# Copie anonyme - n°anonymat :

| | |
|---|---|
| **Code épreuve :** 285 | **Nombre de pages :** 45 | **Session :** 2025 |

**Épreuve de :** Mathématiques

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

## EXERCICE 1

### Partie I

1.

a)

- $$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

- $$A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} & \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 0 \\ \frac{4}{27} - \frac{4}{27} + 0 & \frac{5}{9} - \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I = 0}$ Ainsi, le polynôme $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$ est un polynôme annulateur

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

de A.

b)

Soit $P(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

$P(x) = 0 \iff x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

$\underline{x = 1}$ ou $\underline{x = \frac{1}{3}}$

Les valeurs propres possibles de A sont : $\left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$

c)

- $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

- $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = +\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \neq 0$ donc $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\frac{1}{3}$.

Les valeurs propres de A sont donc : $\boxed{1 \text{ et } \frac{1}{3}}$

2)

a)

$$PQ = \begin{pmatrix}3 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix} = 6\,\underline{I}$$

$$\boxed{PQ = 6\,\underline{I}}$$

b)

$$PQ = 6\,\underline{I} \Rightarrow P\left(\frac{1}{6}Q\right) = \underline{I}.$$

P est donc inversible et son inverse est :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}Q}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

c)

$$- \ AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$- \ PD = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$AP = PD$

Puisque $P$ est inversible

$APP^{-1} = PDP^{-1}$

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Il existe une matrice $P$ inversible et $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

A est donc diagonalisable.

d)

Initialisation

pour $n = 0$

- $A^0 = I$
- $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$

La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

- supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$
- démontrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

on a :

$A^{n+1} = A^n . A$

$= PD^nP^{-1} . PDP^{-1}$ (Hypothèse de récurrence)

# Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : 2025 |
| --- | --- | --- |

Épreuve de : Maths

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$A^{n+1} = P D^n I D P^{-1}$

$= P D^n D P^{-1}$

$A^{n+1} = P D^{n+1} P^{-1}$, la propriété est héréditaire.

conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $A^n = P D^n P^{-1}$.

e)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$

$$\bullet\ P D^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$A^n = P D^n P^{-1}$, or $P^{-1} = \frac{1}{6} Q$.

$$\bullet\ P D^n P^{-1} = \frac{1}{6} P D^n Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 9 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

Cependant :

- $3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{-1}}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

- $9\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

D' où : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

3.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u_n + v_n \\ \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_{n+1} = AX_n}$$

b)

Initialisation

pour $n=0$ :

- $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$. La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

- supposons que $X_n = A^n X_0$

- démontrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$

on a :

$X_{n+1} = A X_n$ (question 3.a)

$= A A^n X_0$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$,

la propriété est héréditaire.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $X_n = A^n X_0$.

c)

$\forall n \in \mathbb{N}$ ; $X_n = A^n X_0$ or $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- $A^n X_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

on obtient donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$u_n = \frac{1}{6}\left[\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) u_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) v_0\right]$

$$u_n = \frac{1}{6}\left[ 3u_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} . u_0 + 9v_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} v_0 \right]$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{6}\left[ 3(u_0 + 3v_0) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}u_0 - v_0\right) \right]}$$

$$\bullet\ v_n = \frac{1}{6}\left[ \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) u_0 + \left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) v_0 \right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[ u_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u_0 + 3v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} v_0 \right]$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{6}\left[ 3v_0 + u_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(v_0 - \frac{1}{3}u_0\right) \right]}$$

d)

$$\bullet\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}\left[ 3(u_0 + 3v_0) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}u_0 - v_0\right) \right]$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}(u_0 + 3v_0)} \quad \text{car} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$$

puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$

$\Rightarrow$ Au bout d'un temps très grand, on peut dire qu'il y a survie de la population des enfants : il y a équilibre en naissances et décès.

$$\bullet\ \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}\left[ 3v_0 + u_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(v_0 - \frac{1}{3}u_0\right) \right]$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3v_0 + u_0}{6}} \quad \text{car} \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \\ \text{car } \left|\frac{1}{3}\right| < 1 \end{cases}$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : 2025 |
| --- | --- | --- |

Emplacement QR Code

**Épreuve de :** Maths

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

=> Au bout d'un temps très grand, on peut dire qu'il y a survie de la population des adultes : il y a équilibre entre naissances et décès.

