

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) f_m est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale

$$\text{de plus: } \forall x \in [0,1], f_m'(x) = \sum_{k=1}^m k k x^{k-1} \\ = \sum_{k=1}^m k^2 x^{k-1}$$

$$\text{et: } \forall k \in [1, m], \forall x \in [0,1], k^2 x^{k-1} \geq 0$$

$$\text{donc: } \forall x \in [0,1], \sum_{k=1}^m k^2 x^{k-1} \geq 0$$

$$\text{de plus: } f_m'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sum_{k=1}^m k^2 x^{k-1} = 0$$

$$\text{or si } x=0: f_m'(0) = 0^0 + \sum_{k=2}^m k^2 x^{k-1} \\ = 1 + \sum_{k=2}^m k^2 x^{k-1} > 0$$

$$\text{et si } x \in]0,1]: f_m'(x) > 0$$

bilan: $\forall x \in [0,1], f_m'(x) > 0$
donc: f_m est strictement croissante sur $[0,1]$

1) b) f_m est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$,
 ainsi d'après le théorème de la bijection, f_m réalise une
 bijection de $[0, 1]$ sur $[f_m(0), f_m(1)]$
 ie sur $[0, \frac{m(m+1)}{2}]$

$$\text{or: } m \geq 1 \\ \text{donc } m^2 \geq m$$

$$\text{donc } m^2 + m \geq 2m$$

$$\text{donc } \frac{m^2 + m}{2} \geq \frac{2m}{2} \geq m \geq 1$$

$$\text{donc: } 1 \in [0, \frac{m(m+1)}{2}]$$

donc: il existe un unique $u_m \in [0, 1]$ tel que: $f_m(u_m) = 1$

$$1) c) f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto \sum_{k=1}^n k n^k = n$$

$$\text{donc: } \underline{u_1 = 1}$$

de telle sorte qu'on ait: $f_1(1) = 1$

$$2) a) \text{ Soit } n \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned}
 b_{m+1}(x) &= \sum_{k=1}^{m+1} kx^k \\
 &= \sum_{k=1}^m kx^k + (m+1)x^{m+1} \\
 &= \underline{b_m(x) + (m+1)x^{m+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) b) \quad b_{m+1}(U_m) &= b_m(U_m) + (m+1)(U_m)^{m+1} \\
 &= 1 + (m+1)(U_m)^{m+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{or: } U_m \in [0, 1]$$

$$\text{donc: } U_m^{m+1} \in [0, 1]$$

$$\text{donc } (m+1)(U_m)^{m+1} \geq 0$$

$$\text{donc: } \underline{b_{m+1}(U_m) \geq 1}$$

$$2) c) \quad \text{on a: } b_{m+1}(U_{m+1}) = 1$$

$$\text{donc: } b_{m+1}(U_m) > b_{m+1}(U_{m+1})$$

donc par stricte croissance de b_{m+1}^{-1} , bijection réciproque de b_{m+1} , on a:

$$U_m > U_{m+1}$$

$$\text{donc: } \underline{(U_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

$$\begin{aligned}
 2) d) \quad \text{on a: } & (U_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ décroissante} \\
 & \text{et: } \forall m \in \mathbb{N}^*, U_m \geq 0
 \end{aligned}$$

donc la suite est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

3) a) Soit $n \neq 1$

$$\sum_{k=0}^m n^k = n^0 \times \frac{1-n^{m+1}}{1-n} = \frac{1-n^{m+1}}{1-n}$$

3) b) Soit $n \neq 1$

on a donc :

$$\sum_{k=1}^m k n^{k-1} = \frac{-(m+1)n^m(1-n) - (1-n^{m+1})(-1)}{(1-n)^2}$$

(en dérivant)

$$= \frac{1-n^{m+1} - (m+1)n^m(1-n)}{(1-n)^2}$$

$$= \frac{1-n^{m+1} - (mn^m + n^m)(1-n)}{(1-n)^2}$$

$$= \frac{1-n^{m+1} - (mn^m - mn^{m+1} + n^m - n^{m+1})}{(1-n)^2}$$

$$= \frac{mn^{m+1} - (m+1)n^m + 1}{(1-n)^2}$$

3) c) Soit $n \in [0, 1[$

$$b_m(n) = \sum_{k=1}^m k n^k$$

si $n \neq 0$:

