Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 22

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EM-Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 Partie 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$t \mapsto (1-t^2)$ est continue sur $[0;1]$ et sur $[-1;1]$

donc $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0;1]$ et $[-1;1]$

donc I_n et J_n sont bien définies

On pose le changement de variable $u = -t$ dans I_n

Puisque $t \mapsto -t$ est bien de classe C^1 sur $[0;1]$, ~~il~~ ce changement de variables est licite.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{-1} (1-(-u)^2)(-du) = \int_{-1}^0 (1-u^2)^n du$

Ainsi on a $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_{-1}^0 (1-t^2)^n dt$

donc $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n dt$ donc $J_n = 2I_n$

Ainsi, J_n et I_n sont bien définies et $J_n = 2I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2. I_0 est bien définie et $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 dt = \int_0^1 dt = 1$

donc $I_0 = 1$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale

$$I_{n+1} - I_n = \underbrace{\int_0^1 \left((1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\right) dt}_{\text{définie car } \sim\sim\text{somme d'intégrale}\sim\sim} = \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) = -\int_0^1 (1-t^2)t^2 dt$$

~~donc~~ $t \mapsto (1-t)^{2n+2} - (1-t^2)^n$ est continue sur $[0;1]$

Or pour $t \in [0;1]$ $0 \leq t^2 \leq 1$ et $0 \leq 1-t^2 \leq 0$

donc $t \mapsto (1-t^2)t^2$ est positive sur $[0;1]$ et par positivité de l'intégrale $(0 \leq 1)$

donc $\int_0^1 (1-t^2)t^2 dt \geq 0$

d'où $-\int_0^1 (1-t^2)t^2 dt = I_{n+1} - I_n \leq 0$

Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

4. Faisons une intégration par parties dans I_n sur le segment $[0;1]$

$t \mapsto t$ et $t \mapsto (1-t^2)^n$ sont de classe C^1 sur $[0;1]$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \left[t(1-t^2)^n\right]_0^1 - \int_0^1 t\, n(1-t^2)^{n-1}(-2t)\, dt$$

$$= 0 + 0 + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-2} t^2 dt = 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-2}(-1+t^2+1)$$

$$= 2n\int_0^1 -(1-t^2)^n + (1-t^2)^{n-1} = -2n\int_0^1 (1-t^2)^n dt + 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-2} dt$$

par linéarité de l'intégrale

Donc on a $I_n = -2nI_n + 2nI_{n-2}$ soit $(2n+1)I_n = 2n I_{n-2}$

$$\boxed{\text{donc } I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

5. Montrons par récurrence que $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $I_0 = 1$ et $\frac{(2^0 0!)^2}{1!} = \frac{1^2}{1} = 1$

donc la propriété est initialisée

Hérédité : Supposons que $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ pour un certain rang $n \geq 0$

d'après 4. On a

$$I_{n+2} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_{n+2-1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$ donc par hypothèse de récurrence

$$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2n+2}{\underbrace{2n+2}_{=1}} \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2^2(n+2)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{(2^{n+2}(n+2)!)^2}{(2(n+2)+1)!}$$ ce qui achève l'hérédité

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$ par le principe de récurrence

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $J_n = \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ car $J_n = 2I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

6.
```
1. def I(n):
2.     i=1
3.     for k in range(1, n+1):
4.         i = i*(2*k)/(2*k+1)
5.     return i
```

7. J'admets le résultat

Partie 2.

8. Posons f cette application pour cette question

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que $R \in \mathbb{R}[x]$

~~pour~~ $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1;1]$ donc toutes les intégrales étudiées convergent

$f(P,Q) \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)dt = f(Q,P)$ donc f est bien symétrique

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 22 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques E4 - Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$f(P+\lambda Q,R) = \int_{-1}^{1} (P+\lambda Q)(t)\,R(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)R(t)\,dt + \lambda\int_{-1}^{1} Q(t)R(t)$$

par linéarité de l'intégrale

$= f(P,R)+\lambda f(Q,R)$ donc f est linéaire à gauche. Puisque f est symétrique, elle est aussi linéaire à droite, donc f est bilinéaire