4.

a) La clé primaire pouvant être choisie pour la table ~~an~~ ANIMAUX EST : Enclos, car ~~A~~ ce champ permet d'identifier de façon unique un animal : sa catégorie et son espèce.

b)

```
SELECT Type
FROM ALIMENTATION ;
```

c)

```
SELECT Espèce
FROM ANIMAUX
WHERE categorie = " Adulte"
AND Effectif >= 6 ;
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d)

```
SELECT Animaux.Espèce, Effectif
FROM Animaux JOIN ALIMENTATION
ON Animaux.Espèce = Alimentation.Espèce
WHERE Tarif < 15 ;
```

Partie II

5.

a)

$\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$$W_{n+1} - W_n = rW_n$$
$$W_{n+1} = rW_n + W_n$$
$$W_{n+1} = (r+1)W_n$$

$$\boxed{\frac{W_{n+1}}{W_n} = (r+1)}$$

, d'où $(W_n)$ est une suite géométrique de raison $(r+1)$ (car r est fixe).

$\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$$W_n = W_0 \, q^n$$

~~$(W_n = r+1)$~~

$$\boxed{W_n = W_0 (r+1)^n}$$

b)

On a choisi $r \in [-1 ; +\infty[$ dans cette modélisation car $W_n$ modélise la taille de la population à l'instante $n$. Ainsi, puisque la taille ne peut être négative, on a besoin d'un paramètre positife, d'où :

$$r \geq -1$$
$$\underline{(r+1) \geq 0}.$$

Car si $r \leq -1$ ; $(r+1) \leq 0$, ce qui est absurde.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $W_n = W_0 (r+1)^n$

* si $r \in [-1, 0[$ ;

$$-\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} W_0 (r+1)^n$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = 0}$$ , car si $r \in [-1, 0[$ ; $(r+1) \in [0, 1[$. Ainsi ; $\lim_{n \to +\infty} (r+1)^n = 0$

$\Rightarrow$ Cette limite signifie qu'il ya extinction de la population

* si $r = 0$.

$$-\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} W_0 (r+1)^n$$
$$= \lim_{n \to +\infty} W_0 \times 1^n$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = W_0}$$

$\Rightarrow$ Cette limite signie qu'il y a survie de la population

* si $r > 0$.
$(W_n)$ n'admet pas de limite finie car
si $r > 0 \Rightarrow (r+1) > 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} (r+1)^n = +\infty$.

et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty}$

$\Rightarrow$ Cette limite signifie qu'il y a explosion de la population

- Le modèle proposé est réaliste pour $r > 0$ car dans le monde, la population globale est sans cesse croissante.

6)

a.

i -

$$f(x) = 0 \iff \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0$$

$$\iff \alpha x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{1}{\beta} x = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\beta} x = 1$$

$$\iff \underline{x = 0} \quad \text{ou} \quad \underline{x = \beta}$$

ii -

$f$ est dérivable sur ~~R~~. $[0; +\infty[$.
$\forall x \in [0; +\infty[$,

$$f'(x) = \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) + \alpha x \left(-\frac{1}{\beta}\right)$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

| **Code épreuve :** | **Nombre de pages :** | **Session :** 2025 |
|---|---|---|

**Épreuve de :** Maths

**Consignes**

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$f'(x) = \alpha - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha}{\beta}x$$

$$\boxed{f'(x) = \alpha - \frac{2\alpha}{\beta}x}$$

$$\cdot\ f'(x) \geq 0 \iff \alpha - \frac{2\alpha}{\beta}x \geq 0$$

$$\iff -\frac{2\alpha}{\beta}x \geq -\alpha$$

$$\iff \frac{2\alpha}{\beta}x \leq \alpha$$

$$\iff x \leq \frac{\beta \cdot \cancel{\alpha}}{2\cancel{\alpha}}$$

$$\iff x \leq \frac{\beta}{2}$$

Tableau de variation

| $x$ | $0$ | | $\frac{\beta}{2}$ | | $\beta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $f(\frac{\beta}{2})$ | $\searrow$ | $\boxed{0}$ | $-\infty$ |

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$- \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(0) = 0$

$- \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right)$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ car : $- \lim_{x \to +\infty} \alpha x = +\infty$

$- \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = -\infty$

b).

i -

$*$ $g(x) = 0 \iff x + f(x) = 0$

$\iff x + \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0$

$\iff x \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right)\right] = 0$

$\iff x = 0$ ou $1 + \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0$

$\boxed{x = 0}$ ou $\alpha \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = -1$

$1 - \frac{1}{\beta} x = -\frac{1}{\alpha}$

$-\frac{1}{\beta} x = -\frac{1}{\alpha} - 1$

