Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 32	Session : 24-25

Épreuve de : Maths Appliquées - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice : 1

1) a)

En tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $[0, 1]$, f_n est dérivable sur $[0, 1]$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n'(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n(n-1)x^{n-1}$

$\boxed{n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in [0, 1] \text{ donc } f_n'(x) > 0 \text{, on en déduit que } f_n \text{ est strictement croissante sur } [0, 1]}$

b) Pour plus de clarté on dresse le tableau de variation de f_n.

x	0	1
signe de $f_n'(x)$	+	
variation de f_n	0 ↗	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} > 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$ dans $\left[0, \frac{n(n+1)}{2}\right]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

f_n est continue sur $[0, 1]$ dans $[0, \frac{n(n+1)}{2}]$

D'après le théorème de la bijection f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, \frac{n(n+1)}{2}]$, or $1 \in [0, \frac{n(n+1)}{2}]$

car $n \geq 1 \iff (n+1)n \geq 2$

$\iff \frac{(n+1)n}{2} \geq 1$

donc l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution notée U_n élément de $[0, 1]$

c)

U_1 :

$$f_1(x) = 1 \iff \sum_{k=1}^{1} k x^k = 1$$

$$\iff x = 1$$

$$\iff \boxed{x = 1}$$

$U_1 = \frac{2}{n(n+1)}$.

2) a)

Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k x^k$

$$= \sum_{k=1}^{n} k x^k + (n+1)x^{n+1}$$

$$= f_k(x) + (n+1) x^{n+1}.$$

b)

D'après la 2.a) on peut déduire que pour tout $x \in [0,1]$

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$

donc puisque $U_n \in [0,1]$, $f_{n+1}(U_n) \geqslant f_n(U_n) = f_{n+1}(U_{n+1})$

$$(*_1) \iff f_{n+1}(U_n) \geqslant f_{n+1}(U_{n+1}) = 1$$

$$\boxed{\iff f_{n+1}(U_n) \geqslant 1}$$

c) En partant de $(*_1)$ dans la 2b on a

$$f_{n+1}(U_n) \geqslant f_{n+1}(U_{n+1})$$

par stricte croissance de f_{n+1} (f_n est croissante donc à fortiori f_{n+1}) on a :

$$U_n \geqslant U_{n+1}$$

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Par la 1b). $U_n \in [0, 1]$
Par la 2.c) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone la suite converge. On note l sa limite

3) a)
$x \in [0, 1[$ donc $-1 < x < 1$ par le cours sur les somme géométrique de raison $x \in [0, 1[$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

b)

~~Pour tout x différent de 1, soit $p(n)$ la propriété~~

~~$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^{n} + 1}{(1-x)^2}$.~~

~~I ni~~

on remarque. la dérivé de x^k est $k x^{k-1}$.

donc en appliquent la formule d la dérivé. à l' équalité précédente on a le résultat pour cela on pose une fonction. pour tout $x \in [0, 1[$, $g(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

g est dérivable est pour tout $x \in [0, 1[$, $g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$.

or $g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

donc $g'(x) = \frac{-(n+1)x^{n}(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}$

$$= \frac{-(n+1)(x^{n} - x^{n+1}) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{-n x^{n} + n x^{n+1} - x^{n} + \cancel{x^{n+1}} + 1 - \cancel{x^{n+1}}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^{n} + 1}{(1-x)^2}.$$

$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$

donc $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^{n} + 1}{(1-x)^2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 24-25

Épreuve de : Maths Appliquées EPHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3) c)

Pour tout $x \in [0, 1[$.

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k \cdot \frac{1}{x} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}$$

donc $$\sum_{k=1}^{n} k x^k = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

d'où $$\boxed{f_n(x) = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(1-x)^2}}$$

4) a)

u_2 :

$$f_2(x) = 1 \iff \sum_{k=1}^{2} k x^k = 1.$$

$$\iff x + 2x^2 = 1$$

$$\iff 2x^2 + x - 1 = 0$$

$\Delta = 9 > 0$, $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$f_2(x) = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$

or $x \in [0, 1]$ $x \neq -1$ $U_2 = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \geqslant 2$, soit $p(n)$ la propriété $0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Initialisation. par $n = 2$

$U_2 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant U_2 \leqslant \frac{1}{2}$.