$f(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt$ or $t \mapsto P^2(t)$ est positive sur $[-1;1]$ donc par positivité de l'intégrale $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geq 0$

donc f est positive

Supposons que $f(P,P) = 0$

alors $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 0$ donc comme $t \mapsto P^2(t)$ est positive et continue sur $[-1;1]$, par nullité de l'intégrale on a

$P^2(t) = 0 \ \forall t \in [-1;1]$ donc $P(t) = 0 \ \forall t \in [-1;1]$ donc P a une infinité de racines donc $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$ donc f est bien définie

Ainsi f est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire

9. ~~$\langle e_0, e_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \times t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} =$~~

$$\langle e_0, e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \times t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$$

donc e_0 et e_2 ne sont pas orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donc les polynômes de B_n ne sont pas deux à deux orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$

10.

On a donc $u(P)(x) = ((1-x^2)P'(x))'$ par abus de notation $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$u(P+\lambda Q)(x) = ((1-x^2)(P+\lambda Q)'(x))' = ((1-x^2)P'(x) + \lambda(1-x^2)Q'(x))'$

$= ((1-x^2)P'(x))' + \lambda((1-x^2)Q'(x))'$ par linéarité de la dérivation

$= u(P) + \lambda u(Q)$ donc u est une application linéaire

Soit $R : x \mapsto 1-x^2$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$

$\deg(P) \leq n$ donc $\deg(P') \leq n-2$ donc $\deg(RP') \leq n-2+2 = n+2$

donc $\deg((RP')') \leq n$ donc $(RP')' \in \mathbb{R}_n[x]$

donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11.a) $e_0'(x) = 0$ donc $(1-x^2)e_0'(x) = 0$

donc $u(e_0)(x) = 0$ car la dérivée d'un polynôme nul est le polynôme nul

$e_1'(x) = 1$ donc $(1-x^2)e_1'(x) = (1-x^2)1 = 1-x^2$

et donc ~~comme~~ $((1-x^2)e_1'(x))' = -2e_1$

(car $(e_0(x) - e_2(x))' = -2e_1(x)$)

$$\boxed{\text{donc on a } u(e_0) = 0 \text{ et } u(e_1) = -2e_1}$$

b)

Soit $k \in [\![2;n]\!]$
$$e_k'(x) = kx^{k-1}$$

donc $(1-x^2)e_k'(x) = (1-x^2)kx^{k-1} = kx^{k-1} - kx^{k+1}$

On pose $h(x) = kx^{k-1} - kx^{k+1}$ on a $h'(x) = k(k-1)x^{k-2} - k(k+1)x^k$

$= -k(k+1)e_k(x) + k(k-1)e_{k-2}(x)$

Donc ~~$u(e_k)(x) =$~~

$$\boxed{u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}}$$

c) On peut donc en déduire la matrice de u dans la base B_n $(sp(u) = sp(Mat_{B_n}(u)))$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \vdots & & 0 \\ 0 & -2 & & 0 & & \\ & 0 & \ddots & k(k-1) & & \vdots \\ & & & 0 & & \\ & & & -k(k+1) & & \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \vdots & & n(n-1) \\ 0 & & & 0 & & 0 \\ & & & & & -n(n+1) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux

Puisque $r \mapsto -r(r+1)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit qu'elle est injective, donc les valeurs propres de u qui sont dans $sp(u) = \{-k(k+1) / k \in [\![0;n]\!]\}$ sont deux à deux distinctes et sont au nombre de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$

donc tous les sous espaces propres de u sont de dimension 1

et $sp(u) = \{ \lambda_k = -k(k+1) \,/\, k \in [\![0;n]\!] \}$

12. Montrons que u est un endomorphisme symétrique ie

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n(x) \quad \langle P, u(Q) \rangle = \langle u(P), Q \rangle$