$\frac{1}{\beta} x = 1 + \frac{1}{\alpha}$

$\boxed{x = \beta + \frac{\beta}{\alpha}}$

$* \quad g(x) = x \iff x + f(x) = x$

$\iff f(x) = 0$

$\iff \underline{x = 0}$ ou $\underline{x = \beta}$

$* \quad g(x) = \beta \iff x + f(x) = \beta$

$\iff x + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right) = \beta$

$\iff x + \alpha x - \frac{\alpha}{\beta}x^2 = \beta$

$\iff -\frac{\alpha}{\beta}x^2 + (1+\alpha)x - \beta = 0$

$\Delta = (1+\alpha)^2 - 4\alpha$

$= 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 4\alpha$

$= \alpha^2 - 2\alpha + 1$

$\Delta = (\alpha - 1)^2$

$\sqrt{\Delta} = \alpha - 1$

$x_1 = \dfrac{-1 - \alpha - \alpha + 1}{-\frac{2\alpha}{\beta}}$ ; $x_2 = \dfrac{-1 - \alpha + \alpha - 1}{-\frac{2\alpha}{\beta}}$

$x_1 = \dfrac{-\cancel{2}\alpha}{-\frac{\cancel{2\alpha}}{\beta}}$ ; $x_2 = \dfrac{-\cancel{2}}{-\frac{\cancel{2}\alpha}{\beta}}$

$\boxed{x_1 = \beta}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}}$

ii -

iii -

$g$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[$ ;

$$g'(x) = x' + f'(x)$$

$$g'(x) = f'(x) + 1$$

$$= \alpha - \frac{2\alpha}{\beta}x + 1$$

$$\boxed{g'(x) = (\alpha+1) - \frac{2\alpha}{\beta}x}$$

. $g'(x) \geq 0 \iff (\alpha+1) - \frac{2\alpha}{\beta}x \geq 0$

$$\iff \frac{2\alpha}{\beta}x \leq \alpha+1$$

$$\iff 2\alpha x \leq \beta(\alpha+1)$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : |
|---|---|---|

Épreuve de :

Emplacement QR Code

**Consignes**

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$g'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}$$

$$x \leq \frac{\alpha\beta}{2\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x + f(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\alpha\left(1-\frac{1}{\beta}x\right)\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

Tableau de variation

| $x$ | $0$ | $\beta$ | $\frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}$ | $\frac{\beta}{\alpha}$ | $\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+\infty$ |
| $g$ | $0$ $\nearrow$ | $\beta$ $\nearrow$ | | $\searrow$ $\beta$ $\searrow$ | $0$ $\searrow$ | $-\infty$ |

C.

i -

Initialisation

pour $n=0$ :
$u_0 \in [0, \beta]$. La propriété est initialisée.

Hérédité
soit $n \in \mathbb{N}$ fixe :
- supposons que $u_n \in [0, \beta]$
- démontrons que $u_{n+1} \in [0, \beta]$.

$0 \leq u_n \leq \beta$ (Hypothèse de récurrence)

$g(0) \leq g(u_n) \leq g(\beta)$, g étant croissante sur $[0, \beta]$.

$0 \leq u_{n+1} \leq \beta$,

$u_{n+1} \in [0, \beta]$, la propriété est héréditaire.

conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \beta]$.

ii –

D'après 6° a ;
$\forall x \in [0, \beta]$ ; $f(x) \geq 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $w_n \in [0, \beta]$.

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; \quad f(w_n) \geq 0}$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$w_{n+1} - w_n = f(w_n) + w_n - w_n$

$w_{n+1} - w_n = f(w_n) \geq 0$.

$w_{n+1} - w_n \geq 0$ ; $(w_n)$ est donc une suite croissante.

iii.

$(w_n)$ est croissante et minorée par $\beta$. D'après le théorème de la limite monotone ; $(w_n)$ est une suite convergente, et elle converge vers un réel noté $\ell$.

iv.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ; $(w_n)$ est une suite croissant.
D'après C·i ;
$w_n \in [0, \beta]$ ; donc
$w_n \geq w_0$
par passage à la limite :
$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} w_0$

on a donc :

$$\ell \geq w_0$$

<u>v</u>.

$(w_n)$ converge vers $\ell$.

$\ell \geq w_0$ et donc $\ell \geq 0$.
$g$ est continue sur $[0, \beta]$.
$\ell$ est donc solution de l'équation $g(\ell) = \ell$.

D'après 6.b.i, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \beta$$

~~d)~~ $\Rightarrow$ Le résultat signifie que la population globale est en survie $(\beta > 0)$

d)
<u>i</u>.

$$\cdot\ g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) = \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + f\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + \frac{\cancel{\alpha}(\alpha+1)\beta}{2\cancel{\alpha}}\left[1 - \frac{(\alpha+1)\cancel{\beta}}{2\alpha \times \cancel{\beta}}\right]$$

$$= \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + \frac{(\alpha+1)\beta}{2}\left(1 - \frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + \frac{(\alpha+1)\beta}{2}\left(\frac{2\alpha - \alpha - 1}{2\alpha}\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + \frac{(\alpha+1)\beta}{2} \times \left(\frac{\alpha - 1}{2\alpha}\right)$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : |
| --- | --- | --- |

Épreuve de :

Emplacement QR Code

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) = \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)\beta}{4\alpha}$$

$$= \frac{2(\alpha+1)\beta + (\alpha+1)(\alpha-1)\beta}{4\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\beta(2+\alpha-1)}{4\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha+1)^2\beta}{4\alpha}$$

$$\alpha < 1$$

$$\alpha+1 < 2$$

$$\frac{\alpha+1}{2} < 1$$

$$\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 < 1$$

$$\frac{(\alpha+1)^2}{4} < 1$$

$$\boxed{\frac{(\alpha+1)^2\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha} \geqslant 1\right)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Initialisation

pour $n=0$.

$w_0 \in [\beta ; \frac{\beta}{\alpha}]$

La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

- supposons que $w_n \in [\beta , \frac{\beta}{\alpha}]$

- démontrons que $w_{n+1} \in [\beta ; \frac{\beta}{\alpha}]$

$\beta \leq w_n \leq \frac{\beta}{\alpha}$ (HR)

. si $w_n \in [\beta ; \frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}]$.

$\beta \leq u_n \leq \frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}$

$g(\beta) \leq g(u_n) \leq g\left(\frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}\right)$

par croissance.

$\beta \leq u_{n+1} \leq g\left(\frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha}$

$\beta \leq w_{n+1} \leq \frac{\beta}{\alpha}$

. si $W_n \in \left[ \frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha} ; \frac{\beta}{\alpha} \right]$.

$$\frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha} \leq W_n \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

$$g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq g(W_n) \leq g\left(\frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}\right)$$

par décroissance.

$$\beta \leq W_{n+1} \leq g\left(\frac{\beta(\alpha+1)}{2\alpha}\right) \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\beta \leq W_{n+1} \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

$\forall W_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$; $W_{n+1} \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$.

La propriété est héréditaire.

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $W_n \in [\beta ; \frac{\beta}{\alpha}]$

ii - $\forall n \in \mathbb{N}$;

$W_{n+1} = W_n + f(W_n)$

$W_{n+1} - W_n = f(W_n)$

or $\forall n \in \mathbb{N}$; $W_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$.

D'après 6.a.ii, on en déduit que $f(W_n) \leq 0$.

$W_{n+1} - W_n \leq 0$, $(W_n)$ est une suite décroissante.

iii)

$(W_n)$ est décroissante et minorée par $\beta$, donc $(W_n)$ est convergente (théorème de la limite monotone).

Soit $l$ sa limite.

$l \geq \beta$ et $g$ est continue sur $[\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$

$$g(l) = l \Leftrightarrow l = \beta.$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = \beta}$$

$\Rightarrow$ La population survie.

e)

i.

$$W_0 \in [\frac{\beta}{\alpha} ; \frac{(\alpha+1)}{\alpha} \beta].$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \leq W_0 \leq \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$$

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right) \leq g(W_0) \leq g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$ par décroissance

$$\boxed{0 \leq W_1 \leq \beta}$$

$$W_1 \in [0, \beta]$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : |
|---|---|---|

Épreuve de :

**Consignes**

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

<u>11</u> -

D'après 6°c, $\forall n \in \mathbb{N}^*; \; w_n \in [0, \beta]$.

Ainsi, d'après 6°c-<u>V</u>,

$(w_n)$ converge et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = \beta}$

f)

Non car $\forall x \geq \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha} \beta$ ;

$g(x) \leq 0$ par décroissance,

ce qui est impossible

car il s'agit de

la taille

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

EXERCICE 2

1)

a.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def deplacement_pion (n, k):
    position = np.zeros (k+1)
    for j in range (0, k) :
        bille = rd.randint (1, n+1)
        if position [j] < bille :
                position [j+1] = 1 - position [j+1]
        else :
                position [j+1] = 1 + position [j+1]
    return (j)
```