$$b_m(n) = \frac{n}{n} \times \sum_{k=1}^m k n^k$$

$$= n \sum_{k=1}^m k n^{k-1}$$

$$= n \left(\frac{mn^{m+1} - (m+1)n^m + 1}{(1-n)^2} \right)$$

si $n=0$: $b_m(n) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$9) a) f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + 2x^2$$

$$\text{on a : } f_2(u_2) = 1 \quad \text{donc } u_2 + 2u_2^2 = 1$$

$$\text{il faut résoudre : } 2u_2^2 + u_2 - 1 = 0$$

$$\text{on pose } \Delta : 1 - 4(2)(-1)$$

$$\Delta = 9 > 0$$

$$\text{donc : } u_2 = \frac{-1 - 3}{4} \quad \text{ou } u_2 = \frac{-1 + 3}{4}$$

$$u_2 = -1 \quad \text{ou } u_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{or : } u_2 \in [0, 1]$$

$$\text{donc : } \underline{u_2 = \frac{1}{2}}$$

Soit $n \geq 2$

$u_2 = \frac{1}{2}$ et (u_n) est décroissante minorée
par 0, donc on a : $u_3 \in [0, \frac{1}{2}], u_4 \in [0, \frac{1}{2}] \dots$

Bilan: $\forall m \geq 2, 0 \leq U_m \leq \frac{1}{2}$

a) b) $\forall m \geq 2, 0 \leq U_m \leq \frac{1}{2}$

donc : $\forall m \geq 2, 0 \leq U_m^m \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m$ par croissance de

$n \mapsto n^m$ sur
 $[0, 1]$

donc : $\forall m \geq 2, 0 \leq U_m^m \leq \frac{1}{2^m}$ (*)

comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on a par théorème

d'encadrement :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^m = 0$

de même, avec (*) on a : $\forall m \geq 2, 0 \leq m U_m^m \leq \frac{m}{2^m}$

et comme $\frac{m}{2^m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées,

on a : par théorème d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} m U_n^m = 0$

a) c) Soit $m \geq 2$

U_m est défini par la relation : $f_m(U_m) = 1$

ie : $U_m \left(\frac{m U_m^{m+1} - (m+1)(U_m)^m + 1}{(1-U_m)^2} \right) = 1$

$$\text{donc: } U_n (n U_n^{n+1} - (n+1) U_n^n + 1) = (1 - U_n)^2$$

$$\text{donc: } n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} + U_n = 1 + U_n^2 - 2 U_n$$

$$\text{donc: } \underline{U_n^2 - 3 U_n + 1 = n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1}} \quad (*)$$

a) d) on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n U_n^{n+2} = 0$ (avec la question 4) b),
par unicité de la limite entre U_n^n
et U_n^{n+2})

et: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^{n+1} = 0$ pour les mêmes raisons.
donc $(n+1) U_n^{n+1} \rightarrow 0$

~~avec la question précédente, on a: $U_n^2 - 3 U_n + 1 = n U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1}$~~

donc: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n^2 - 3 U_n + 1 = 0$ par passage à la limite dans (*)

donc à partir d'un certain rang: $U_n^2 - 3 U_n + 1 = 0$

$$\text{on pose } \Delta: 9 - 4 = 5$$

$$U_n = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad U_n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Or: } 4 < 5 < 9$$

$$\text{donc: } 2 < \sqrt{5} < 3$$

$$\text{donc: } 0 < 3 - \sqrt{5} < 1$$

$$\text{donc: } 0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{5} + 3}{2} < 3$$

donc comme: $\forall n \geq 2, 0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

$$\text{on a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = l$$

Exercice 2:

1) a) (i) $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in E$ on choisissant $(a, b) = (0, 0)$

(iii) Soient M_1 et M_2 deux matrices de E et λ un réel

on note $M_1(a_1, b_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ b_1 & 2a_1 - b_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $M_2(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ b_2 & 2a_2 - b_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda M_1(a_1, b_1) + M_2(a_2, b_2) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda b_1 + b_2 & \lambda(2a_1 - b_1) + 2a_2 - b_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \\ \lambda b_1 + b_2 & 2(\lambda a_1 + a_2) - (\lambda b_1 + b_2) & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

donc: $\lambda M_1 + M_2 \in E$

Bilan: avec (i), (ii) et (iii), E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) b) $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que: $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{on a donc : } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} \lambda_1 + 0 \times \lambda_2 = 0 \\ 0 \times \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ie : } \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

donc : (e_1, e_2) est libre

de plus : $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$ donc (e_1, e_2) est
génératrice de E

