}} < 1$ donc $1 - \frac{x}{\sqrt{n}} < 0$ donc

$\left[H\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = 0^n = 0$. Si $x > 0$ $F_n(x) = 1$ et $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} > 1$

donc $\left[H\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = 1^n = 1$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$

11. Soit $y \in \mathbb{R}$

$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)}$

Or $\ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{y}{n}$ car $\frac{y}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{ny}{n} = y$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) = y$

et exp est continue sur $\mathbb{R}$ donc en y

donc par composition

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)} = e^y$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$

12.

12. $F_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \cancel{\text{si } x<0} & \text{si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} < 0 \\ \left(2\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } \cancel{0\leq x\leq 1}\ 0 \leq 1+\frac{x}{\sqrt{n}} \leq 1 \\ 1 & \text{si } \cancel{x \geq 1}\ 1+\frac{x}{\sqrt{n}} > 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 2^n\left(-\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On rappelle que F est continue sur $\mathbb{R}$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On a $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\sqrt{n} \\ 2^n\left(\frac{-x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)^n & \text{si } -\sqrt{n} \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Alors si $x > 0$, (comme $1+\frac{x}{\sqrt{n}} > 1 \iff x > 0$), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$

Soit $x \leq 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ donc pour n suffisament grand, $x \in [-\sqrt{n} ; 0]$

On a alors pour n suffisament grand, $F_n(x) = 2^n\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	**Nombre de pages :** 28	**Session :** 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$= \left(\frac{-2x}{\sqrt{n}}\right)^n \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$ ce qu'on cherche

Problème

Partie I)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k} = \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^n \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n}{k}\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{n!}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{n!} \times \prod_{k=n+1}^{2n} k = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{n!} \times \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{n!}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = B_n \quad \text{car } B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

```
def B(n):
    p = 1
    for k in range(1, n+1):
        p = p*((k + n)/(4*k))
    return p
```

Partie 2

2. ~~Wn~~ sin est continu sur $\mathbb{R}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $t \mapsto (\sin t)^n$ est continu sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc W_n ~~est ...~~ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$

$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0$

$= 0 + 1 = 1$

Donc $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(\sin t - 1) \, dt$ par linéarité de l'intégrale.

On $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $0 \leq \sin t \leq 1$ donc $-1 \leq \sin t \leq 0$ donc $t \mapsto (\sin t)^n (\sin t - 1)$

est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc par positivité de l'intégrale

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -(\sin t)^n(\sin t - 1) \, dt \geq 0$ donc $W_{n+1} - W_n \leq 0$ donc $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

4.

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \, \sin t \, dt$$

On effectue une intégration par parties, $t \mapsto -\cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ sont bien de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

On a
$$W_{n+2} = \left[-\cos t \, (\sin t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)(n+1)\sin^n t \cos t \, dt$$

$$= 0 + 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t \, dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,(1 - \sin^2 t)\, dt$$

$$= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$$

Donc $W_{n+2} + (n+1) W_{n+2} = (n+1) W_n$

Donc $\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$

5. $\frac{\pi}{2} B_n = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$

Montrons par récurrence sur n que $W_{2n} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation :
$$W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \binom{2 \times 0}{0} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

Donc la propriété est initialisée.

On suppose la propriété vraie à un certain rang $n \geq 0$

Hérédité :

$$\text{On a } W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{par (H.R)}$$

d'après 4.

$$\text{On a } W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{par HR}$$

$$= \frac{\pi}{2} \underbrace{\frac{2n+2}{2n+2}}_{=1} \times \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2)!}{4(n+1)^2 (n!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \cancel{\frac{\pi}{2} B_n}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\pi}{2} B_{n+1} \text{ ce qui achève l'hérédité}$$

Conclusion

On a donc par principe de récurrence

$$\boxed{W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Montrons par récurrence sur n que $W_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1) B_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } W_1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2 \times 0+1) B_0} = \frac{1}{1} = 1$$

C'est initialisé

Supposons $W_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1) B_n}$ ~~vraie~~ vrai pour un certain $n \geq 0$

$$\text{alors } W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} = W_{2n+1+2} = \frac{2n+1+1}{2n+1+2} W_{2n+1}$$

car d'après 4.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2025

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{B_n} = \frac{2n+2}{(2n+1)(2n+3)} \times 4^n \times \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \underbrace{\frac{2n+2}{2n+2}}_{=1} \times \frac{2(n+1)}{2n+1} \times \frac{1}{2n+3}\, 4^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)\,(2n+2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+3)} \times \frac{1}{B_{n+1}}$$ ce qui achève l'hérédité.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$

~~6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geq 2$~~

~~$W_{2n-1} = W_{2n-3+2} = \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3}$~~

7. $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante donc soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $2n-1 \leq 2n \leq 2n+1$

donc $\frac{1}{2nB_n} \geq \frac{\pi}{2} B_n \geq \frac{1}{(2n+1)B_n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

J'en déduis que $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \le B_n \le \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

8. On multiplie par $\sqrt{n}\pi > 0$ dans l'inégalité 8

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \le \sqrt{n\pi}\, B_n \le 1$$

$n \underset{+\infty}{\sim} n+1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$ et par théorème d'encadrement

donc $\sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n\pi}\, B_n = 1$$

donc $\boxed{B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}}$

Partie 3

9. a) ~~soit~~ ~~singe~~ Soit $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}^*$

Si $X_k(\omega) = 1$

alors $Y(\omega) = \frac{X_k(\omega)+1}{2} = 1$

Si $X_k(\omega) = -1$ alors $Y(\omega) = \frac{-1+1}{2} = 0$.

donc $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$

et $P(Y_k = 1) = P(X_k = 1)$ donc $\boxed{Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(P(X_k = 1))}$

~~On, $X_k(\Omega) = \{-1; 1\}$ donc par la formule~~

donc $\boxed{E(Y_k) = P(X_k = 1)}$ et $\boxed{V(Y_k) = \cancel{P(X_k = -1)}\ P(X_k = 1)(1 - P(X_k = 1))}$

9.b) $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

les Y_k sont mutuellement indépendants donc $\boxed{T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, P(X_k=1))}$

c) ~~Si toutes les~~ Soit $k \in \mathbb{N}$

Si toutes les $X_1, \dots, X_n$ prennent la valeur -1, alors S_n prend $-n = \cancel{2}\, 2\times 0 - n$

si une seule prend 1 et les autres -1, alors S_n prend $(n-1)(-1)+1 = -n+2 = 2\times 1 - n$

etc...

Si elles prennent toutes 1, alors S_n prend $\sum_{k=1}^{n} 1 = n = 2\times n - n$

$\boxed{\text{donc } S_n(\Omega) = \left\{ 2j - n \,/\, j \in [\![0; n]\!] \right\}}$ non exhaustive

10.c) ~~$R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A$~~ $\boxed{R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A}$

Partie 4.

13.a) $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ d'après 11)

~~$\cancel{4}$~~ donc $\left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ $\boxed{\text{donc } \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\binom{2n}{n}}}$

b) $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \sim \left(\frac{x}{4}\right)^n \sqrt{n}\sqrt{\pi}$ $x \in [0; 4[$ donc $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$

série géométrique