Effectuons une intégration par parties sur $[-1;1]$ dans

$$\int_{-1}^{1} u(P)(t)Q(t)\,dt$$

$t \mapsto (1-t^2)P'(t)$ et Q sont bien de classe C^1 sur $[-1;1]$

On a donc

$$\int_{-1}^{1} u(P)(t)Q(t)\,dt = \underbrace{\Big[(1-t^2)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1}}_{=0 \text{ car le terme } (1-t^2) \text{ s'annule pour } t=1 \text{ et } t=-1} - \int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt$$

$$= -\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)Q'(t)\,dt$$

On peut maintenant effectuer une intégration par parties sur $[-1;1]$ dans

$\int_{-1}^{1} P(t)\,u(Q)(t)\,dt$ et on obtient $\int_{-1}^{1} P(t)\,u(Q)(t)\,dt = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'(t)\,Q'(t)$

également car il suffit d'échanger le rôle de P et Q

On a ainsi: $\displaystyle\int_{-1}^{1} u(P)(t)\,Q(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t)\,u(Q)(t)\,dt$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques ELV-Lga

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

donc $\langle u(P), Q\rangle = \langle P, u(Q)\rangle$ donc u est un endomorphisme symétrique.

Or, grâce au résultat de 12.c) on sait que u est diagonalisable

Donc il existe une base orthonormale (car u est symétrique) ~~fo~~ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u.

Soit $(Q_0, \dots, Q_n)$ une telle base. Soit $j \in [\![0; n]\!]$

~~Posons pour $j \in [\![0;n]\!]$~~ $d_j = \deg(Q_j)$

il existe des réels $a_{1,j}, a_{2,j} \dots a_{d_j,j}$ tel que $Q_j(x) = \sum_{i=1}^{d_j} a_{i,j} x^i$

On pose alors ~~pour $j \in [\![0;$~~ $L_j = \frac{Q_j}{a_{d_j,j}}$

De cette manière les ~~L_j sont bien~~ $L_0, \dots, L_n$ sont bien unitaires et

~~$\forall j \in [\![0;n]\!]$~~ $\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$

$\langle L_i, L_j\rangle = \frac{1}{a_{d_i,i}\, a_{d_j,j}} \langle Q_i, Q_j\rangle = 0$ donc les ~~Q_i~~ L_i sont bien orthogonaux

Donc il existe une telle base $L_n = (L_0, \dots, L_n)$ orthogonale avec les L_i unitaire et vecteurs propres (car ... car →

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~les L_j~~ Pour $j \in [[0;n]]$ si on note d_j la valeur propre associée à Q_j

$$u(L_j) = u\left(\frac{Q_j}{ad_{j,j}}\right) = \frac{1}{ad_{j,j}} u(Q_j) = \frac{1}{ad_{j,j}} d_j Q_j = d_j \frac{Q_j}{ad_{j,j}} = d_j L_j$$

donc L_j est bien un vecteur propre de u. $\forall j \in [[0;n]]$

13. $R_m(x)$ est un espace vectoriel donc d'après le théorème de la projection

Puisque $R_n(x)$ est un sous espace vectoriel de $R_m(x)$, il existe un unique $T_n \in R_n(x)$

tel que $\|f - T_n\| = \min_{g \in R_n(x)} \|f - g\|$

T_n est le projeté orthogonal de f sur $R_n(x)$, comme $(L_0, ..., L_n)$

forme une base de $R_n(x)$, on sait d'après le cours qu'il existe

$(c_0, ..., c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$

On a $c_k = \langle f, L_k \rangle$ $\forall k \in [[0;n]]$, toujours d'après le cours

b. Particularité remarquable

$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, T_n \rangle + \|T_n\|^2$

$= \|f\|^2 - 2\langle f, \sum_{k=0}^{n} c_k L_k \rangle + \langle \sum_{i=0}^{n} c_i L_i , \sum_{j=0}^{n} c_j L_j \rangle$

$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k \langle f, L_k \rangle + \sum_{i=0}^{n} c_i \sum_{j=0}^{n} c_j \langle L_i, L_j \rangle$

$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{i=0}^{n} c_i \times c_i \langle L_i, L_i \rangle$ car $(L_0 \dots L_n)$ est orthogonale

