Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1) a) on suppose M μ-réversible et $m_{i,j} \neq 0$ pour un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

on a : pour un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $\mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$

supposons par l'absurde que $m_{j,i} = 0$

alors : $\mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i} = 0$

et comme $m_{i,j} \neq 0$, il vient : $\mu_i = 0$

or : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ donc tous les $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne peuvent pas valoir 0

on aboutit donc à une contradiction

Bilan : $m_{j,i} \neq 0$

1) b) on choisit $\mu = \left(\frac{1}{n} \; \frac{1}{n} \; \cdots \; \frac{1}{n}\right)$

comme M est symétrique, on a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = m_{j,i}$

donc : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\frac{1}{n} m_{i,j} = \frac{1}{n} m_{j,i}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

ie : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$

et on a bien : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

1) c) M est μ-réversible $\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$

$\iff \forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \mu_j m_{j,i}$

or : ${}^t(\Delta M) = {}^tM\,{}^t\Delta = {}^tM \Delta$ car Δ est diagonale

et comme $\Delta M = \sum_{i=1}^{n} \mu_i m_{i,j}$ et ${}^tM\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} \mu_i$

on a bien : M μ-réversible $\iff \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_j m_{j,i}$

$\iff \underline{\Delta M = {}^tM\Delta}$

2. on suppose M μ-réversible

$$\mu M = (\mu_1 \ \dots \ \mu_n) \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j m_{j,1} \ , \ \dots \ , \ \sum_{j=1}^{n} \mu_j m_{j,n} \right)$$

or : M est μ-réversible donc : $\mu_j m_{j,1} = \mu_1 m_{1,j}$ et $\mu_j m_{j,n} = \mu_n m_{n,j}$

donc : $\mu M = \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_1 m_{1,j} \ \dots \ \sum_{j=1}^{n} \mu_n m_{n,j} \right)$

et comme : $M \in ST_n$

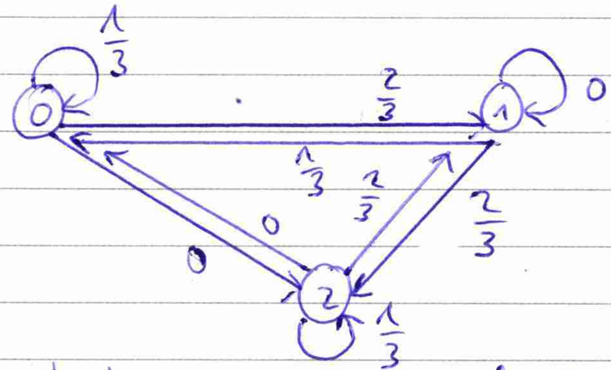
on a : $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

donc : $\mu M = \left(\mu_1 \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} \;\ldots\ldots\; \mu_n \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} \right)$

$= \left(\mu_1 \;\ldots\ldots\; \mu_n \right)$

$\mu M = \mu$

3. a)



en notant 0, 1 et 2 les trois états de la chaîne

3. b) on a : $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$ car P est une matrice de transition
donc $P \in ST_n$

d'après la question 1. c), P μ-réversible $\Leftrightarrow \Delta P = {}^tP \Delta$

dans le cas présent, $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mu_1 & 2\mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 2\mu_2 \\ 0 & 2\mu_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

et $${}^tP \Delta = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 2\mu_1 & 0 & 2\mu_3 \\ 0 & 2\mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

il faut donc : $\begin{cases} \mu_2 = 2\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \\ 2\mu_2 = 2\mu_3 \end{cases}$

ie : $\begin{cases} \mu_2 = 2\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \\ \mu_2 = \mu_3 \end{cases}$

donc : $\begin{cases} \mu_2 = 2\mu_1 \\ \mu_1 = 1 - 4\mu_1 \\ \mu_2 = \mu_3 \end{cases}$

donc : $\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{5} \\ \mu_2 = \frac{2}{5} \\ \mu_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$

$$\mu = \left(\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{5} \right)$$

4. a)

```
def Trajectoire(L,n):
    M=[]
    X = rd.randint(1,n+1)          # état initial X0
    for k in range(len(L)):
    for i in range(len(L[k-1])):
        if X==k:
            M.append(i)
    return M
```

4) b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

la valeur $p_{i,j}$ représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j

ie : $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n = i]}(X_{n+1} = j)$ pour $n \in \mathbb{N}$

or la chaîne de markov est supposée homogène

donc : $p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_0 = i]}(X_1 = j)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

or la probabilité de passer d'un sommet i à un sommet j est la probabilité pour qu'il y ait une arête entre les deux, divisée par le nombre de sommets auxquels il est relié

ie : $p_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{d_i}$

4) c) P μ-réversible $\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mu_i p_{i,j} = \mu_j p_{j,i}$