Bilan : (e_1, e_2) est une base de E et $\dim E = 2$

2) Les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables

de plus : pour chacune des matrices, on voit que, en notant
 C_1 et C_3 la première et dernière colonne, on a :

$$C_1 = C_3$$

donc : le rang des matrices de E n'est pas égal à 3
donc : les matrices de E ne sont pas inversibles

3) si l'on prend $a=1$ et $b=3$, on a :

$$M(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

donc: $A \in E$

4) def matA():

return np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])

5) a) comme la question 2) nous fait remarquer que les matrices de E ne sont pas inversibles, on a :

$$\underline{0 \in Sp(A)}$$

$$\begin{aligned} 5) b) \quad A - 5I &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on admettra que $A - 5I$ et $A + 4I$ ne sont pas inversibles

donc: il existe $X \neq 0$ tel que: $\begin{cases} (A - 5I)X = 0 \\ (A + 4I)X = 0 \end{cases}$
 $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec

ie $\begin{cases} AX - 5X = 0 \\ AX + 4X = 0 \end{cases}$

$$\text{ie } \begin{cases} AX = SX \\ AX = -AX \end{cases}$$

donc: S et $-A$ sont des valeurs propres de A

5) c) $E_0(A)$:

soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$X \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ 3a - b + 3c = 0 \\ a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 3c = 0 \\ 3b = -a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{3}a + 3c = 0 \\ b = -\frac{1}{3}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{10}c \\ b = -\frac{1}{3}a = \frac{3}{10}c \end{cases}$$

$$\text{donc } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{9} \end{pmatrix}$ est une base de $E_0(A)$

de même : $X \in E_s(A) \Leftrightarrow AX = SX$

$$\Leftrightarrow (A - sI)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ 3a - 6b + 3c = 0 \\ a + 3b - 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{4}L_1 \\ -15b + 15c = 0 \\ \frac{15}{4}b - \frac{15}{4}c = 0 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow 4L_2 + 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 3b + c = 0 \\ -15b = -15c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = c \end{cases}$$

donc une base de $E_s(A)$ est : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

de même : $X \in E_{-a}(A) \Leftrightarrow AX = -aX$

$$\Leftrightarrow (A + aI)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 3b + c = 0 \\ 3a + 3b + 3c = 0 \\ a + 3b + 5c = 0 \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 3b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{12}{5}b + \frac{29}{5}c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b = -2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases}$$

donc une base de $E_{-a}(A)$ est : $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

on propose donc : $(U, V, W) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

6) $n_1 = 1$ et $n_2 = 1$

7) a) on admettra

7) b) tous les matrices de E sont diagonalisables, elles peuvent donc toutes s'écrire sous la forme : PDP^{-1} où P contient en colonnes U, V et W et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$

ainsi, pour avoir A^m où A est une matrice de E , il suffit de calculer $P D^m P^{-1}$
(la preuve de ceci peut éventuellement se faire par récurrence)

7)c) def puissanceM(a,b,m):

$P = \text{mp.array}([[1, -1/3, -10/9], [1, 1, 1], [1, -2, 1]]) \#$
 $D = \text{mp.array}([[0, 0, 0], [0, 5**m, 0], [0, 0, (-1)**m]]) \#$ les vecteurs
 return mp.dot(P, D, al. inv(P))
 # la matrice
 D

Exercice 3:

1) (i) f_m est définie sur \mathbb{R}

de plus: soit x dans $[0, m]$

$$0 \leq x \leq m \\ \text{donc } 0 \leq \frac{x}{m} \leq 1 \quad (m \neq 0)$$

$$\text{donc } 1 - \frac{x}{m} \in [0, 1]$$

$$\text{donc: } \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} \in [0, 1]$$

donc: f_m est positive sur $[0, m]$

et comme f_m vaut 0 ailleurs, f_m est positive sur \mathbb{R}

(ii) f_m est continue sur $]-\infty; 0[\cup]m; +\infty[$ comme fonction constante et sur $[0, m]$ comme composée de fonctions qui le sont:

$$x \mapsto 1 - \frac{x}{m} \quad \text{et} \quad x \mapsto x^{m-1}$$

donc : f_m est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en m

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t) dt &= \int_0^m f_m(t) dt \\ &= \int_0^m \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt \\ &= - \int_0^m - \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt \\ &= - \left[\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m \right]_0^m \\ &= - (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc avec (i), (ii) et (iii), f_m est bien une densité