b.

* print ( deplacement_pion (20, 10 ) [-1] ).

ou * print ( deplacement_pion (20, 10) [10] )

c.

En moyenne, pour 10 billes et lorsqu'on effectue 100 déplacement, la position du pion sur l'axe est 5,054.

/

2.

$X_1(\Omega) = \{1\}$

- $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$
- ~~$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$~~

$$\boxed{E(X_1) = 1}$$

3.

$X_2(\Omega) = \{0, 2\}$

- $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{n}$ (on ne peut que tire la bille n°1)

- $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{n-1}{n}$

$E(X_2) = 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{2(n-1)}{n}$

$$\boxed{E(X_2) = \frac{2(n-1)}{n}}$$

4.

$X_k$ est la variable aléatoire donnant la position du pion après le k-ième déplacement.

$\forall k \geq n$ ;

- Dans le pire des cas, l'on a tiré que le numéro 1, ce qui fait que $X_k$ peut être égal à 0.

- Dans le meilleur des cas ; $(X_k = n)$ car s'il a toujour tiré un nombre supérieur au numéro de la bille précédente, ce nombre atteint son maximum qui est n car il ne peut tirer un numéro supérieur à n pour avancer de position.

Ainsi : ~~$X_k \in$~~ $X_k \in [\![ 0, n ]\!]$.

5.

~~a)~~

- Si $(X_{k+1} = 0)$, cela signifie que le pion était nécessairement en 1 en k et qu'il a tiré un numéro inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire 1.

Ainsi :

~~$\mathbb{P}(X_{k+1} =$~~ $\mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1) \cdot \mathbb{P}_{(X_k = 1)}(X_{k+1} = 0)$

$= \mathbb{P}(X_k = 1) \times \frac{1}{n}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \frac{1}{n}}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : |
|---|---|---|

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Si $(X_{k+1}=n)$ ; le pion étant nécessairement sur la position $(n-1)$ en $k$. Il a avancé, c'est-à-dire qu'il a tiré un numéro supérieur à $(n-1)$, c'est-à-dire le seul numéro $n$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_{k+1}=n) = \mathbb{P}_{(X_k=n-1)}(X_{k+1}=n) \cdot \mathbb{P}(X_k = n-1)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1}=n) = \frac{1}{n}\,\mathbb{P}(X_k=n-1)}$$

6.

a)

- $\mathbb{P}_{(X_k=\ell-1)}(X_{k+1}=\ell) = \dfrac{n-\ell+1}{n}$

car s'il veut avancer en $\ell$, il doit tirer un numéro entre $n$ et $\ell$. Or il y a $(n-\ell+1)$ numéro.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b)

. $\mathbb{P}_{(X_k = l+1)}(X_{k+1} = l) = \dfrac{l+1}{n}$

S'il doit reculer, il doit tirer un ~~une~~ numéro entre 1 et $l+1$ ; et il y a $(l+1-1+1)$ termes $\Rightarrow (l+1)$.

c)

$\forall l \in [\![1, n-1]\!]$ ;

$[(X_k = l-1) ; (X_k = l+1)]$ est un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = l) = \mathbb{P}[(X_{k+1} = l) \cap (X_k = l-1)] + \mathbb{P}[(X_{k+1} = l) \cap (X_k = l+1)]$$

$$= \mathbb{P}_{(X_k = l-1)}(X_{k+1} = l) \cdot \mathbb{P}(X_k = l-1) + \mathbb{P}_{(X_k = l+1)}(X_{k+1} = l) \cdot \mathbb{P}(X_k = l+1)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1} = l) = \frac{n-l+1}{n} \mathbb{P}(X_k = l-1) + \frac{l+1}{n} \mathbb{P}(X_k = l+1)}$$

7.

~~$E(X_{k+1}) = \sum k\, \mathbb{P}(X_{k+1} = k)$~~

8. a)

On reconnaît une suite arithmético-géométrique pour $E(X_m)$ $m \geq n$, car :

$$E(X_{m+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_m)$$

et $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ est une constante.

b)

$$x = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x$$

$$x - \left(1 - \frac{2}{n}\right)x = 1$$

$$x\left(1 - 1 + \frac{2}{n}\right) = 1$$

$$\frac{2}{n} \times x = 1 \iff \boxed{x = \frac{n}{2}}$$

/

c)

$$x_k = E(X_k) - x \iff \boxed{x_k = E(X_k) - \frac{n}{2}}$$

$$x_{k+1} = E(X_{k+1}) - \frac{n}{2}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k) - \frac{n}{2}$$

$$\cancel{= 1 + E(X_k) - \frac{2}{n} E(X_k) - \frac{n}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k) - \frac{n}{2} + 1$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k) - \frac{n-2}{2}$$

$$= \left(\frac{n-2}{n}\right) E(X_k) - \frac{n-2}{2}$$

$$= \frac{n-2}{n}\left( E(X_k) - \frac{n}{2}\right)$$

$x_{k+1} = \left(\frac{n-2}{n}\right) x_k$. $(x_k)$ est donc une suite géométrique de raison $\left(\frac{n-2}{2}\right)$.

$$\cancel{\cdot\ x_1 = E(X_1) - \frac{n}{2}}$$

$$\cancel{x_1 = 1 - \frac{n}{2}}$$

$$\cancel{\forall k \in \mathbb{N} ;}$$

$$\cancel{\boxed{x_k = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-1}}}$$

$$\cancel{x_k = -\frac{(n-2)^4}{}}$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

**Code épreuve :**

**Nombre de pages :**

**Session :**

**Épreuve de :**

**Consignes**

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

d)

$$x_k = E(X_k) - \frac{n}{2}$$

$$E(X_k) = x_k + \frac{n}{2}$$

$$\boxed{E(X_k) = \frac{n}{2} + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)^{k-1}}$$

$$\cdot\, x_n = E(X_n) - \frac{n}{2}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ ;

$$\boxed{x_k = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{k-n} \times \left[E(X_n) - \frac{n}{2}\right]}$$

d)

$$x_k = E(X_k) - \frac{n}{2}$$

$$E(X_k) = x_k + \frac{n}{2}$$

$$\boxed{E(X_k) = \frac{n}{2} + \left[ E(X_n) - \frac{n}{2} \right] \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-n}}$$

g)

- $\lim\limits_{k \to +\infty} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-n} = 0$ car $\left| \frac{n-2}{n} \right| < 1$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_k) = \frac{n}{2}}$

Cela signifie que plus ~~la positio~~ le nombre de déplacement augmente, plus en tend vers la moitié ~~de~~ l'abscisse égale au nombre de bille choisie.

# EXERCICE 3

## Partie I

1.

- Positivité

- $\forall t \in [0,1]$ ; $f_0(t) = (\alpha+1)t^\alpha \geq 0$
- $\forall t \in ]-\infty ; 0[ \cup ]1 ; +\infty[$ ; $f_0(t) = 0 \geq 0$

$f_0$ est positive sur $\mathbb{R}$.

- Continuité

- $f_0$ est continue sur $[0,1]$ en tant que fonction ~~puissance~~ polynome.
- $f_0$ est continue sur $]-\infty ; 0[ \cup ]1, +\infty[$ en tant que fonction nulle.

$f_0$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1.

- Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,dt$

- $\int_{-\infty}^{0} f_0(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} f_0(t)\,dt = 0$

- $\int_{0}^{1} f_0(t)\,dt = \int_{0}^{1} (\alpha+1)t^\alpha\,dt$

$= \cancel{(\alpha+1)} \times \frac{1}{\cancel{(\alpha+1)}} [t^{\alpha+1}]_0^1$

$= 1 - 0$

$$\int_0^1 f_0(t)\,dt = 1.$$

Les 3 intégrales $\int_{-\infty}^{0} f_0(t)dt$, $\int_0^1 f_0(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f_0(t)dt$ convergent, on a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Les 3 conditions sont réunies : $f_0$ peut donc être considérée comme une densité de probabilité.