$\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mu_i \dfrac{a_{i,j}}{d_i} = \mu_j \dfrac{a_{j,i}}{d_i}$

or : G est non orienté donc sa matrice d'adjacence A est symétrique donc : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$

donc P μ-réversible $\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mu_i = \mu_j$

donc nécessairement : $\mu = \left(\frac{1}{n} \ \cdots \ \frac{1}{n} \right)$

5. Soit $(m,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $i_0, \dots, i_m$ et $j_0, \dots, j_s$ de $[\![1,n]\!]$ tels que $i_m = j_0$

$\Theta_M(i_0, \dots, i_m, j_1, \dots, j_s) = m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{m-1},i_m} \times m_{i_m,j_1} \times \dots m_{j_{s-1},j_s}$

$= m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{m-1},i_m} \times m_{j_0,j_1} \times \dots \times m_{j_{s-1},j_s}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= \prod_{k=1}^{m} m_{i_{k-1},i_k} \times \prod_{k=1}^{s} j_{k-1}, j_k$

$= \theta_M(i_0, \dots i_m) \times \theta_M(j_0, \dots, j_s)$

6. M vérifie (K) $\iff \theta_M(1,2,3,1) = \theta_M(1,3,2,1)$

$\iff m_{1,2} m_{2,3} m_{3,1} = m_{1,3} m_{3,2} m_{2,1}$

pour la matrice P :

$m_{1,2} m_{2,3} m_{3,1} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 0 = 0$

et $m_{1,3} m_{3,2} m_{2,1} = 0 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 0$

donc : P vérifie (K)

7. a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \dots, i_m$ éléments de $[\![1, n]\!]$

M est φ – réversible, donc : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$\varphi_i m_{i,j} = \varphi_j m_{j,i}$

donc : en particulier $\forall k \in [\![1, m]\!]$, $\varphi_{i_{k-1}} m_{i_{k-1}, i_k} = \varphi_{i_k} m_{i_k, i_{k-1}}$

en passant au produit : $\prod_{k=1}^{m} \left[\varphi_{i_{k-1}} m_{i_{k-1}, i_k}\right] = \prod_{k=1}^{m} \left[\varphi_{i_k} m_{i_k, i_{k-1}}\right]$

donc : $\prod_{k=1}^{m} \varphi_{i_{k-1}} \theta_M(i_0, \dots, i_m) = \prod_{k=1}^{m} \varphi_{i_k} \theta_M(i_m, \dots i_0)$

7.b) $$\left(\prod_{k=1}^{m} \gamma_{i_{k-1}}\right) \theta_M(i_0,\dots,i_m) = \left(\prod_{k=1}^{m} \gamma_{i_k}\right) \theta_M(i_m,\dots,i_0)$$

donc en posant $k'=k-1$ dans le premier produit :

$$\left(\prod_{k=0}^{m-1} \gamma_{i_k}\right) \theta_M(i_0,\dots,i_m) = \left(\prod_{k=1}^{m} \gamma_{i_k}\right) \theta_M(i_m,\dots,i_0)$$

donc $\dfrac{\gamma_{i_0}}{\gamma_{i_m}} \left(\prod_{k=1}^{m} \gamma_{i_k}\right) \theta_M(i_0,\dots,i_m) = \left(\prod_{k=1}^{m} \gamma_{i_k}\right) \theta_M(i_m,\dots,i_0)$

en supposant $\gamma_{i_m} \neq 0$, mais comme la somme des γ_{i_k} doit faire 1, il y en forcément un non nul

en supposant $\prod_{k=1}^{m} \gamma_{i_k} \neq 0$,

$$\frac{\gamma_{i_0}}{\gamma_{i_m}} \theta_M(i_0,\dots,i_m) = \theta_M(i_m,\dots,i_0)$$

puis en multipliant par m_{i_m,i_0} ie $\theta_M(i_m,i_0)$:

$$\frac{\gamma_{i_0}}{\gamma_{i_m}} \theta_M(i_m,i_0)\theta_M(i_0,\dots,i_m) = \theta_M(i_m,i_0)\theta_M(i_m,\dots,i_0)$$

et avec la question 5. :

$$\frac{\gamma_{i_0}}{\gamma_{i_m}} \theta_M(i_0,\dots,i_m,i_0) = \theta_M(i_m,\dots,i_0)\,\theta_M(i_m,i_0)$$

il faudrait conclure en montrant que : $\theta_M(i_0,\dots,i_m,i_0) = \theta_M(i_0,i_m,\dots,i_0)$

or on a comme M est γ- réversible : $\gamma_{i_m} m_{i_m,i_0} = \gamma_{i_0} m_{i_0,i_m}$

donc : $\gamma_{i_0}\,\theta_M(i_0,\dots,i_m,i_0) = \theta_M(i_m,\dots,i_0)\,\gamma_{i_0} m_{i_0,i_m}$