$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n} c_i^2 \|L_i\|^2$

Je ne parviens plus à faire apparaître $\|L_k\|^2$ dans la deuxième somme

N.A

14. a) $\deg(x \mapsto x^2 k - 1) = 2$ donc $\deg(x \mapsto (x^2-1)^k) = 2k$

$\boxed{\deg(P_k) = 2k}$

Q_k est donc le polynôme obtenu en dérivant k fois P_k donc $\deg Q_k = \deg P_k - k = 2k - k = k$

Donc $\boxed{\deg(Q_k) = k}$ J'admets l'autre résultat

b) On a $Q_0 = P_0 = e_0$

$Q_1 = P_1^{(1)} = P_1'$ donc $Q_1(x) = P_1'(x) = 2x = 2e_1(x)$ donc $Q_1 = 2e_1$

$Q_2 = P_2^{(2)} = P_2''$ donc $Q_2(x) = P_2''(x) = 12x^2 - 4 = 12e_2(x) - 4e_0(x)$

Donc $\boxed{Q_0 = e_0 \quad Q_1 = 2e_1 \quad Q_2 = 12e_2 - 4e_0}$

c. i. Soit $k \in \mathbb{N}$ soit $x \in \mathbb{R}$

$P_1(x) P_k'(x) = (x^2-1) k (x^2-1)^{k-1} (2x) = 2kx (x^2-1)^k$ ~~donc~~
$= 2k e_1(x) P_k(x)$

ii. $(P_1 P_k)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} P_1^{(i)} P_k^{(k+1-i)}$ d'après la formule de Leibniz (ce sont des polynômes, donc de classe C^∞)

non abrentie S'adapte que

$$(1-x^2) Q_k''(x) - 2x Q_k'(x) = -k(k+1) Q_k(x)$$

On reconnait que $u(Q)(x) = (1-x^2) Q''(x) + Q_k'(x)(-2x)$

$$= (1-x^2) Q''(x) - 2x Q_k'(x) = -k(k+1) Q_k(x)$$

donc $u(Q_k) = -k(k+1) Q_k$ donc Q_k est un vecteur propre de u associé à $-k(k+1)$

iii. D'après 11.c) les sous espaces propres de u sont de dimension 1

donc pour $k \in [\![0;n]\!]$ (L_k, Q_k) est liée car ce sont deux vecteurs du même sous espace propre de dimension 1

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \quad L_k = \lambda Q_k$ d'où par égalisation des coefficients dominants $1 = \lambda \frac{(2k)!}{k!}$ donc $\lambda = \frac{k!}{(2k)!}$

Ainsi $\boxed{L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k \quad \forall k \in [\![0;n]\!]}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EM-Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2 Partie 1

1. $x \mapsto 1+x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas, elle est même strictement positive

donc $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc f également

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ Soit $A>0$ et $B<0$

$$\int_B^A \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(u)]_B^A = \arctan A - \arctan B$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{B\to-\infty} \arctan(B) = -\frac{\pi}{2}$

donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\lim\limits_{B\to-\infty} \int_B^A \frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{\pi} \times \pi = 1$

donc f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ ~~privé d'un nombre fini~~ sauf éventuellement en nombre fini de points) et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2.
$$\frac{t}{\pi(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}, \quad t \mapsto \frac{t}{\pi(1+t^2)}$$ est une fonction positive

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\pi t}$ diverge (intégrale de Riemann divergente)

donc par critère de comparaison d'intégrale de fonction positive,

$\int_1^{+\infty} t f(t)dt$ diverge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ diverge donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance}}$

~~Supposons que X admette une variance. Alors elle admet un moment d'ordre 2. Donc elle admet une espérance !! absurde.~~ $\frac{t^2}{1+t^2} \sim 1$ et $\int_1^{+\infty} dt$ diverge donc X n'admet pas de moment d'ordre 2, donc d'après le théorème de Koenig-Huygens ~~d'après la formule de Koenig-Huygens~~ ~~Donc~~ $\boxed{X \text{ n'admet pas de variance}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $B < 0$

$$\int_B^x f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) - \arctan B\right) \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2} \quad \text{donc } \boxed{F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}}$$

f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ (car X est à densité) et $\mathbb{R}$ est un intervalle. Donc d'après le théorème de la bijection, F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ (car $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ car F est la fonction de répartition)

