Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Maths - Appro - 1

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I

1) $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

soit $x \in \mathbb{R}$

B_E est une base orthonormée de E,

donc $\exists! (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \,/\, x = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$

donc $\ell(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i \ell(e_i)$ (car ℓ est linéaire)

$= \sum_{i=1}^{p} \langle x ; e_i \rangle \ell(e_i)$ (car B_E est une base orthonormée)

or, $\ell(x) \in \mathbb{R}$, donc $\exists i_0 \in [\![1, p]\!] \,/\, \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\ell(e_i) = \lambda e_{i_0}$

donc $\ell(x) = \sum_{i=1}^{p} \cancel{a_i} \lambda e_{i_0} \langle x ; e_i \rangle$

ℓ est une forme linéaire dans E, donc en notant $B = \mathrm{Mat}_{\mathbb{R} \leftarrow B_E} \ell$

~~obtient~~ et $X = \mathrm{Mat}_{B_E} x$ $\cancel{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}$

~~obtient $MX =$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~on obtient une matrice ligne telle~~ que

~~$MX = a_1$~~

M est une matrice ligne car ℓ est une forme linéaire,

donc $M \in M_{1,p}(\mathbb{R})$

et $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

donc $MX \in \underbrace{M_1(\mathbb{R})}_{=\mathbb{R}}$

et en notant $M = (a_1 \cdots a_n)$

on obtient $MX = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

en notant $a_0 = (a_1 \cdots a_n) \in E$ (car $\ell \in \mathcal{L}(\underline{E}, \mathbb{R})$)

on obtient $MX = \langle a_0 ; x \rangle$

donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a_0 \in E$ / $\ell(x) = \langle a_0 ; x \rangle$

Réciproquement, supposons que $\exists a_0 \in E$ / $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell(x) = \langle a_0 ; x \rangle$

~~alors $\ell(x) = a_{0,1} x_1 + \dots + a_{0,n} x_n$~~

2) Soit $y \in F$

Soit $x \in E$

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ soit $(y_1, y_2) \in F^2$

$$u^*(\lambda y_1 + y_2) = z_{\lambda y_1 + y_2}$$

or, $\langle z_{\lambda y_1 + y_2} ; x \rangle = \langle u(x) ; \lambda y_1 + y_2 \rangle$

$$= \lambda \langle u(x) ; y_1 \rangle + \langle u(x) ; y_2 \rangle$$

(avec 2) $= \lambda \langle z_{y_1} ; x \rangle + \langle z_{y_2} ; x \rangle$

donc par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle z_{\lambda y_1 + y_2} - (\lambda z_{y_1} + z_{y_2}) ; x \rangle = 0$$

ceci étant vrai ~~∀x~~ pour tout x dans E,

$$z_{\lambda y_1 + y_2} - (\lambda z_{y_1} + z_{y_2}) \in E^\perp$$

donc $z_{\lambda y_1 + y_2} = \lambda z_1 + z_2$

donc $u^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda u^*(y_1) + u(y_2)$

donc <u>u^* est linéaire</u>

4) ~~en notant~~
soit $(x, y) \in E \times F$

en notant $B = \underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{\mathrm{Mat}}(u^*)$ et $X = \underset{\mathcal{B}_E}{\mathrm{Mat}}\, x$

et $Y = \underset{F}{\mathrm{Mat}}\, y$

on a avec (1) $\langle AX ; Y \rangle = \langle X ; BY \rangle$
$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

donc ${}^tX({}^tA - B)Y = 0$
$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

donc ${}^tA - B = 0$ donc $\underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA}$

$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\cancel{A}\, u)$

donc $\underline{\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)}$

et comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA$,

alors $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u^*)^* = {}^t({}^tA) = A$

~~donc $\mathrm{rg}((u^*)^*) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$~~

donc $\forall i \in [\![1,p]\!], (u^*)^*(e_i) = u(e_i)$

$(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une base de E donc les endomorphismes

coïncident sur une base, donc sont égaux

donc $\underline{(u^*)^* = u}$

5) par le théorème du rang (comme F est en dimension finie),
(et comme E est en dimension finie

$n = \dim \mathrm{Im}(u^*) + \dim \mathrm{Ker}(u^*)$
$p = \dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u)$
$\mathrm{Ker}(u)^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, donc

$p = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Ker}(u)^\perp$

donc $\dim \mathrm{Ker}(u)^\perp = \cancel{\dim}\ \mathrm{rg}(u) \underset{\uparrow}{=} \mathrm{rg}(u^*)$

q. 4

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : Maths - Appro - 1

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$

alors $\exists x_1 \in F \mid u^*(x_1) = y$

$\forall x \in \mathrm{Ker}(u),\ \langle y ; x \rangle = \langle u^*(x_1) ; x \rangle$

$= \langle x_1 ; \underbrace{u(x)}_{=0} \rangle = 0$

donc $y \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$ donc $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$

par inclusion et égalité des dimension,

$\underline{\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp}$

6) ~~Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$~~
~~alors $x \in E$.~~

~~alors~~ et $u^*(\cancel{u}(x)) = 0$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$
alors $x \in E$ et $u(x) = 0_F$
donc $u^*(u(x)) = 0_E$ (car u^* est linéaire (q.3))
donc $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$
par le théorème du rang (avec $u^* \circ u : E \to E$ et $u : E \to F$),
(comme E est en dimension finie

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\left(\begin{array}{l} p = \dim \mathrm{Im}(u^* \circ u) + \dim \mathrm{Ker}(u^* \circ u) \\ p = \dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) \end{array}\right) \quad \cancel{(*)} \ (*)$$

~~avec~~ Réciproquement Supposons que $x \in \mathrm{Ker}(\cancel{u^*(u(x))})$ $(u^* \circ u)$

alors $x \in E \mid u^*(u(x)) = 0$

donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^*)$

~~donc u~~

soit $x_2 \in \mathrm{Ker}(u^*)$

~~alors $u^*(x_2) = 0$ donc~~

~~$\forall x \in E, \langle u(x) ; x_2 \rangle = \langle x ; u^*(x_2) \rangle = 0$~~

il reste à montrer que $u(x) = 0$

ainsi, par double inclusion, $\underline{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)}$

~~donc avec $(*)$, on a $\dim \mathrm{Im}(u) = \dim \mathrm{Im}(u^* \circ u)$~~

~~Soit $y \in \mathrm{Im}(u^* \circ u)$~~

~~alors $\exists x_1 \in E \mid u^*(u(x)) = y$~~

~~Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$~~

$\mathrm{Ker}(u)^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E

donc ~~dim~~ $p = \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u)^\perp$

avec q.5) et (*), on obtient $\dim \mathrm{Im}(u^* \circ u) = \dim \mathrm{Im}(u)$

$= \dim \mathrm{Ker}(u)^\perp$

$= \dim \mathrm{Im}(u^*)$

~~donc~~ soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$

alors $\exists x_1 \in E / \ u^*(x_1) = y$

en posant $x \in E$ tel que $u(x) = x_1$,

on obtient $u^*(u(x)) = y$

donc $y \in \mathrm{Im}(u^* \circ u)$ donc $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Im}(u^* \circ u)$

donc par inclusion et égalité des dimensions,

$\underline{\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)}$

7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \in \mathrm{Im}(u^*)^2$

$w(\lambda y_1 + y_2) = u^*(u(\lambda y_1 + y_2))$

$= u^*(\lambda u(y_1) + u(y_2))$ (par linéarité de u)

$= \lambda u^*(u(y_1)) + u^*(u(y_2))$

$= \lambda w(y_1) + w(y_2)$

donc $\underline{w \text{ est linéaire}}$

donc w est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(u^*)$

soit $x \in \mathrm{Ker}(w)$, ~~alors~~

alors $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$ (q.6) donc ...

donc $\ker(w) \subset \{0_{\mathrm{Im}(u^*)}\}$

la réciproque est évidente, donc $\ker(w) = \{0_{\mathrm{Im}(u^*)}\}$

donc w est injective et comme c'est un endomorphisme,

<u>w est un isomorphisme</u>

ainsi, sa matrice représentative est inversible

8) soit ~~$\pi = \mathrm{Im}(u)^\perp$~~

π le projecteur orthogonal de F sur $\mathrm{Im}(u)$

a) alors $\mathrm{Im}(\pi) = \ker(\pi - id) = \mathrm{Im}(u)$
et $\ker(\pi) = \mathrm{Im}(u)^\perp$

~~donc~~ Soit $x \in F$,

~~$u^*(\pi(x))$~~ si $\pi(x) \in \mathrm{Im}(u^*)$
alors $\pi(x) \in \ker(u)^\perp$

b) $\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}(\pi)$

π est un projecteur donc est diagonalisable et semblable

à une matrice diagonale telle que $A = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{p-k \text{ fois}})$

avec $k = \dim \mathrm{Im}(u)$
$= \mathrm{rg}(u)$

comme $\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{Tr}(A)$ alors $\mathrm{Tr}(\varphi) = k = \mathrm{rg}(u)$

<u>donc $\mathrm{Tr}(\varphi) = \mathrm{rg}(u)$</u>

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 24	**Session :** 2025
Épreuve de : Maths - Appro - 1		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

9) $M = {}^tAA \in M_p(\mathbb{R})$

Supposons que $rg(A) = p$

par le théorème du rang avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$\left.\begin{aligned} p &= \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A \\ p &= rg({}^tAA) + \dim \operatorname{Ker} {}^tAA \end{aligned}\right| \quad (*)$$

Soit $X \in \operatorname{Ker} A$,

alors $AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

donc ${}^tAAX = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$

donc $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$

Si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$,

alors ${}^tAAX = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$ donc $\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = 0$

donc $\|AX\| = 0$ donc $AX = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

donc $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$

donc par double inclusion, $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc avec $(*)$, comme $rg(A)=p$,

$rg(A) = rg({}^tAA) = p$ et comme ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$,

$\Leftrightarrow$ M est inversible

Réciproquement supposons que M soit inversible

alors $rg({}^tAA) = \cancel{rg(}\,p$

et comme on l'a montré, $rg({}^tAA) = rg(A) = p$

donc $rg(A) = p$

donc $\underline{M \text{ est inversible} \Leftrightarrow rg(A) = p}$

10) a) Supposons que $rg(A)=p$ alors ~~p~~ M est inversible

$M = {}^tAA$

b)

```
def Calcule_p(A)
    ~~if al.matrix_rank(A) !=~~
    p = np.shape(A)(1)
    if al.matrix_rank(A) != p :          # test de rg(A)
        return Erreur
    else :
        M = np.transpose(A)*A
        M1 = al.inv(M)                   # calcul de M et M^-1
        ~~return A... np.dot(~~          # utilisation de 10a)
        X = np.dot(A, M1)
        return np.dot(X, np.transpose(A))
```

11) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$${}^tXMX = {}^t\cancel{X}\,{}^tAAX = \langle AX ; AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$$

donc $\underline{\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXMX \geq 0}$

Partie III :

12) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

soit $\varphi : t \mapsto J_0(X + tH)$, continue sur I tel que $\underline{[0,1] \subset I}$.

pour $H = 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$, le résultat est évident

avec $H \neq 0_{\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}$ φ est la fonction directionnelle qui permet

d'étudier J_0 en X dans la direction H (avec $X \in \mathbb{R}^p$ et $H \in \mathbb{R}^p$)

on a $J_0(X) = \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$

$$= \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 - 2\langle AX ; Y \rangle + \|Y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 - 2\,{}^tX\,{}^tAY + \|Y\|^2\right)$$

~~on trouve les der~~

si J_0 est $\mathcal{C}^2$ on a φ $\mathcal{C}^1$ sur I tel que

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \langle D(J_0)(X+tH) ; H \rangle$$

et $\forall t \in I$, $\varphi''(t) = \frac{1}{2} \underline{q_{X+tH}}(H)$

forme quadratique associée à $X+tH$

on utilise taylor ~~Lagrange~~ reste intégral, puis on trouve le résultat comme ..

13)

Supposons que $D(X)=0$

alors $\forall (X,H) \in \mathbb{R}^p$, $J_0(X+H) - J_0(H) = \frac{1}{2} {}^tHMH$

en notant $Y_1 = X+H$,

$\forall Y_1 \in \mathbb{R}^p$, $J_0(Y_1) = \frac{1}{2} {}^tHMH + J_0(H)$

~~comme~~ $\cancel{J_0(H) = \frac{1}{2}\|AH - Y\|^2 \geq 0}$ d'après 11), ${}^tHMH \geq 0$

donc $\forall Y_1 \in \mathbb{R}^p$, $J_0(Y_1) \geq J_0(H)$

donc J_0 admet un minimum global en H

Réciproquement ..

14) Soit $X_0 \in \operatorname{Ker} A^\perp$ tel que $\{X_0\} \in S_0 \cap \operatorname{Ker} A^\perp$

~~soit~~ $X \in$ ~~Ker~~ $(A)^\perp$

Soit $X \in \operatorname{Ker} A^\perp \cap S_0$

alors $\forall X_1 \in \operatorname{Ker} A$ $\langle X ; X_1 \rangle = 0$ et $D(X) = 0$

15) a) Soit $X \in S_0$,

alors $D(X) = 0$ donc $MX = {}^tAY$

donc ${}^tAAX = {}^tAY$

donc ${}^tA(AX - Y) = 0$

b) $A(X - X_0) = AX - AX_0$

$= \varphi Y - AX_0$

et comme $X_0 \in S_0 \cap \operatorname{Ker} A^\perp$, $MX_0 = {}^tAY$

donc ${}^tA(AX_0 - Y) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 24	**Session :** 2025

Épreuve de : Maths - Appro - 1

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Supposons que $X \neq X_0$,

comme $X - X_0 \in \operatorname{Ker} A$,

$AX = AX_0$

c)

(6) $\operatorname{rg}(A) = p$, $Y = AU_0 + Z$

$\forall i \in [\![1, n]\!], z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

a) $T = \| A(X - U_0) \|^2$

$= \| AX - AU_0 \|^2$

$= \| A\Pi^{-1}\,{}^tAY - AU_0 \|^2 = \| QY - AU_0 \|^2$

$\vdots$

$\| QZ \|^2 = \langle QZ ; QZ \rangle = {}^tZ\,{}^tQQZ$

$= {}^tZ \|Q\|^2 Z$

or, $\|Q\|^2 = \|A(\Pi^{-1})\,{}^tA\|^2 = {}^tA\Pi^{-1}\,{}^tAA\Pi^{-1}\,{}^tA$

$\vdots$

$= Q$ ...

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b)

```
def simuleT(A, sigma)
    ~~Z = rd.normal(0, sigma, [1,~~
    n = np.shape(A)[0]
    Z = rd.normal(0, sigma, [n, 1])
    φ = Calcule_φ(A)                          # q. 10b
    ~~return~~
    X = np.dot(np.transpose(Z), φ)
    return np.dot(X, Z)                       # T = ᵗZφZ
```

c)

```
def esperance(A, sigma)
    n = 10000          # à modifier selon la précision souhaitée
    X = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        X[k] = simuleT(A, sigma)
    return np.mean(X)                  # on calcule la moyenne empirique de T
```

d) on ~~remarque~~ qu'en ~~prenant~~ des ~~matrices pour lesquelles~~.

en prenant des variables aléatoires réduites (variance égale à 1), on obtient une espérance qui augmente en même temps que la taille de la matrice A augmente.

on peut conjecturer que l'espérance n'existe pas, car elle ne semble pas converger le second programme trace le graphique de l'espérance, qui semble diverger à mesure que k augmente

on peut donc conjecturer que T n'admet pas d'esperance, car ici on ne change pas la matrice.

e) $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

~~do~~ par la formule de huygens,

$$E(Z_1^2) = V(Z_1) + E(Z_1)^2$$

$$= \sigma^2$$

donc $\underline{E(Z_1^2) = \sigma^2}$

par la formule de transfert,

$E(Z_1^3)$ existe $\Leftrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 f_{Z_1}(t)\,dt$ converge absolument

(avec f_{Z_1} la densité de Z_1)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dt \quad \text{~~(la converge absolue~~)}$$

$$\cancel{= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dt \text{ (car l'intégrande est impaire)}}$$

comme l'intégrande est impaire, si $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dt$ converge,

alors $I = 0$

- $\forall t \geq 0, \ \frac{t^3 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \geq 0$
- $t^2 \times \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, e^{\frac{1}{2\sigma^2}t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \times \frac{t^5}{e^{\frac{1}{2\sigma^2}t^2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ (par croissances comparées)

donc $\Rightarrow$ $t^3 f_Z(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (intégrale de Riemann avec $2>1$)

par critère de négligeabilité, $\int_0^{+\infty} \underbrace{t^3 f_Z(t)}_{\geq 0 \text{ donc converge absolument}}dt$ converge

donc $\underline{E(Z_1^3) = 0}$

d'après le théorème de transfert,

$E(Z_1^4)$ existe $\iff I = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f_Z(t)dt$ converge absolument

comme $t \mapsto t^4 f_Z(t)$ est ~~imp~~ paire,

$$I = 2\int_0^{+\infty} t^4 \times \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}t^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dt$$

on pose le changement de variable affine $t = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}u \iff u = \sqrt{2}\sigma t$

quand $t \to +\infty$, $u \to +\infty$ (car $\sigma > 0$)

quand $t = 0$, $u = 0$ $\qquad dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}du$

~~donc $I =$~~ les intégrales sont de même nature et égales en cas de convergence,

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\times 2 \times \int_0^{+\infty} 2^3\sigma^4 u^4 e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}du$$

$$= \frac{2^{3}}{\sqrt{\pi}}\sigma^2 \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2}du$$

on réalise de nouveau le changement de variable ~~$t = \sqrt{u} \iff u = t^2$~~ $u^2 = t$ $\quad u = \sqrt{t}$

$u \mapsto \sqrt{u}$ est strictement croissante donc admet une bijection

~~quand $u \to +\infty$, $t \to +\infty$~~

~~quand $u = 0$, $t = 0$~~ $\qquad$ ~~$dt = \frac{1}{2}$~~ $\quad du = 2t\,dt$

~~donc $2I = \frac{2^3\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{+\infty} t^8 e^{-t}$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 24	Session : 2025
	Épreuve de : Math - Appro - 1		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

donc quand $u \to +\infty$, $t \to +\infty$
quand $u = 0$, $t = 0$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$2I = \frac{2^3 \sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-u} \times \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

donc $E(g_1^4)$ existe et vaut $\frac{4\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

f) $T_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq m} p_{i,j} g_i g_j = \sum_{1 \leq j < i \leq m} p_{j,i} g_i g_j$

donc $2T_2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} p_{i,j} g_i g_j$

donc $T_1 + 2T_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_{i,j} g_i g_j = {}^t z\, q\, z$. (formule de la forme quadratique)

donc $T = T_1 + 2T_2$

par linéarité de l'espérance, $E(T) = E(T_1) + 2E(T_2)$

et $E(T_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,i} E(g_i^2)$ et $E(T_2) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} p_{i,j} E(g_i g_j)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $E(T_1) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{m} \rho_{i,i} = \sigma Tr(\rho) = \sigma rg(u)$

les z_i sont indépendantes, donc $E(T_2) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,j} E(z_i) E(z_j)$

~~g)~~

g) par linéarité de l'espérance,

$$E(T_1 T_2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{m} \rho_{i,i} z_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} \rho_{i,j} z_i z_j\right)\right)$$

$$= T_n$$

h) $T_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \rho_{i,i} z_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \rho_{j,j} z_j^2\right)$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \rho_{i,i} \rho_{j,j} z_i^2 z_j^2$$

par la même décomposition que pour T_1 et T_2, (q. f)

$$= \sum_{i=1}^{m} \rho_{i,i}^2 z_i^4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,i} \rho_{j,j} z_i^2 z_j^2$$

par linéarité de l'espérance,

$$E(T_1^2) = \sum_{i=1}^{m} \rho_{i,i} \cancel{z_i} E(z_i^4) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,i} \rho_{j,j} E(z_i^2 z_j^2)$$

d'autre part, $\cancel{T_2^2 = \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} \rho_{i,j} z_i z_j\right)\left(\sum_{1 \leq k < l \leq m} \rho_{k,l} z_k z_l\right)}$

~~en partant~~ ~~admettant que~~ ~~l'on a trouvé~~

$E(\cancel{T}) =$

on réutilise la linéarité de l'espérance pour T_2 ...

i) par linéarité de l'espérance,

$$E(T^2) = E((T_1 + 2T_2)^2)$$

$$= E(T_1^2) + 4E(T_2^2) + 4\underbrace{E(T_1T_2)}_{=0 \text{ d'après g)}}$$

$$= \sigma^4(2q + p^2) + \frac{\sigma^4}{2}(p-q)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}(4q + 2p^2 + p - q)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}(3q + 2p^2 + p)$$

en admettant qu'on a trouvé en f)

$$E(T) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}}\sqrt{3q + 2p^2 - 3p},$$

par la formule de Huygens,

$$V(T) = \frac{\sigma^4}{2}(3q + 2p^2 + p) - \frac{\sigma^4}{2}(3q + 2p^2 - 3p)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}(4p) = 2p\sigma^4$$

donc $\underline{V(T) = 2p\sigma^4}$

Soit $\alpha > 0$

$$P(T > (1+\alpha)p\sigma^2) = P\left(\frac{T}{p\sigma^2} - 1 > \alpha\right)$$

et comme $\left[\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| > \alpha\right] \supset \left[\frac{T}{p\sigma^2} - 1 > \alpha\right]$

et $\left[\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| \geq \alpha\right] \supset \left[\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| > \alpha\right]$

on a $P(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leq P\left(\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| \geq \alpha\right)$

comme $\frac{T}{p\sigma^2}$ admet une espérance (admettons qu'elle soit égale à 1...)

et une variance telle que $V\left(\frac{T}{p\sigma^2}\right) = \frac{1}{p^2\sigma^4} V(T)$

$$= \frac{2}{p}$$

alors d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev,

$\forall \alpha > 0,\ P\left(\left|\frac{T}{p\sigma^2} - 1\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{2}{p\alpha}$

donc $\forall \alpha > 0,\ P(T > (1+\alpha)p\sigma^2) \leq \frac{2}{p\alpha^2}$

Partie III

17) ~~soit f~~ : soient $(u,v) \in (\mathbb{R}^m)^2$ / $u \neq 0_{\mathbb{R}^m}$

si $v = 0_{\mathbb{R}^m}$, le résultat est évident, prenons $v \neq 0_{\mathbb{R}^m}$

soit $g : t \mapsto \|u + tv\|$

soit $f : x \mapsto \|x\|$ ($x \in \mathbb{R}^m$, avec $x \neq 0_{\mathbb{R}^m}$)

g est la fonction directionnelle qui permet d'étudier f en u dans la direction v

$\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\},\ f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$

comme . $(x_1, \dots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^m$ (fonction polynomiale)

. $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$

. $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\},\ \sum_{i=1}^m x_i^2 > 0$

donc par composition, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^m$

donc g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

et $\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \langle D(f)(u+tv) ; v\rangle$

~~or, $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_{\mathbb{R}^m}\},\ D(f)(x) = 2(x_1, \dots, x_m) = 2x$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Maths - Appro - 1

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~donc $\langle \nabla(f)(u+tv) ; v \rangle = 2\langle$ par bilinéarité du produit scalaire~~

~~donc $g'(0) = \langle \nabla f(u) ; v \rangle =$~~

~~donc par bilinéarité du produit scalaire,~~

~~$g'(t) = \langle 2u + 2tv ; v \rangle = 2(\langle u ; v \rangle + t\|v\|^2)$~~

~~on trouve $\frac{\langle u ; v \rangle}{\|u\|}$ puis on utilise~~

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\partial_i(f)(x) = \dfrac{2x_i}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \dfrac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$

donc $\nabla(f)(u) = \dfrac{u}{\|u\|}$

donc $g'(0) = \langle \nabla(u) ; v \rangle$

$= \dfrac{\langle u ; v \rangle}{\|u\|}$

donc $\dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} \xrightarrow[t \to 0]{} g'(0)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \frac{\langle u ; v \rangle}{\|u\|}$

~~18)~~

$\boxed{23)\ d)}$

i)

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):
    k = np.shape(alpha)[0]
    F = -1
    for i in range(0, k):          # avec sa définition ;
        F = F + (alpha[i] * Y[i])**2 / ((lda + alpha[i]**2)**2
    return F
```

ii)

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon):
        a = 0
cf page 24 =>   b = 1/4 * np.sum(Y**2) * # il faut enlever les termes de lésion
        c = (b - a)/2
        while np.abs(FoncSom(alpha, Y, c)) > epsilon :
            if FoncSom(alpha, Y, c) > 0:      # avec 23)a, on a
                a = c                         F decroissante sur
            elif FoncSom(alpha, Y, c) < 0:    # ↗ ]0,+∞[
                b = c
            else:
                return c              # si on tombe exactement sur λ0
            c = (b - a)/2                 donc sur β si ρ(Y) > 1
        return c
```

iii)

```
def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):
    ~~B = np.zeros~~
    k = ~~alpha~~ np.shape(alpha)[0]
    n = np.shape(Y)[0]
    B = np.zeros([n, n])
    for i in range(k):
            B[i,i] = alpha[i]                       # on crée B
    V = np.zeros([n, 1])                            # on crée V
    ~~for i in range(k):~~
          ~~V[i,0] =~~
    
    ro = 0
    for im in range(k):
            ro = ro + (Y[i]/alpha[i])**2
    if ro <= 1:
            beta = 0                                        # on détermine β
    else:
            beta = CalcBeta(alpha, Y, epsilon)
    for i in range(k):
            V[i,0] = alpha[i]*Y[i]/(beta+alpha[i]**2)
    return Y - np.dot(B, V)
```

23) a) Soit $\lambda > 0$

$$f(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{(\lambda+\alpha_i^2)^2} = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2 y_i^2}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4}$$

$$\cancel{= -1 + \sum_{i=1}^{k}}$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il faut montrer que $\frac{y}{x^2+2xy+y^2} \leq \frac{1}{4x}$

$\iff 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$

$\iff x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \iff (x-y)^2 \geq 0$ ce qui est vrai donc $\forall \lambda > 0, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$,

$$\frac{\alpha_i^2}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4} \leq \frac{1}{4\lambda}$$

donc $F(\lambda) \leq -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^{k} y_i^2$

|Correction 23)d)ii|

```
~~b1~~ b1 = 0
    for i in range(k):
        b1 = b1 + Y(i) ** 2
    b = (1/4) b1        # on a ainsi la somme des Yi jusqu'à
                         k et non jusqu'à m avec le np.sum...
```

19)b) ~~$\forall B \in$~~
$\forall X \in \operatorname{Ker} B$, $\langle D(X_0); X \rangle \leq \underbrace{\|BX\|}_{=0 \text{ car } X \in \operatorname{Ker} B}$ (avec 19a)

20)a) Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^m)^2$ / $u \neq 0$

$\|u + v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|}\right)^2$

$= \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - 2 \langle u; v \rangle - \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$

$= \|u\|^2 + 2\langle x; y \rangle + \|v\|^2 - \|u\|^2 - 2\langle u; v \rangle - \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$

$= \frac{(\|u\|\|v\|)^2 - \langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$

donc $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^m)^2$ / $u \neq 0$,
$\|u + v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|}\right)^2 = \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u; v \rangle^2}{\|u\|^2}$

20)b) $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u; v \rangle}{\|u\|}\right)^2 = \left(\|u+v\| - \|u\| - \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|}\right)\left(\|u+v\| + \|u\| + \frac{\langle u; v \rangle^2}{\|u\|}\right)$

19)d) ~~avec~~ comme $W \in M_{m,1}(\mathbb{R})$, on prend V tel que $BV = W$,
on a avec 19)c) $D(X_0) = {}^tB BV$