7/20

donc : $\Theta_M(i_0, \dots, i_n, i_0) = \Theta_M(i_0, i_n, \dots, i_0)$

donc : M vérifie (K)

8. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\mathcal{P}_s$: " $m_{i,j}^{(s)} > 0 \iff \exists (i_0, i_1, \dots, i_s) \in [\![1,n]\!]^{s+1} : i_0 = i, i_s = j$ et $\Theta_M(i_0, \dots, i_s) > 0$ "

I $\quad m_{i,j}^{(1)} > 0 \iff m_{i,j} > 0$

$\iff \Theta_M(i,j) > 0$

$\iff \exists (i_0, i_1) \in [\![1,n]\!]^2 : i_0 = i, i_1 = j$ et $\Theta_M(i,j) > 0$,

ce qui achève l'initialisation

H supposons la propriété vraie pour s fixé

$M^{s+1} = M^s M$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^{(s)} m_{j,i}$

$=$

on admettra le résultat

9. a) avec le résultat de la 8. appliqué à $s = \sigma$ (licite car $\sigma \in \mathbb{N}^*$) on a : comme M est ergodique :
pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
il existe $(i_0, i_1, \dots, i_\sigma) \in [\![1,n]\!]^{\sigma+1}$ tels que $i_0 = i$, $i_\sigma = j$

et $\Theta_M(i_0, \dots, i_\sigma) > 0$

on admettra qu'on peut poser $i_\sigma = 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on suppose $m_{1,i} > 0$

donc $\theta_M(1,i) > 0$ donc $\theta_M(i_r, i_0) > 0$

on a montré que pour un certain $(i_0, i_1, \dots, i_r)$,

$\theta_M(i_0, \dots, i_r) > 0$

or : M vérifie (K) donc : $\theta_M(i_0, i_1, \dots, i_0) = \theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

donc $\theta_M(i_r, \dots i_0) = \underbrace{\theta_M(i_r, i_0)}_{>0} \theta_M(i_0, i_1, \dots, i_0)$ (q° 5)

$= \theta_M(i_r, i_0)\,\theta_M(i_0, \dots, i_1, i_0)$

$= \theta_M(i_r, i_0)\,\theta_M(i_0, i_r)\,\theta_M(i_r, \dots, i_1, i_0)$

$= m_{1,i}\, m_{i,1}\, \theta_M(i_r, \dots, i_1, i_0)$

donc comme $m_{1,i} > 0$:

$\dfrac{\theta_M(i_r, \dots, i_0)}{m_{1,i}} = m_{i,1}\, \theta_M(i_r, \dots, i_1, i_0)$

il faudrait ensuite conclure

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2 :

10. a) on pose $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\varphi_n} \end{pmatrix}$

On a bien : $D^2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varphi_n \end{pmatrix} = \Delta$

et D est triangulaire inférieure avec aucun élément nul sur sa diagonale (on le suppose) donc inversible

10. b) comme P est φ- réversible, avec la question 1)c), on a :

$$\Delta P = {}^tP \Delta$$
ie $$\Delta P = Q \Delta$$
donc $$D^{-1} \Delta P = D^{-1} Q \Delta$$
donc $$D^{-1} \Delta P D^{-1} = D^{-1} Q \Delta D^{-1}$$
donc $$D^{-1} \Delta P D^{-1} = D^{-1} Q D^2 D^{-1}$$
(on a admis la 10.b)
$$D^{-1} \Delta P D^{-1} = D^{-1} Q D$$
donc $$D P D^{-1} = D^{-1} Q D$$
donc $$D^2 P (D^{-1})^2 = Q$$

donc $$D (D P D^{-1}) D^{-1} = Q$$

10. c) en supposant P diagonalisable, on a DPD^{-1} est diagonale

donc Q est semblable à une matrice diagonale donc diagonalisable

10/20

comme P est μ-réversible, avec la question 2. ; $\mu P = \mu$

donc ${}^t(\mu P) = {}^t\mu$

donc ${}^tP\,{}^t\mu = {}^t\mu$ avec la propriété admise

ie : $Q\,{}^t\mu = {}^t\mu$

on en déduit que 1 est valeur propre de Q associée à ${}^t\mu$

donc : $\underline{1 \in Sp(Q)}$

12. a) on a : $QY = \lambda Y$

donc : $\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j = \lambda y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

donc en sommant : $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j \right) = \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i$

de plus : $\left| \sum_{j=1}^{n} q_{i,j} y_j \right| = |\lambda y_i|$

or : $|q_{i,j}| = q_{i,j}$ car tous les coefficients de P, et donc de Q sont positifs car ils représentent des probabilités (matrice de transition)

donc : $\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} |y_j| = |\lambda| |y_i|$

et : $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j} |y_j| \right) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |y_i|$

comme i est muet et en prenant en particulier $\lambda = 1$ car 1 est valeur propre de Q :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j|\right) = \sum_{j=1}^{n} |y_j|$$

12) b) on a montré que : $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j|\right) = \sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|\lambda|$

donc : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j| = \sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|\lambda|$

donc $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j| = \sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|\lambda|$

donc $\sum_{j=1}^{n} |y_j| \sum_{i=1}^{n} q_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} |y_j|\,|\lambda|$

or : comme $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} q_{i,j} = 1$

donc $\sum_{j=1}^{n} |y_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |y_j|$

donc les seules solutions possibles pour λ sont : -1 et 1

12. c) donc : $Sp(Q) \subset [-1,1]$

(on a démontré directement la 12. c), on admetta la 12. b))

13. a) on a : pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}\, y_j = \lambda\, y_k$

car $QY = \lambda Y$

donc : comme tous les $q_{k,j}$ sont strictement positifs,

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques I HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j| = |\lambda y_k|$$

si $\lambda = 1$: $\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j| = |y_k|$

or : $y_k > 0$

donc $\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j| = y_k$

on ne concluera pas dans ce cas-là

si $\lambda = -1$: $\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j| >$

on admettra que $y_k < \sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j|$

donc : $\sum_{k=1}^{n} y_k < \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{k,j}|y_j|\right)$

et avec la question 12. a) :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k < \sum_{j=1}^{n} |y_j|$$

et comme $|y_k| = y_k$ et comme j est

muette : $\sum_{k=1}^{n} |y_k| < \sum_{k=1}^{n} |y_k|$

ce qui est absurde car $\sum_{k=1}^{n} |y_k| = \sum_{k=1}^{n} |y_k|$

donc on aboutit à une contradiction

donc : il n'existe aucun l tel que $y_l < 0$

autrement dit $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $y_i \geq 0$ ou $y_i \leq 0$

13) b) on en déduit effectivement que les vecteurs propres de Q pour 1 ne peuvent pas avoir de composantes strictement négatives.

en admettant que les composantes ne peuvent pas être positives et négatives ie nulles, on peut conclure :

toutes les composantes sont soit positives soit négatives

de plus : si : $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$

alors : $y_1 = -y_2 - \dots - y_n$

donc $Y = \begin{pmatrix} -y_2 - \dots - y_m \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

donc $Y \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

13) c) on admettra que $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) {}^t\mu$

on a donc montré que tous les vecteurs de $E_1(Q)$ s'écrivaient comme combinaison linéaire de ${}^t\mu$

donc : $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages : 20	Session : 2025
Épreuve de : Mathématiques I HEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13) d) on admet que $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ en supposant -1 valeur propre

on a donc avec la 13 c) : $\forall Y \in E_1(Q), Y = 0$.

donc il n'existe aucun vecteur propre non nul de Q associé à 1.

donc -1 n'est pas valeur propre de Q

15. a) $\underline{I}$ pour $n = 0$:

$$L_1 = (\mathbb{P}(X_1 = 1) \dots \mathbb{P}(X_1 = n))$$

et $$L_0 P = (\mathbb{P}(X_0 = 1) \dots \mathbb{P}(X_0 = n))\, P$$

or P est la matrice de transition de la chaîne donc cette multiplication donne :

$$(\mathbb{P}(X_0=1) \dots \mathbb{P}(X_0=n)) \begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

ce qui est égal à : $\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_0 = i) p_{i,1} \dots \right)$

comme $\{[X_0 = i], i \in [\![1, n]\!]\}$ est un système

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_0=i)\, p_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_0=i) \times \mathbb{P}_{[X_0=i]}(X_1=1)$$

$$= \mathbb{P}(X_1=1)$$

en raisonnant de la même manière pour tous les coefficients, on a :

$$L_1 = L_0 P$$

H pour n fixé

en généralisant le raisonnement précédent, avec la formule des probabilités totales, on a :

$$L_{n+1} = L_n P$$

ainsi, par une deuxième récurrence, on montre :

$\mathcal{P}_n$: " $L_n = L_0 P^n$ "

I $L_0 = L_0$

H $L_{n+1} = L_n P$
$= L_0 P^n P$

$$L_{n+1} = L_0 P^{n+1}$$