2) a) X_m admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t f_m(t) dt$ converge absolument

$$\Leftrightarrow \int_0^m t \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt \text{ converge absolument}$$

or cette intégrale n'est pas impropre donc converge

Bilan: $E(X_m)$ existe

donc: $\frac{1}{m} E(X_m)$ existe et $1 - \frac{1}{m} E(X_m)$ aussi, ie:

$E\left(1 - \frac{X_m}{m}\right)$ existe (linéarité de l'espérance)

de même, X_m admet une variance $\Leftrightarrow \int_0^m t^2 \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt$ converge absolument

comme elle converge, $V(X_m)$ existe

donc $E(X_m^2)$ existe

donc: $1 + \frac{E(X_m^2)}{m^2} - \frac{2E(X_m)}{m}$ existe, ie:

$E\left(\left(1 - \frac{X_m}{m}\right)^2\right)$ existe

2)b) calculons désormais l'espérance et la variance de X_m

$$E(X_m) = \int_0^m t \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt$$

on pose: $u = t$ $u' = 1$

$$v = -\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m \quad v' = \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1}$$

par I.P.P comme les fonctions sont \mathcal{C}^2 :

$$E(X_m) = \left[-t \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m \right]_0^m - \int_0^m - \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m dt$$

$$= \int_0^m \left(1 - \frac{t}{m}\right)^m dt$$

$$= \left[-\frac{m}{m+1} \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m+1} \right]_0^m$$

$$= -\frac{m}{m+1}$$

$$E(X_m^2) = \int_0^m t^2 \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt$$

on pose: $u = t^2$ $u' = 2t$
 $v = -\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m$ $v' = \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a par IPP :

$$E(X_n^2) = \left[-t^2 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^m - \int_0^m -2t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$
$$= \int_0^m 2t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$\text{(autre IPP)} = \left[2t \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right]_0^m - \int_0^m 2 \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$
$$= 2 \int_0^m - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$
$$= 2 \left[\frac{m}{n+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right]_0^m$$
$$= \frac{2m}{n+1}$$

$$\text{donc } V(X_n) = \frac{2m}{n+1} - \left(\frac{-m}{n+1}\right)^2 \quad (\text{Koenig-Huygens})$$
$$= \frac{2m}{n+1} - \frac{m^2}{(n+1)^2}$$

3)

Soit $n \in [0, m]$

$$\begin{aligned}
 F_m(n) &= \int_0^n f_m(t) dt \\
 &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{m}\right)^{m-1} dt \\
 &= \left[-\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m \right]_0^n \\
 &= -\left(1 - \frac{n}{m}\right)^m + 1 \\
 &= \underline{1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^m}
 \end{aligned}$$

Soit $n < 0$

$$F_m(n) = \int_{-\infty}^n f_m(t) dt = \underline{0}$$

Soit $n \geq m$

$$F_m(n) = \underline{1}$$

a) a) Soit $n < 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(n) = \underline{0}$$

a) b) pour $n \geq 0$

on a vu en 3) que: si $n \leq m$: $F_m(n) = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^m$

ou: $n \leq m \Leftrightarrow m \geq \lfloor n \rfloor + 1$

donc: $\forall n \geq \lfloor n \rfloor + 1$, $F_n(n) = 1 - \left(1 - \frac{n}{n}\right)^n$

4)c) Soit $n \geq 0$

$$\ln\left(1 - \frac{n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{n}$$

$$\text{donc } n \ln\left(1 - \frac{n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \times \frac{n}{n}$$

$$\text{donc } n \ln\left(1 - \frac{n}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$$

$$\text{donc } \underline{n \ln\left(1 - \frac{n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -n}$$

4)d) on a par continuité de exp sur \mathbb{R} :

$$e^{n \ln\left(1 - \frac{n}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-n}$$

$$\text{ie: } \left(1 - \frac{n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-n}$$

$$\text{donc: } 1 - \left(1 - \frac{n}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n}$$

donc: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{Z} X$ où X est définie

$$\text{par: } \forall n \in \mathbb{R}, F_X(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 - e^{-n} & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

car on peut estimer que à partir d'un certain rang, on aura n toujours supérieur à n donc on ne sera jamais dans le cas $n > n$