donc $p(2)$ est vraie

Hérédité
Soit $n \geqslant 2$, un entier quelconque fixé
On suppose que $p(n)$ soit vraie et on veut en déduire que $p(n+1)$ reste vraie.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0

donc $U_n \geqslant U_{n+1} \geqslant 0$

or d'après l'hypothèse de recurrence $U_n \leqslant \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{2} \geqslant U_{n+1} \geqslant 0$

d'où $p(n+1)$ reste vraie

donc pour tout $n \geqslant 2$ on a $0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{2}$

b-)

~~Par passage à la limite $l \in [0, \frac{1}{2}]$~~.

$$\cancel{f_n(U_n) = 1 \iff \sum_{k=1}^{n} k U_n^k = 1}$$

or $$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$$

donc $0 \leq (U_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (Par stricte croissance de $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$)

or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, par théorème d'encadrement

$\lim_{n \to +\infty} (U_n)^n = 0$.

et $0 \leq n (U_n)^n \leq n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\lim_{n \to +\infty} n (U_n)^n = 0$.

c) Pour tout $n \geq 2$.

$$f_n(U_n) = 1 \iff \frac{n\, U_n^{n+2} - (n+1) U_n^{n+1} + U_n}{(1 - U_n)^2} = 1$$

$f_n(U_n) = 1 \iff n\,U_n^{n+1} - (n+1)\,U_n^{n+1} + U_n = (1-U_n)^2$

$\iff n\,U_n^{n+1} - (n+1)\,U_n^{n+1} = (1-U_n)^2 - U_n$

$\iff n\,U_n^{n+1} - (n+1)\,U_n^{n+1} = 1 - 2U_n + U_n^2 - U_n$

$\iff U_n^2 - 3U_n + 1 = n\,U_n^{n+1} - (n+1)U_n^{n+1}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} n(U_n)^{n+1} - (n+1)(U_n)^{n+1} = 0.$

donc par passage à la limite $l^2 - 3l + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4.1.1.$
$= 5$

$r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad r_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$4 < 5 < 9$

donc $2 < \sqrt{5} < 3$ ($x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante).

donc $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{5}{2} > 1$

donc $\boxed{l = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 24-25

Épreuve de : Maths Appliquées-EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice : 2.

1) a).

$E \subset M_3(\mathbb{R})$.

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donc $0 \in E$, E est non vide.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$M(\lambda a, \lambda b) = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda a \\ \lambda b & 2\lambda a - \lambda b & \lambda b \\ \lambda a & \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$$

$$= \lambda M(a, b).$$

et pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$M((\lambda+\mu)a, (\lambda+\mu)b) = (\lambda+\mu) M(a, b)$$

donc E est stable par $\cdot$ et par $+$

E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1)

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_1} \right)$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ tous les coefficients sont tout nécessairement nul. donc $\mathcal{F}_1$ est libre.

$\mathcal{F}_1$ est libre.
$\mathcal{F}_1$ est generatrice de E
$\mathcal{F}_1$ est une base de E et $\dim E = 2$.

2) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$M(a,b)$ est symétrique donc $M(a,b)$ est diagonalisable.

$L_1 = L_3$ donc la matrice $M(a,b)$

donc $M(a,b)$ n'est pas inversible

donc les matrice de E sont diagonalisable mais pas inversible on prend $a = 1$ et $b = 3$.

$2a - b = 2 - 3 = -1$

donc $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $E \Leftrightarrow A \in E$.

4)
```python
import numpy as np
def matA()
A = np.array([1, 3, 1], [3, -1, 3], [1, 3, 1])
return(A)
```

5)

La question 2 permet d'obtenir la valeur propre par le cours.
Car si M n'est pas inversible alors M admet 0 comme valeur propre. Ici 0 n'est pas inversible.
$L_1 = L_3$ donc $0 \in Spect(A)$.

b)

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$C_1 + C_3 = -C_2$. (C_1 étant la première colonne)

donc $5 \in Spect(A)$.

$$(A + 4I) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(A + 4I) X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$(A+4I)X = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \\ 2y + 4z = 0. \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -2z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z. \end{cases}$

le système n'est pas de Cramer, $(A+4I)$ n'est pas inversible, $-4 \in \mathrm{Spec}(A)$.

conclusion $\mathrm{Spec}(A) = \{0, -4, 5\}$

$(A - 0I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 24-25

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths Appliquées - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$(A-0I)X=0 \iff \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

$$E_0(A)=\text{vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_2}\Big)$$

$\mathcal{F}_2$ est constitué d'un seul vecteur non nul $\mathcal{F}_2$ est libre et génératrice de E_0 c'est une base.

$$(A-5I)X=0 \iff \begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ 3 & -6 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2y+z=0 \\ -4x+3y+z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ y=z. \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2+4L_1$

$L_3 \leftarrow L_3-L_1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$(A - 5I)X = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x - 2y + y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = y \end{cases}$

$E_5(A) = \text{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_3}\Big)$

$\mathcal{F}_3$ est constitué un seul vecteur non nul, et $\mathcal{F}_3$ est génératrice de E_5, c'est une base de E_5.

En reprenant le calcule de la 5 b

on a $(A + 4I)X = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z = -2x \end{cases}$

$E_{-4}(A) = \text{Vect}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}_4}\Big)$

$\mathcal{F}_4$ est constitué un seul vecteur non nul et $\mathcal{F}_4$ est génératrice de E_{-4}, c'est une base de E_{-4}.

6)

$r_1 = 2$. (5.b).

$r_2 = 2$. $\left(\text{car } \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

7)

a)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$M(a,b)\,U = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{M(a,b)\,V = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a+b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a} \quad = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$M(a,b)\,V = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}$$

$$= (2a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$M(a,b)\,W = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2b \\ -4a+4b \\ 2a-2b. \end{pmatrix}$$

$$= (2a-2b) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par le cours sur la définition d'une valeurs propre. on vient de vérifier que u, v, w sont les vecteurs propres de toutes les matrices de E

7) b) Par le cours

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $M(a,b)$ est diagonalisable, que toute matrice de E est diagonalisable alors il existe une matrice

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

tel que $P D P^{-1} = M(a,b)$.

Par récurrence immédiate (donné par le cours

$$M^n(a,b) = P D^n P^{-1}.$$

donc

c)
```
import numpy as np
def puissance M(a, b, n).
    D = np.array([-4 ** n , 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 5 ** n])
    P = np.array([1, 1, 1], [-2, 0, 1], [1, -1, 1])
    J = np.invers P
    M = np.dot(P D J)
    return (M).
```

Exercice : 3

1)

Positivité

si $0 \leq x \leq n$, $f(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0$.

si $x \notin [0, n]$, $f(x) = 0 \geq 0$

f est positive sur $\mathbb{R}$

Continuité

En tant que fonction nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]n, +\infty[$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : | Session : 24-25

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et en tant que différence et composé de fonctions continues sur $[0, n]$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en n.

Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx + \int_{0}^{n} f_n(x)\,dx + \int_{n}^{+\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= 0 + \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + 0.$$

$$= -n \left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right]_0^n \quad (\text{forme } u'.u)$$

$$= 0 + 1$$

donc ces trois points établissent que f_n est une densité.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$ existe si et seulement si

~~X_n admet une espérance c'est à dire si et seulement~~

si $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n-x}{n}\right) f_n(x)\,dx$ est absolument convergente.

Sous reserve d'existence

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n-x}{n}\right) f_n(x)\,dx = \int_0^n \left(\frac{n-x}{n}\right) f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

$$= \left[-\frac{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^n$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{n-x}{n}\right) f_n(x)\,dx = 0 + \frac{1}{n+1}.$$

est absolument convergente

donc $E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{n+1}$.

$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe si et seulement

si $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^2 f_n(x)\,dx$ est absolument convergente.

Sous réserve de convergence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^2 f_n(x)\,dx = 0 + \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1} dx$$

$$= \left[\frac{-\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+2}}{n+2} \right]_0^n$$

$$= 0 + \frac{1}{n+2}.$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{x}{n}\right)^2 f_n(x)\,dx$ est absolument convergente donc $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)\right)^2$ existe et vaut $\frac{1}{n+2}$.

b)

Par linéarité de l'espérance.

$$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n}E(X_n) = \frac{\cancel{1}}{n+1}\;\frac{-n-\cancel{1}}{}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow E(X_n) = \frac{1}{n+1}.$$

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right) = E\left(1-\frac{2X_n}{n}+\frac{X_n^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2}E(X_n^2) = \frac{1}{n+2}.$$

donc $\dfrac{E(X_n^2)}{n^2} = \dfrac{1}{n+2} - 1 + \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\iff \dfrac{E(X_n^2)}{n^2} = \dfrac{(-n-1)n(n+1) + 2(n+2)}{(n+2)(n(n+1)}$