Soit $y \in]0;1[$

$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x) \iff y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\arctan x \iff \pi y - \frac{\pi}{2} = \arctan x$

$\iff \tan(\pi y - \frac{\pi}{2}) = x$

Donc on peut poser $F^{-1}(y) = \tan(\pi y - \frac{\pi}{2})$ $\forall y \in]0;1[$

4. a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$ on note F_U la fonction de répartition de U on

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

~~Soit~~ $U(\Omega) =]0;1[$ et F^{-1} est bijective de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$ donc

$Y(\Omega) = \mathbb{R}$. De plus, soit $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{R}$

$\omega \in [Y \leq x] \iff Y(\omega) \leq x \iff F^{-1}(U(\omega)) \leq x \iff U(\omega) \leq F(x)$ car F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff \omega \in [U \leq F(x)]$

Donc $[Y \leq x] = [U \leq F(x)]$

Donc $P(Y \leq x) = P(U \leq F(x)) = F_U(F(x)) = F(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \in]0;1[$

Ainsi $P(Y \leq x) = F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc Y et X suivent la même loi

4.b)

```
def cauchy():
    U = rd.rand()
    return np.tan(np.pi*U - np.pi/2)
```

5. Soit $y \in \mathbb{R}$ $|y| \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{|y|} \in \mathbb{R}_+$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Donc en notant F_Z la fonction de répartition de Z, on a $F_Z(x) = 0 \ \forall x < 0$

Soit $x \geq 0$ et $\omega \in \Omega$

$\omega \in [Z \leq x] \iff \sqrt{|X(\omega)|} \leq x \iff |X(\omega)| \leq x^2$ par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$\iff -x^2 \leq X(\omega) \leq x^2 \iff \omega \in [-x^2 \leq X \leq x^2]$

Donc $F_Z(x) = P(-x^2 \leq X \leq x^2) = F(x^2) - F(-x^2)$

Donc F_Z est C^1 sur $\mathbb{R}_-$ car c'est la fonction nulle

et comme $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que F est C^1 sur $\mathbb{R}$

alors F_Z est par composition puis par somme de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$

donc sur $\mathbb{R}$. Cela prouve que Z est à densité

On a alors pour $x \in \mathbb{R}_-$ $F_Z'(x) = 0$

et pour $x \in \mathbb{R}_+$ $F_Z'(x) = 2x F'(x^2) - (-2x) F'(-x^2)$

$= 2x(f(x^2) + f(-x^2)) = 2x\left(\frac{1}{\pi(1+x^4)} + \frac{1}{\pi(1+x^4)}\right) = \frac{4x}{\pi(1+x^4)}$

donc Z est à densité et on peut prendre

$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{4x}{\pi(1+x^4)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ une densité de Z.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 22	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques EM - Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6. D'après le théorème de transfert, Z admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\, dt \text{ converge absolument}$$

Notons que $t \mapsto \sqrt{|t|}\, f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

a, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\pi(1+t^2)}\, dt$ et $\displaystyle\frac{\sqrt{t}}{\pi(1+t^2)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{3/2}}\, dt$ converge car $\frac{3}{2} > 1$ donc par critère ($t \mapsto \sqrt{t} f(t)$ est positive)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\, dt$ converge. On pose $u = -t$ dans $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\, dt$

licite car $t \mapsto -t$ est C^1 et bijective de $[1; +\infty[$ dans $]-\infty; -1]$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^{-\infty} \sqrt{|-u|}\, f(-u)(-du)$ ont même nature

