

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1:

Partie A:

1. a) Initialisation: $U_0 = 1 > 0$

Hérédité: on pose: $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

on suppose la propriété vraie au rang n

comme $U_n > 0$, $\frac{1}{U_n} > 0$

et : $e^{\frac{1}{U_n}} > 0$ par propriété de la fonction \exp

donc: $U_n e^{\frac{1}{U_n}} > 0$

ie: $U_{n+1} > 0$,

ce qui achève l'hérédité

Bilan: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$, par principe de récurrence

1. b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{\frac{1}{U_n}}$$

et: $e^{\frac{1}{U_n}} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} > 0$ par stricte croissance du log

or: on a montré que: $U_n > 0$
donc: $\frac{1}{U_n} > 0$

Bilan: $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

1. c) supposons par l'absurde que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

donc: $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \quad (*)$

donc: $e^{\frac{1}{U_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{l}}$ par continuité de exp sur \mathbb{R}

donc $U_n e^{\frac{1}{U_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l e^{\frac{1}{l}}$

or avec $(*)$ on a par unicité de la limite:

$U_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$
donc: $l = l e^{\frac{1}{l}}$; on aboutit à une contradiction

Bilan: (U_n) admet $+\infty$ comme limite

2. import numpy as np

$a = 1$

$n = 0$

while $u < 10^{**} 6 :$

$$u = u * mp.exp(1/u)$$

$$n = n + 1$$

print (n)

partie B:

en $+\infty$:

$$3. \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc par continuité de \exp sur \mathbb{R} , $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$

$$\text{donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{\frac{1}{n}} = +\infty$$

en 0: $e^{\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (R à l'ordre 2)

$\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en posant $X = \frac{1}{n}$

donc: $e^X \underset{\substack{n \rightarrow 0 \\ X \rightarrow 0}}{=} n \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) \right)$

donc: $\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = 0$

en 0: par croissances comparées,
 $\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = +\infty$

4. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions qui le sont: $n \mapsto \frac{1}{n}$ et $n \mapsto e^n$ et $n \mapsto n$

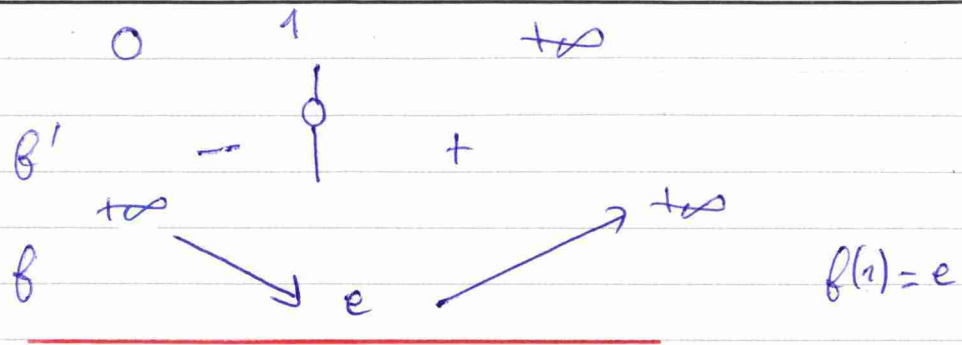
dont le dénominateur n'est annulé par sur \mathbb{R}_+^*

$$\forall n > 0, f'(n) = e^{\frac{1}{n}} + n \left(-\frac{1}{n^2}\right) e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}}$$

$$\forall n > 0, f'(n) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow 1 < n$$

par stricte décroissance de $n \mapsto \frac{1}{n}$ sur \mathbb{R}_+^*

ainsi :



5. a) la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ peut s'écrire : $\sum_{k \geq 0} \frac{(x-1)^k}{k!}$

on reconnaît ainsi le terme général d'une série exponentielle, qui est convergente

$$\text{et : } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} = e^{x-1} = \underline{e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\begin{aligned} 5. b) \quad f(n) &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{-k+1}}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{-k+1}}{k!} + n + 1 \end{aligned}$$

$$\underline{f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{-k+2}}{k!} + n + 1}$$

6. a) on admettra ces inégalités

6. b) d'après l'inégalité admise : comme $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{n}$$

$$\underline{\text{donc } \frac{1}{2n} \leq f(n) - (n+1) \leq \frac{e}{n}}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7. d'après le théorème d'encadrement dans l'inégalité (*) de la question 6.b) : comme $\frac{1}{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\frac{e}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$:

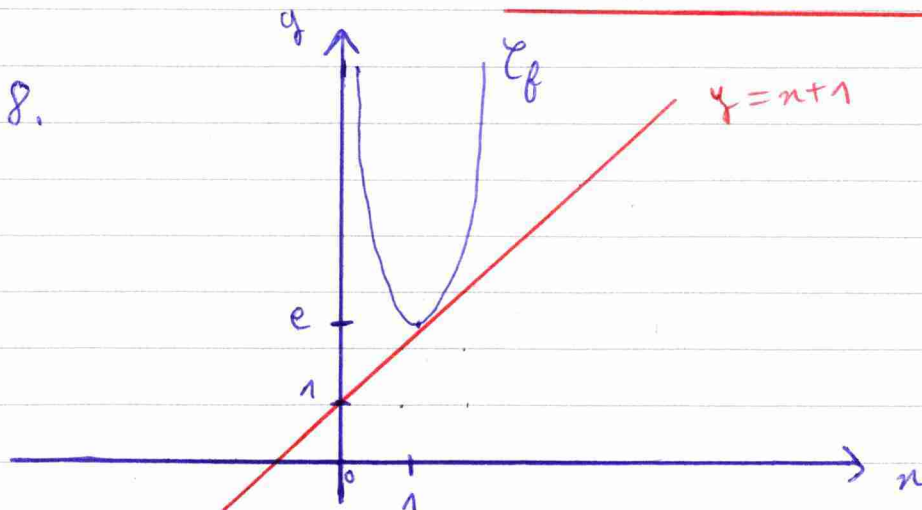
$$f(n) - (n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{donc : } f(n) - (n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h(n) \quad \text{avec } h(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\text{donc : } f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h(n) + n + 1$$

donc par définition, comme $o(1)$ peut s'écrire $h(n)$ comme défini précédemment, on a bien :

$$f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + 1 + o(1)$$



partie C:

9. a) soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \ln\left(u_k e^{\frac{1}{u_k}}\right) - \ln(u_k) \\ &= \ln(u_k) + \ln e^{\frac{1}{u_k}} - \ln(u_k) \end{aligned}$$

$$\underline{\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}}$$

9. b) soit $n \in \mathbb{N}^*$

en sommant la relation précédente pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

par télescopage: $\ln u_n - \ln u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

il ; comme $u_0 = 1$: $\ln u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$

10. a) Soit $k \in \mathbb{N}$, en appliquant l'inégalité (*) de la question 6. b) à $x = u_k$ on a:

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - (u_{k+1}) \leq \frac{e}{u_k}$$

donc $\frac{1}{2u_k} + 1 \leq f(u_k) - u_k \leq \frac{e}{u_k} + 1$

et comme $f(U_k) = U_k e^{\frac{1}{U_k}}$
 $= U_{k+1}$, on a bien:

$$\underline{1 + \frac{1}{2U_k} \leq U_{k+1} - U_k \leq 1 + \frac{e}{U_k}}$$

10. b) en sommant la relation précédente pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2U_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} [U_{k+1} - U_k] \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{e}{U_k}\right)$$

$$\text{ie: } m + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2U_k} \leq U_m - U_0 \leq m + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{e}{U_k}$$

(téléscopage)

$$\text{donc: } m + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{U_k} \leq U_m - 1 \leq m + e \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{U_k}$$

puis, avec le résultat de la 9. b):

$$m + \frac{1}{2} \ln(U_m) \leq U_m - 1 \leq m + e \ln(U_m)$$

$$\text{donc: } \frac{1}{2} \ln(U_m) \leq U_m - 1 - m \leq e \ln(U_m)$$

$$\underline{\text{donc } 1 + \frac{1}{2} \ln(U_m) \leq U_m - m \leq 1 + e \ln(U_m)}$$

11. a) on admettra que: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln(U_m)}{U_m} = 0$

11. b)

donc comme $U_m > 0$, on peut diviser par U_m dans le résultat de la question 10. b):

$$\frac{1}{U_m} + \frac{\ln(U_m)}{2U_m} \leq \frac{U_m - m}{U_m} \leq \frac{1}{U_m} + e \frac{\ln(U_m)}{U_m}$$

par théorème d'encadrement, avec le résultat admis, on a à partir d'un certain rang:

$$\frac{1}{U_m} \leq \frac{U_{m-m}}{U_m} \leq \frac{1}{U_m}$$

$$\text{ie: } \frac{U_{m-m}}{U_m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{U_m}$$

$$\text{donc: } U_{m-m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

$$\text{donc: } U_m \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 1+m$$

12. il faudrait désormais montrer que: $\ln(U_m) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(m+1)$

$$\text{puis que } \ln(m+1) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \ln m \quad (*)$$

$$\text{donc: } \ln(U_m) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \ln m$$

$$\text{ie: } \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{U_k} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \ln m$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ car: } \frac{\ln(m+1)}{\ln m} &= \frac{\ln\left(m\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)}{\ln m} = \frac{\ln m + \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln m} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln m} \end{aligned}$$

$$\text{et comme } \ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{m}$$

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln m} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{m \ln m} \longrightarrow 0$$

$$\text{donc: } \ln(m+1) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \ln m$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve :	Nombre de pages : 24	Session : 2025
	Épreuve de : Mathématiques EM LYON		
Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Exercice 2 :

Partie A :

1. (I, J, K) est génératrice de E , donc c'est une base de E si et seulement si elle est libre

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que : $\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K = 0$

$$\text{donc : } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

bilan : (I, J, K) est libre donc c'est une base de E

$$\text{et : } \underline{\dim E = 3}$$

2. J et K sont symétriques donc diagonalisables.

$$3. a) J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } J^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc: } \underline{J^3 = 2J}$$

3. b) on a: $X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de J

donc les valeurs propres de J ne peuvent être que les racines de ce polynôme (à vérifier), ie:

$$\underline{0, \sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2}}$$

4. a) U_1 est un vecteur propre de J $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
associé à la valeur propre $\sqrt{2}$

$$\text{comme } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et que } \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

on a bien: U_1 vecteur propre de J associé à $\sqrt{2}$

$$\text{de même: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc U_2 est un vecteur propre de J associé à 0

4. b) on choisit: $\underline{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = U_3$

on a bien: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. a) comme J est diagonalisable, il existe une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ constitué de vecteurs propres de J

et comme U_1, U_2 et U_3 sont associés à des valeurs propres distinctes, (U_1, U_2, U_3) est libre.

comme $\dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$,

(U_1, U_2, U_3) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

5. b) on choisit $\underline{P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

comme J est diagonalisable, on a bien: $J = P \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$

ie: $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. a) on a: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc U_1 est un vecteur propre de K associé à la valeur propre 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc U_2 vecteur propre de K associé à -1

$$\text{et : } \begin{pmatrix} 100 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc U_3 est vecteur propre de K associé à 1

comme (U_1, U_3) est libre car les vecteurs sont non colinéaires et que U_1, U_3 d'une part et U_2 d'autre part sont associés à des valeurs propres différentes, on a bien: (U_1, U_2, U_3) libre

donc comme K diagonalisable, pour les mêmes raisons que précédemment, (U_1, U_2, U_3) est une base de vecteurs propres de K

$$6.b) \quad P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. a) on a : pour a, b et c trois réels :

$$M = aI + bJ + cK$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P^{-1}MP &= aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP \\ &= aI + b \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 100 \\ 0-10 \\ 001 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a+b\sqrt{2}+c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a-\sqrt{2}b+c \end{pmatrix}}$$

7. b) les valeurs propres de M sont donc : $a+b\sqrt{2}+c$, $a-c$ et $a-\sqrt{2}b+c$

8. a) on pose cette question

$$8. b) \quad \text{Ker } s = \{ M \in \mathcal{E} : s(M) = 0 \}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement
QR Code

Code épreuve :

Nombre de pages : 74

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$M \in \text{Ker } s \Leftrightarrow s(M) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b\sqrt{2} + c = 0 \\ a - c = 0 \\ a - b\sqrt{2} + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b\sqrt{2} = 0 \\ a = c \\ 2a - b\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \text{Ker } s = \{0\}$$

donc s est injective

$$\text{de plus : } \dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

donc : s est bijective (car surjective)

Partie B :

```

9. def voisins (A, i):
    m = len(A[i])
    v = []
    for j in range(m):
        if j != i and A[i][j] == 1:
            v.append(j)
    return v

```

```

10. def min_ext(L):
    m = 0
    while m in L:
        m = m + 1
    return m

```

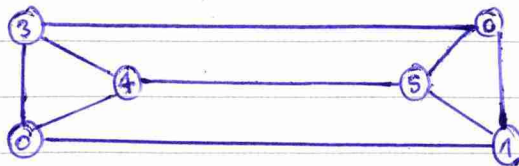
```

11. def coloration(A):
    m = len(A[0])
    C = [k in range(0, m)]
    for i in range(1, m):
        C_voisins = [j for j in v]
        C[i] = min_ext(C_voisins)
    return C

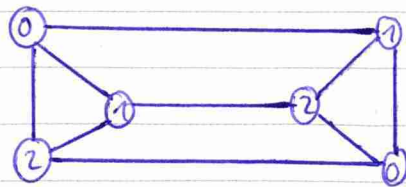
```

12. a) la liste est la suivante : [0, 1, 3, 4, 5]

car le graphe colorié avec les couleurs est le suivant :



12. b) oui, il en admet une :



Exercice 3:

Partie A:

1. a) U est à valeurs dans $]0, 1]$

donc \sqrt{U} est à valeurs dans $]0, 1]$

donc: $\frac{1}{\sqrt{U}}$ est à valeurs dans $[1; +\infty[$

$$\text{car: } \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{U \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{U}} = +\infty$$

donc V est à valeurs dans $[1; +\infty[$

1. b) Soit $n \in \mathbb{R}$

$$\text{si } \underline{n < 1}: F_V(n) = 0$$

$$\text{si } \underline{n \geq 1}: F_V(n) = P(V \leq n)$$

$$= P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq n\right)$$

$$= P\left(\sqrt{U} \geq \frac{1}{n}\right)$$

$$= P\left(U \geq \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - P\left(U \leq \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{car } U \text{ est à densité}$$

$$= 1 - F_U\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{or: } n \geq 1 \quad \text{donc} \quad n^2 \geq 1$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{n^2} \leq 1$$

$$\text{et: } 0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad \text{donc} \quad F_U\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}$$

donc $F_V(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Bilan: $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1. c) F_V est continue sur $]-\infty; 1[$ en tant que fonction constante
 F_V est continue sur $[1; +\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont: $x \mapsto 1$ et $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

le problème en 1: $\lim_{x \rightarrow 1^-} F_V(x) = 0 = F_V(1)$

donc F_V est continue en 1, donc sur \mathbb{R}

de plus: F_V est C^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1, pour les mêmes raisons que précédemment

Bilan: V est une variable aléatoire à densité'

$\forall x < 1, F_V'(x) = f_V(x) = 0$

$\forall x > 1, F_V'(x) = f_V(x) = \frac{2x}{x^3} = \frac{2}{x^2}$

en posant arbitrairement $f_V(1) = 2$, on a:

$\forall x \in \mathbb{R}, f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ est une densité de V

2. V admet une espérance $(\Leftrightarrow) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_V(t) dt$ Converge absolument
 $(\Leftrightarrow) \int_1^{+\infty} t \times \frac{2}{t^3} dt$ converge

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 29

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques EMLYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt \text{ converge}$$

par critère de Riemann, comme $d=2 > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2} dt \text{ converge}$$

donc V admet une espérance

$$\text{et : pour } A \geq 1: \int_1^A \frac{2}{t^2} dt = 2 \left[\frac{t^{-1}}{-1} \right]_1^A$$

$$= 2 \left(\frac{A^{-1}}{-1} + 1^{-1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{A} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2$$

donc $E(V) = 2$

V admet une variance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_V(t) dt$ converge absolument

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} t^2 \times \frac{2}{t^3} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{t} dt \text{ converge}$$

or par critère de Liemann, cette intégrale diverge car
 $d=1$
 donc: V n'admet pas de variance

Partie b:

3. a) Soit $m \geq 1$.

l'ensemble des valeurs prises par M_m est: $[1; +\infty[$

donc: $\forall x < 1, F_m(x) = 0 = 0^m$ (car $m \geq 1$)
 $= (F_V(x))^m$

Soit $x \geq 1$

$$F_m(x) = P(M_m \leq x)$$

$$= P\left(\prod_{i=1}^m [V_i \leq x]\right)$$

$$= \prod_{i=1}^m P(V_i \leq x) \quad \text{car les } (V_i)_{i \geq 1} \text{ sont indépendantes}$$

$$= \prod_{i=1}^m F_V(x) \quad \text{car les } (V_i)_{i \geq 1} \text{ suivent la même loi que } V$$

$$= (F_V(x))^m$$

Bilan: $\forall x \in \mathbb{R}, F_m(x) = (F_V(x))^m$

donc: $\forall m \geq 1, F_m = (F_V)^m$

3. b) Soit $n \in \mathbb{R}$

$$\text{si } n < 1: \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(n) = 0$$

$$\text{si } n \geq 1: \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^m$$

$$\text{or: } 1 - \frac{1}{n^2} \in [0; 1[$$

$$\text{donc: } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^m = 0$$

$$\text{donc: } \forall n \in \mathbb{R}, \lim_{m \rightarrow +\infty} F_m(n) = 0$$

3. c) il n'existe aucune variable aléatoire qui admette pour fonction de répartition une fonction nulle sur \mathbb{R} , car par définition une fonction de répartition doit tendre vers 1 en $+\infty$

donc: $(M_m)_{m \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire

soit $m \geq 1$
4. a) la variable aléatoire $\frac{M_m}{\sqrt{m}}$ est à valeurs dans $]0; +\infty[$

$$\text{donc: } \forall n \leq 0, G_m(n) = 0$$

Soit $n > 0$

$$\begin{aligned} G_m(n) &= \mathbb{P}\left(\frac{M_m}{\sqrt{m}} \leq n\right) \\ &= \mathbb{P}(M_m \leq n\sqrt{m}) = (F_V(n\sqrt{m}))^m \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(2\sqrt{m})^2}\right)^m$$

$$= \left(1 - \frac{1}{mn^2}\right)^m$$

$$= e^{m \ln\left(1 - \frac{1}{mn^2}\right)}$$

$$\text{or: } \ln\left(1 - \frac{1}{mn^2}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{mn^2}$$

$$\text{donc: } m \ln\left(1 - \frac{1}{mn^2}\right) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

$$\text{donc: } m \ln\left(1 - \frac{1}{mn^2}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n^2}$$

donc par continuité de \exp sur \mathbb{R} :

$$e^{m \ln\left(1 - \frac{1}{mn^2}\right)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n^2}}$$

$$\text{donc: } \forall n > 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} G_m(n) = e^{-\frac{1}{n^2}}$$

$$4.b) \quad \text{comme: } \forall n \leq 0, \lim_{m \rightarrow +\infty} G_m(n) = 0$$

$$\text{ona: } \frac{M_m}{\sqrt{m}} \xrightarrow{Z} W$$

Partie D:

7. Soit $n \in \mathbb{N}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(N=m) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^m}{m!}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques EM LYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8. l'ensemble $T(n)$ des valeurs prises par T est \mathbb{N}^* .

9. a) Sachant l'événement $[N=m]$ réalisé, l'ensemble des valeurs prises par T est $[1, m]$

de plus: on peut introduire une loi de Bernoulli comptant 1 si $V_i > A$ et 0 sinon (pour $i \geq 1$)

ie: $\mathbb{1}_{[V_i > A]}$

comme T compte les succès de ces épreuves de Bernoulli indépendantes, on a bien: $T \subset \mathcal{B}(m, P(V_i > A))$ identiques et

$$\text{or: } P(V_i \leq A) = F_V(A) = 1 - \frac{1}{A^2}$$

$$\text{donc } P(V_i > A) = 1 - 1 + \frac{1}{A^2} = \frac{1}{A^2}$$

$$\text{donc: } T \subset \mathcal{B}(m, \frac{1}{A^2})$$

9. b) Soit $k \in \mathbb{N}$

si $k > m$: $P_{[N=m]}(T=k) = 0$ car il ne peut pas y avoir plus d'éléments de $\{V_1, \dots, V_m\}$ qui

prennent une valeur supérieure à A qu'il n'y a d'éléments dans cet ensemble
 autrement dit, si $[N=m]$, T peut compter au plus m éléments

$$\text{si } k \leq m: \underline{P_{[N=m]}(T=k) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{m-k}}$$

no. Soit $k \in \mathbb{N}$

comme $\{[N=m], m \in \mathbb{N}^*\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([N=i] \cap [T=k]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(N=i) P_{[N=i]}(T=k) \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^i}{i!} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{i-k} \quad (i \geq k) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{i-k} \\ &= e^{-\lambda} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-k)!} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{i-k} \\ \text{en posant } i' &= i-k \\ \text{(changement de variable)} & \quad \downarrow \\ &= e^{-\lambda} \times \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+k}}{i!} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^i \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda} \times \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times \lambda^k \times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)^i$$

$$= e^{-\lambda} \times \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k \times \frac{1}{k!} \times e^{\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{A^2}\right)}$$

$$= e^{-\lambda - \frac{\lambda}{A^2} + \lambda} \times \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}$$

$$P(T=k) = e^{-\frac{\lambda}{A^2}} \times \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}$$

donc: $T \subset \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)$

11.

ceci revient à calculer $E(T)$

$E(T)$ existe car T suit une loi de poisson

$$\text{et: } \underline{E(T) = \frac{\lambda}{A^2}}$$