$\iff \dfrac{E(X_n^2)}{n^2} = \dfrac{-n^3-2n^2-n+2n+4}{n(n+1)(n+2)}$

$\iff E(X_n^2) = \dfrac{(-n^3-2n^2+n+4)n^2}{n(n+1)(n+2)}$

d'après Koenigs Huygens $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{-n^5-2n^4+n^3+4n^2}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{-n^5-2n^4+n^3+4n^2}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n(n+2)}{n(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)(-n^5-2n^4+n^3+4n^2) - n^2 - 2n}{n(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{-n^6-2n^5+n^4+4n^2-n^5-2n^4+n^3+4n^2-n^2-2n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{-n^6-3n^5-n^4+n^3+7n^2-2n}{n(n+1)(n+2)}$$

il faudrait factoriser on passe à la suite.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages :	Session : 24 - 25

Épreuve de : Maths Appliquées EDHEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

3)

Pour tout $x \leq m$, $F_m(x) = \int_{-\infty}^{x} f_m(t)\,dt$

$$= 0 + \int_0^x f_m(t)\,dt$$

$$= \left[-\left(1 - \frac{t}{m}\right)^m \right]_0^x$$

$$= -\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m + 1$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m.$$

si $x < 0$

$F_m(x) = 0.$

si $x > m$

$F_m(x) = 1.$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_m(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \text{ si } x \in [0, m] \\ 1 \text{ si } x > m \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

a)

Pour tout $x < 0$ $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$

b)

Pour tout $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$ on a forcément

$x \in [0, n]$ et d'après la 3 on a

$F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

c)

$\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$

donc $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$

donc $n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -x$

$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x.$

d) ~~bon~~

$1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}.$

or $\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x$

donc $\lim_{n \to +\infty} 1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} = 1 - e^{-x}.$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

on reconnait une loi exponentielle de paramètre 1 donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$.

5)

a) $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(Z_n > x) =$

$=$

$= 1 - P(M_n \leq \frac{x}{n})$.

or $P(M_n \leq \frac{x}{n}) = P(\min(U_1, \dots, U_n) \leq \frac{x}{n})$

$= \dots$

(Par définition d'un minimum) $= P([U_1 \leq \frac{x}{n}] \cap \dots \cap [U_n \leq \frac{x}{n}])$

Par indépendance $= P(U_1 \leq \frac{x}{n}) \dots P(U_n \leq \frac{x}{n})$

$= \left[P(U \leq \frac{x}{n})\right]^n$

b)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Z_n > x) = P(n M_n > x)$$

$$= P\left(M_n > \frac{x}{n}\right)$$

$$= P\left(\min(U_1, \dots U_n) > \frac{x}{n}\right)$$

Par deffinition d'un minimum.

$$= P\left(\left[U_1 > \frac{x}{n}\right] \cap \dots \cap \left[U_n > \frac{x}{n}\right]\right)$$

Par indépendance et car les $U_1 \dots U_n$ suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

$$= \left[P\left(U > \frac{x}{n}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 - P\left(U \leq \frac{x}{n}\right)\right]^n.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x)$$

$$= 1 - P(Z_n > x)$$

$$= 1 - \left(1 - P\left(U \leq \frac{x}{n}\right)\right)^n.$$

c)

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

$$= F_{X_n}(x).$$

donc Z_n suit la même loi que X_n.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	Nombre de pages :
Session : 25	
Épreuve de : Maths EDHEC.	

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

d)
```
def X
    if x < 0 :
        X = 0
    if 0 <= x <= m :
        X = 1 - (1 - x/m) ** m
    elif :
        X = 1
    return (X).
```

Problème.

1)
```
def Var X(m)
    R = rd.randint (1, m)
        if R == m+1 :
            X =     0
        elif  R == 1
            X = 1
        else :
            X = 1
            while rd.randint (1, m+1) <=
                X =
        return (X)
```

2)

Il y a $n+1$ urnes.
l'évènement :
U_k : « on a choisi l'urne numérotée k ».

donc pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(U_k) = \frac{1}{n+1}$

3) a)

Sachant que j'ai eu l'urne k. la probabilité d'avoir la seule boule blanche dans l'urne. correspond à un temps d'attente.

La probabilité d'avoir cette boule blanche est : $\frac{1}{n}$.

Les tirages sont independant et identiques.

la loi de X_n, conditionnellement à l'évènement U_k est une loi géométrique, $G(\frac{1}{n})$.