2.

a)

- $f_0$ est dérivable sur $]0,1[$ en tant que fonction monome / polynome.

- $$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ >}} \frac{f_0(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ >}} \frac{(\alpha+1)x^\alpha - (\alpha+1)\alpha^\alpha}{x-\alpha}$$

$$= \lim_{\substack{x \to \alpha \\ >}} \frac{(\alpha+1)(x^\alpha - \alpha^\alpha)}{x-\alpha}.$$

Or :

$$(x^\alpha - \alpha^\alpha) = (x-\alpha)(x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2}\alpha + \dots + \alpha^{\alpha-1})$$

Donc :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f_0(x) - f_0(a)}{x-\alpha} = (\alpha-1)(x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2}\alpha + \dots + \alpha^{\alpha-1})$$

$$\boxed{= 0}$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : |
|---|---|---|

Épreuve de :

**Consignes**
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

2) a)

- $f_0$ est dérivable sur $]0,1[$ en tant que fonction monome.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x) - f_0(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{(\alpha+1)x^{\alpha}}{x}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (\alpha+1)x^{\alpha-1}$

$= \underline{0}$

$f'(0) = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{(\alpha+1)x^{\alpha} - (\alpha+1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{(\alpha+1)(x^{\alpha} - 1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{(\alpha+1)\cancel{(x-1)}(x^{\alpha-1} + \dots + 1)}{\cancel{x-1}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f_0(x) - f_0(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x+1)(x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} + \dots + 1)$$

$$= 0.$$

$$\boxed{f_0'(1) = 0}$$

~~b)~~ $f_0$ est donc dérivable sur $[0,1]$

b)

Initialisation
pour $n = 0$

$- \; x^0 f_0 = 1 f_0 = f_0$

Hérédité
soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
~~dé~~ supposons que $P(n)$ est vraie

- démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

on a :

$\cancel{f_{n+1}(t) = 1}$

$f_{n+1}(t) = t\, f_n'(t)$

$= t\,(\alpha^n f_0)'$ ( H.R)

$= t\,.\,\alpha^n\,(f_0)'$

$= t\,.\,\alpha^n \times ((\alpha+1)\,t^{\alpha})'$

$= t\,.\,\alpha^n \times (\alpha+1) \times \alpha \times t^{\alpha-1}$

$= \alpha^n\,.\,\alpha\,(\alpha+1)\,t^{\alpha-1} \times t$

$= \alpha^{n+1}\,(\alpha+1)\,t^{\alpha}$

$f_{n+1}(t) = \alpha^{n+1} f_0$ , la propriété est héréditaire.

<u>conclusion</u> : ~~to~~ $f_n = \alpha^n f_0$

c)

$\int_0^1 C_n\, f_n(t)\,dt = \int_0^1 C_n \times \alpha^n\,.\,f_0(t)\,dt$

~~$= \int_0^1 C_n$~~ $= C_n\,.\,\alpha^n \int_0^1 f_0(t)\,dt$

$= C_n\,.\,\alpha^n.$

or pour être une densité : $\int_0^1 C_n f_n(t)\,dt$ doit être égale à $1$, on a :

$$\int_0^1 c_n f_n(t)\,dt = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c_n \alpha^n \int_0^1 f_0(t)\,dt = 1$$

$$\Rightarrow \quad c_n \cdot \alpha^n \times 1 = 1$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{\alpha^n}}$$

Ainsi ; $c_n f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en 0 et en 1 ; positive et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_n f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} c_n f_n(t)\,dt + \int_0^1 c_n f_n(t)\,dt + \int_1^{+\infty} c_n f_n(t)\,dt$$

$$= 0 + 1 + 0$$

$$= 1.$$

~~d)~~ on a donc $\boxed{\frac{f_n}{\alpha^n}}$

d)

$$f_n = \alpha^n f_0$$

$$c_n f_n = \alpha^n f_0 \Rightarrow \alpha^n f_n = \alpha^n f_0$$

$$\Rightarrow \boxed{f_n = f_0} \Rightarrow \boxed{\alpha^n f_n = f_0 \alpha^n}$$

# Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session :

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie II

~~5) $c_n f_n$ est une densité de $X_n$.~~

~~et $c_n = \alpha^n$.~~

~~Ainsi, $\boxed{c_0 = 1}$~~

~~Donc $f_0$ est une densité~~

5)

Si $c_0 f_0$ est une densité de probabilité :

$$\int_0^1 c_0 f_0(t)\,dt = 1 \iff \int_0^1 c_0 e^t\,dt = 1$$

$$\iff c_0 [e^t]_0^1 = 1$$

$$\iff c_0 (e-1) = 1$$

$$\iff \boxed{c_0 = \frac{1}{e-1}}$$

La fonction $\frac{1}{e-1} f_0$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ (continue sauf éventuellement en 0).

6)

$X_0$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{t\,\ell} f_0(t)\, dt$ converge.

$$\cdot \int_{-\infty}^{0} t\, \ell_0 f_0(t)\, dt = \int_{1}^{+\infty} t\, \ell_0 f_0(t)\, dt = 0$$

$$- \int_{0}^{1} t\, \ell_0 f_0(t)\, dt = \int_0^1 \frac{te^t}{e-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{e-1} \int_0^1 te^t\, dt.$$

posons :

$$\begin{cases} \cdot\ u'(t) = e^t \longrightarrow u(t) = e^t \\ \cdot\ v(t) = t \longrightarrow v'(t) = 1 \end{cases}$$

u et v sont ~~con~~ dérivables
u' et v' sont continues.

$$\int_0^1 t\, \ell_0 f_0(t)\, dt = \frac{1}{e-1}\left[ [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{e-1}\left[ e - [e^t]_0^1 \right]$$

$$= \frac{1}{e-1}\left[ e - (e-1) \right]$$

$$\int_0^1 t\,c_0 f_0(t)\,dt = \frac{1}{e-1} \times 1$$

$$\int_0^1 t f_0(t) . c_0\,dt = \frac{1}{e-1}$$

Ainsi, par la relation de Charles;

$$\boxed{E(X_0) = \frac{1}{e-1}}$$

7.

$$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 t f_n'(t)\,dt$$

Posons : $\begin{cases} u'(t) = f_n'(t) \rightarrow u(t) = f_n(t) \\ v(t) = t \rightarrow v'(t) = 1 \end{cases}$

u et v ~~sont~~ dérivables
u' et v' sont continues.

$$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = \left[ t f_n(t) \cancel{dt} \right]_0^1 - \int_0^1 f_n(t)$$

$$= f_n(1) - 0 - \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

| Code épreuve : | Nombre de pages : | Session : |
| --- | --- | --- |

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$\boxed{\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt}$$

8.

Initialisation

pour $n=0$.

$\forall t \in [0,1]$

- $f_0(t) = e^t$
- $P_0(t)e^t = 1\,e^t = e^t$

} La propriété est initialisée.

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

- supposons que $P_n$ est vraie
- démontrons que $P_{n+1}$ est vraie

$\forall t \in [0,1]$

$f_{n+1}(t) = t f_n'(t)$

$= t\,(P_n(t)e^t)'$ (H.R)

$= t\,(P_n'(t).e^t + P_n(t).e^t)$

$= te^t\,(P_n'(t) + P_n(t))$

$= t\,(P_n'(t) + P_n(t))\,e^t$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$f_{n+1}(t) = P_{n+1}(t)e^t$ , la propriété est héréditaire.

Conclusion ; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$f_n(t) = P_n(t)e^t.$$

9)

~~D'après~~ ;

$\forall n \in \mathbb{N}$ ;

$$f_{n+1}(1) = P_n(1)e$$

$$= (P_n'(1) + P_n(1))e$$

$$= eP_n(1) + eP_n'(1)$$

or $eP_n(1) = f_n(1)$.

$$\boxed{f_{n+1}(1) = f_n(1) + eP_n'(1)}$$

$\boxed{f_n(1) + eP_n'(1) \geq f_n(1)}$ car $eP_n'(1) \geq 0$.

10. $$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

. $$f_{n+1}(t)\,dt \geq f_n(1) \cancel{dt}$$

$$\cancel{\Rightarrow f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt \geq f_n(1)}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow -\int_0^1 f_n(t)\,dt \geq 0}$$

$$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt \geq \int_0^1 f_n(1)\,dt$$

$$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt \geq f_n(1)\,[t]_0^1$$

$$\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt \geq f_n(1)$$

$$f_n(1) \leq \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt$$