$$\text{ie: } \underline{X \subset \mathcal{E}(1)}$$

$$5) \text{ a) si } n < 0 : G(n) = 0$$

$$\text{si } n > 1 : G(n) = 1$$

$$\text{si } n \in [0, 1] : G(n) = n$$

5) b) Soit $n \in \mathbb{R}$

$$P(Z_m > n) = P(mM_m > n)$$

$$= P(M_m > \frac{n}{m})$$

$$= P\left(\bigwedge_{i=1}^m (U_i > \frac{n}{m})\right)$$

$$= \prod_{i=1}^m P(U_i > \frac{n}{m})$$

par indépendance des U_i

$$= \prod_{i=1}^m \left(1 - P(U_i \leq \frac{n}{m})\right)$$

$$= \prod_{i=1}^m \left(1 - G\left(\frac{n}{m}\right)\right)$$

car les U_i ont pour fonction de répartition G

$$\text{si } n < 0: P(Z_m > n) = \prod_{i=1}^m 1 = 1$$

$$\text{si } n > m: P(Z_m > n) = \prod_{i=1}^m (1 - 1) = 0$$

$$\text{si } n \in [0, m]: P(Z_m > n) = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{n}{m}\right) = \left(1 - \frac{n}{m}\right)^m$$

$$\text{donc: } \forall n \in \mathbb{R}, F_{Z_m}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n > m \\ 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^m & \text{si } n \in [0, m] \end{cases}$$

5) c) les deux variables ayant la même fonction de répartition, Z_m a la même loi que X_m

5) d) def approx $X(m)$:

$L = []$

for i in range $(m+1)$:

$U = \text{rd.random}()$

$L.append(U)$

on réalise m simulations
d'une uniforme sur $[0, 1]$,
qu'on stocke dans une
liste

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

```
for j in range(len(L)) : # on cherche le minimum
    t = 0 # dans la liste
    while L[i] > t :
        t = j
    return m * L[j] # on renvoie m * Mm
```

c'est-à-dire $2m$
(même loi que X_n)

problème :

```
1) def varX(m):
    k = rd.randint(1, m+2) # choix de l'urne, il y en a 2
    if k == m+1: # l'urne ne contient que des
        X = 0 # boules noires
    elif k == 1: # l'urne ne contient que des
        X = 1 # boules blanches
    else :
        X = 1
        while rd.randint(1, m+1) <= j-1 :
            X = X+1
    return (X)
```

2) Soit $k \in \llbracket 1, m+1 \rrbracket$

on choisit l'urne au hasard

donc $\underline{P(U_k) = \frac{1}{n+1}}$ (équiprobabilité)

3) a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

si U_k est réalisé, alors on a choisi l'urne U_k

on a exclu le cas $k = n+1$, donc il y a forcément au moins une boule blanche dans l'urne.

on a alors: $X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $X_n \subset \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$

donc $\underline{P(X_n = j) = \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right)^{j-1} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)}$ pour tout j de \mathbb{N}^*

(proportion de boules blanches sur boules totales de l'urne)

3) b) else:

$X = \text{mp. géométrique}(n-k+1/n)$
return (X)

4) a) sachant qu'on est dans l'urne U_{n+1} , il n'y a aucune boule blanche

donc: $P_{U_{n+1}}(X_n = 1) = 0$

a) b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} P_{U_k}(X_n = 1) &= \frac{P([U_k \cap \{X_n = 1\}])}{P(U_k)} \\ &= \underline{\underline{\frac{n-k+1}{n}}} \end{aligned}$$

4) c) comme $\{U_a, k \in [1, m+1]\}$ est un système complet

d'événements, on a avec la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_m=1) &= \sum_{a=1}^{m+1} P(U_a \cap [X_m=1]) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} P(U_k) P_{U_k}(X_m=1) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+1} \times \frac{m-k+1}{m} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+1} \times \left(1 - \frac{k}{m} + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

erreur de calcul, on admettra que $P(X_m=1) = \frac{1}{2}$

5) a) sachant que l'on se trouve dans l'une $m+1$, il n'y a que des bancs noirs

donc $P_{U_{m+1}}(X_m=j) = 0$

5) b) Soit $k \in [1, m]$

$$\begin{aligned} P_{U_k}(X_m=j) &= \frac{P(U_k \cap (X_m=j))}{P(U_k)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{m-k+1}{m}\right)^{j-1} \left(\frac{m-k+1}{m}\right)}{\frac{1}{m+1}} \end{aligned}$$

5) c) comme précédemment, avec le SCE $\{U_a, k \in [1, m+1]\}$
on a :

$$P(X_m=j) = \sum_{a=1}^{m+1} P(U_a) P_{U_a}(X_m=j)$$

$$= \sum_{k=n}^{n+1} \left(1 - \frac{n-k+1}{m}\right)^{j-1} \binom{n-k+1}{m}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k-1}{m}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k-1}{m} + \frac{1}{m}\right)$$

=

il ya sûrement une erreur de calcul

on admettra le résultat

6) a) soit $k \in [0, n-1]$

$$0 \leq k \leq m-1$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{k}{m} \leq \frac{m-1}{m} < 1$$

$$\text{donc } \left|\frac{k}{m}\right| < 1$$

donc $\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{k}{m}\right)^j$ est une série géométrique

$$\text{donc: } \sum_{j=2}^{\infty} \left[\left(\frac{k}{m}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{m}\right)^j \right] = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{k}{m}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{k}{m}\right)^j$$

$$= \frac{m}{k} \times \left(\frac{k}{m} \right)^2 \times \frac{1}{1 - \frac{k}{m}} - \left(\frac{k}{m} \right)^2 \times \frac{1}{1 - \frac{k}{m}}$$

$$= \frac{m}{k} \left(\frac{k}{m} \right)^2 \times \frac{m}{m-k} - \left(\frac{k}{m} \right)^2 \times \frac{m}{m-k}$$

$$= \frac{k}{m} \times \frac{m}{m-k} - \frac{k^2}{m} \times \frac{1}{m-k}$$

$$= \frac{k}{m} \left(\frac{m}{m-k} - k \right)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Emplacement
GR Code

Épreuve de : Mathématiques EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6)a) soit $k \in [0, m-1]$. Soit $A \geq 2$

$$\sum_{j=2}^A \left[\left(\frac{k}{m} \right)^{j-1} - \left(\frac{k}{m} \right)^j \right] = \left(\frac{k}{m} \right) - \left(\frac{k}{m} \right)^A \quad \text{par télescopage}$$

$$\text{or: } \frac{k}{m} \in [0, 1[$$

$$\text{or: } 0 \leq k \leq m-1$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{k}{m} \leq \frac{m-1}{m} < 1$$

$$\text{donc } \left(\frac{k}{m} \right)^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{m} \right)^{j-1} - \left(\frac{k}{m} \right)^j \right] = \frac{k}{m}$$

$$6)b) P(X_m \geq 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(X_m = j)$$

$$= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(\frac{k}{m} \right)^{j-1} - \left(\frac{k}{m} \right)^j \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^j \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} k$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \times 2$$

$$7) a) P(X_n=0) = 1 - (P(X_n \geq 2) + P(X_n=1))$$

$$= 1 - \left(2 \times \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 1 - 2 \times \frac{n-1}{n+1} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 2 \times \frac{n-1}{n+1}$$

$$8) a) E(X_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} j P(X_n=j)$$

si et seulement si cette série converge

considérons $A \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^A j P(X_m=j) &= \sum_{j=1}^A j \times \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\binom{k}{n}^{j-1} - \binom{k}{n}^j \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^A \left[j \binom{k}{n}^{j-1} - j \binom{k}{n}^j \right] \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A \binom{k}{n}^{A+1} - (A+1) \binom{k}{n}^A + 1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} \right. \\
&\quad \left. - \binom{k}{n} \left(\frac{A \binom{k}{n}^{A+1} - (A+1) \binom{k}{n}^A + 1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

on admettra le résultat

8)b) $n = \text{int}(\text{input}(\text{'entrez la valeur de n: '}))$
 $v = \text{mp.arange}(1, n+1)$
 $E = (n / (n+1)) * \text{mp.sum}([1/k \text{ for } k \text{ in range}(1, n+1)])$
print(E)

9)a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [p, p+1]$

$$p \leq t \leq p+1$$

$$\text{donc } \frac{1}{p} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{p+1}$$

donc par croissance de l'intégrale sur $[p, p+1]$:

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt$$

$$\text{donc } \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$$

9) b) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

en sommant la relation précédente :

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

donc $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$ (relation de Charles)

donc $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq [\ln t]_1^n \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

donc $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln n \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

9) c) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

on a : $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \geq \ln n$

donc $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \geq \ln n + \frac{1}{n}$

et $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq \ln n$

donc $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p} + 1 \leq \ln n + 1$

donc $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$

donc : $\ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$

9) d) en divisant par $\ln n$ (car $n \neq 1$), on a :

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 32

Session : 2025

Épreuve de : Maths, EPHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\frac{\ln n + \frac{1}{n}}{\ln n} \leq \frac{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}{\ln n} \leq \frac{\ln n + 1}{\ln n}$$

par passage à la limite, $\frac{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

donc $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$

donc $E(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \times \ln n$
 $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$