3) b).

a)

$P_{U_{n+1}}(X_n=1) = 0$ si on a l'urne U_{n+1} alors il n'y a que des noires. donc on ne peut pas avoir une boule blanche au premier tirage (évenement impossible).

b).

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P_{U_k}(X_n=1) = \frac{n-k+1}{n}$ il y a $n-k+1$ boules blanches dans l'urne on a $n-k+1$ chances sur n d'obtenir au premier lancé la boule blanche.

c) $(U_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ forme un système complet d'évenement d'après la forme des probabilités totales.

$$P(X_n=1) = \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k).\ P_{U_k}(X_n=1).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} . \frac{n-k+1}{n} + 0 .$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} n-k+1 .$$

on pose $j = n-k+1$.

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j$$

$$P(X_m = 1) = \frac{1}{\cancel{m(m+1)}} \quad \frac{\cancel{m(m+1)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

5).

$j \geqslant 2.$

$P_{U_{m+1}}(X_m = j) = 0$ ayant eu l'urne $m+1$, contenant

0 boule blanche il n'est pas possible d'en obtenir une au j ème tirage.

on pose les evenements B_k: "obtenir une blanche au k ième tirages" et N_k: "obtenir une noire au k ème tirage"

$$\forall k \in [\![1, m]\!], \quad P_{U_k}(X_m = j) = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots N_{j-1} \cap B_j)$$

$$= P(N_1) . P_{N_1}(N_2) . \dots . P_{N_1 \cap \dots N_{j-1}}(B_j)$$

(tirages indépendant et identique)

$$= P(N_1)\, P(N_1) \dots P(N_{j-1})\, P(B_j)$$

$$= \left(\frac{k-1}{m}\right)^{j-1} . \left(\frac{m-k+1}{m}\right)$$

$(U_k)_{k \in [\![1, m+1]\!]}$ forment un système complet

d'évenement d'après la formule des probabilités totals

$\forall j \geqslant 2$

$$P(X_m = j) = \sum_{k=1}^{m+1} P(U_k) . P_{(U_k)}(X_m = j)$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298	**Nombre de pages :**	**Session :** 25

Épreuve de : EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$\forall j \geqslant 2$

$$P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) \cdot P_{U_k}(X_n = j).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^{j}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{n-(k-1)}{n}\right)^{j}$$

on pose $i = k-1$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j}.$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j} \right).$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1+j} \right)$$

6a).

deux serie géométriques.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j} = \frac{n}{k}\sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j} - \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j}$$

$$= \frac{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{j} - 1 - \frac{k}{n}\right) - \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^{k} + 1 + \frac{k}{n}.$$

$-1 < \frac{k}{n} < 1$ deux serie géométrique donc on a

$$= \frac{n}{k}\left(\frac{1}{1-\frac{k}{n}} - 1 - \frac{k}{n}\right) - \frac{1}{1-\frac{k}{n}} + 1 + \frac{k}{n}$$

$$= \frac{n^2}{(n-k)k} - \frac{n}{k} - \cancel{1} - \frac{nk}{(n-k)k} + \cancel{1} + \frac{k}{n}.$$

$$= \frac{n^2 - n(n-k) - nk}{(n-k)k} + \frac{k}{n}.$$

$$= \frac{k}{n}.$$

g) a)

$\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$t \in [p, p+1]$

$$p \leq t \leq p+1$$

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{p+1}.$$

en intégrant avec les bornes p à p+1 on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{p}.$$

b)

D'après la g. a)

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}.$$

$$\iff \quad \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}.$$

en sommant de 1 à n-1 on a.

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \ln(p+1) - \ln(p) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}.$$

on pose $p+1 = z$.

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) - \ln(1) \text{ (Telescopage)} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}.$$

c)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cancel{\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}}$$

D'après la q. a)

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \geq \ln(n)$$

$$\iff \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \geq \ln(n).$$

$$\iff \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \geq \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

et $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n)$

$$\iff \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - 1 \leq \ln(n)$$

$$\iff \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

Conclusion. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1.$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : AGG

Épreuve de : EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$

$$\frac{n}{n+1} \ln(n) + \frac{1}{n+1} \leq E(X_n) \leq \frac{\ln(n) n}{n+1} + \frac{n}{n+1}.$$

en divisant par $\frac{n+1}{n}$

7) a)

événement contraire.

$\cancel{A - P(X_n}$