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $\int_1^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\,dt$ converge donc ~~elle est égale à~~ $\cancel{\int_{-1}^{-\infty} \sqrt{|t|}\,f(t)\,dt}$

$$\int_{-1}^{-\infty} \sqrt{|-u|}\, f(-u)(-du) = \int_{-\infty}^{-1} \sqrt{|u|}\, f(u)\,du \text{ converge } (f \text{ est paire})$$
immédiatement

Ainsi, $\int_{-\infty}^{-1} \sqrt{|t|}\, f(t)\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\,dt$ convergent et comme $t \mapsto \sqrt{|t|}\, f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{|t|}\, f(t)\,dt$ converge

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|t|}\, f(t)\,dt$ converge. Or $\left|\sqrt{|t|}\, f(t)\right| = \sqrt{|t|}\, f(t)$ donc

l'intégrale converge absolument.

Finalement, Z admet une espérance par le théorème de transfert

Z admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\,dt$ converge absolument.

Or $t^2 f_Z(t) \sim \frac{4t^3}{\pi t^4} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge

donc par critère $\int_1^{+\infty} t^2 f_Z(t)\,dt$ diverge et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\,dt$ diverge donc Z n'admet pas de moment d'ordre 2, donc Z n'admet pas de variance d'après le théorème de Koenig Huygens

a) Les réels $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ conviennent

b) Posons $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

le discriminant de P est $(-\sqrt{2})^2 - 4 = 2 - 4 = -2 < 0$

donc, comme son coefficient dominant est positif on sait que P est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

donc $x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge car $2 > 1$ donc par critère, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ converge.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ converge.

De même $x \mapsto x^2 + \sqrt{2}x + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ converge

On a désormais que la forme canonique donne

$$x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$

On pose $u = x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ licite car $x \mapsto x+\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une bijection de classe C^1 dans $[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{du}{u^2+\frac{1}{2}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{du}{\frac{2u^2+1}{2}}$

$\displaystyle = 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\infty} \frac{du}{2u^2+1}$ On pose $t = \sqrt{2}u$ (changement licite)

$\displaystyle = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1}$ Soit $A>0$ $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan(t)]_1^A$

$\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi-2\pi}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2025

Épreuve de : Maths EM-Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8. La fonction mystère renvoie la probabilité que ~~$|E(Z) - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$ avec ε un flottant fourni par l'utilisateur~~ ~~l'espérance~~ ~~la moyenne empirique de Z~~ l'écart entre la moyenne empirique de Z et $\sqrt{2}$ soit inférieur à un flottant eps donné par l'utilisateur.

~~On aurait pu utiliser~~ ~~On constate que la moyenne~~
On aurait pu utiliser ~~le théorème~~ la loi faible des grands nombres, mais ~~X n'admet pas de variance~~
Z n'admet pas de variance.

On conjecture que Z converge en probabilité vers $\sqrt{2}$

Partie 2.

9. $1\!\!1_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$ $\quad E(1\!\!1_A) = P(A)$ et $V(1\!\!1_A) = P(A)(1-P(A))$

14. Supposons $|x| \leq \frac{r}{2}$ et $|y| \leq \frac{r}{2}$

donc $|x+y| \leq |x| + |y| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

donc $|x+y| \leq r$ donc par la contraposée on a bien le résultat

10.a) : $1\!\!1_{[X \geq S]}(\omega) = 1$

si et seulement si $\omega \in [X \geq S]$

si et seulement si $X(\omega) \geq S$

si et seulement si $X_{\geq S} : f_S(X(\omega)) = 1$

Ceci est aussi vrai pour 0 car $1\!\!1(\Omega) = \{0;1\}$

$\boxed{\text{On a donc le résultat}}$

Problème 1 Q7.

$J_n = 2I_n$ et car $2n+2 \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$

On a $(2n+2)! \sim \sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}$

Donc $J_n = 2I_n \underset{+\infty}{\sim} 2 \times \dfrac{\left(2^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)} \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}} =$

$= 2^{2n+2} \pi n^{2n+1} \left(\frac{1}{e}\right)^{2n} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n+1}} \times \frac{e^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}}$

$= e \underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}}_{\underset{+\infty}{\sim} 1} \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim$