HANNIEL

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) DOSSONGUY HANNIEL

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques - Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 14

Numéro de table 007

EXERCICE 1

Partie 1

1/ $J = M - 2I$

a) . $J = M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)

. $J^2 = J.J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \underline{3J}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$\boxed{J^2 = 3J}$

c)

$J = M - 2I \iff M = J + 2I$

$M^2 = (J + 2I)^2$ (I et J étant deux matrices qui commuttent)

$M^2 = J^2 + 4J + 4I$

or $J^2 = 3J$.

Ainsi :

$M^2 = 3J + 4J + 4I$

$\boxed{M^2 = 7J + 4I}$

d)

$M^2 = 7J + 4I$

$M^2 = 7J + 4I + 10I - 10I$

$M^2 = 7J + 14I - 10I$

$M^2 = 7(J + 2I) - 10I$

or $M = J + 2I$.

Ainsi :

$\boxed{M^2 = 7M - 10I}$

2/ $R(x) = x^2 - 7x + 10$

a)

D'après 1.d ; $M^2 = 7M - 10I$

$\Leftrightarrow M^2 - 7M + 10I = 0$.

Puisque $R(x) = x^2 - 7x + 10$.

~~L'~~ On peut dire que le pôlynome R est un pôlynome annulateur de M.

b)

~~$R(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x$~~

- $R(2) = 2^2 - 7\times 2 + 10$

$= 4 - 14 + 10$

$= 14 - 14$

$\underline{R(2) = 0}$.

2 est bien racine de R.

- $R(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4\times 10$

$= 49 - 40$

$\Delta = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \dfrac{7-3}{2}$; $x_2 = \dfrac{7+3}{2}$

$\underline{x_1 = 2}$; $\underline{x_2 = 5}$

Les deux racines de R sont. $\{2 ; 5\}$.

2.c/

R étant un polynôme annulateur de M ~~et~~ , ses racines sont les valeurs propres possibles de M.

Ainsi, les valeurs propres possibles de M sont : $\{2 ; 5\}$.

3/

~~et~~

$$\cdot\ MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$$

$\underline{MU = 5U}$ et $\underline{U \neq 0}$, donc l'on peut déduire que 5 est effectivement une valeur propre de M, associé au vecteur propre U.

4/

$$\cdot\ MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V$$

~~HV~~

$$\cdot\ MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2W$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) DOSSONGUY HANNIEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths-Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 14

Numéro de table 007

On a donc : $MV = 2V$ et $MW = 2W$ et $V \neq 0$ et $W \neq 0$; donc V et W sont deux vecteurs propres de M associés à la valeur propre 2.

5.

a)

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{QP = 3I}$$

b)

$$QP = 3I$$

$$\frac{1}{3}(QP) = I$$

$\left(\frac{1}{3}Q\right)P = I$; donc P est inversible

et son inverse est $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}Q}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c)

- $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- $MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $PD = MP$

d)

$PD = MP \iff MP = PD$

~~$PDP^{-1} =$~~

$MPP^{-1} = PDP^{-1}$ (P étant inversible)

$M = PDP^{-1}$

or $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

$M = \frac{1}{3} PDQ$.

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$; $M^n = \frac{1}{3} PD^n Q$.

Initialisation

pour $n = 0$.

. $\frac{1}{3} PD^0 Q = \frac{1}{3} PIQ = P(\frac{1}{3} Q) = I$

- $M^0 = I$

La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

- supposons que $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

- démontrons que $M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$

on a :

$M^{n+1} = M^n M$

$= \frac{1}{3} P D^n Q \left(\frac{1}{3} P D Q\right)$ (D'après l'hypothèse de récurrence)

$= \frac{1}{3} P D^n \left(\frac{1}{3} Q\right) P D Q$

$= \frac{1}{3} P D^n I D Q$

$= \frac{1}{3} P D^n D Q$

$M^{n+1} = \frac{1}{3} P D^{n+1} Q$, la propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \frac{1}{3} P D^n Q$

Partie 2

6.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$U_{n+1} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$$
$$= 5(7a_n + b_n) + (-10a_n)$$
$$= 35a_n + 5b_n - 10a_n$$
$$= 25a_n + 5b_n$$
$$= 5(5a_n + b_n)$$

$U_{n+1} = 5U_n$; d'où (U_n) est une suite géométrique de raison 5.

- $U_0 = 5a_0 + b_0 = 5 \times 0 + 1$

$U_0 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = U_0 q^n$

$$\boxed{U_n = 5^n}$$

b) $\forall n \geq 0$;

$$V_{n+1} = -2a_{n+1} - b_{n+1}$$
$$= -2(7a_n + b_n) + 10a_n$$
$$= -14a_n - 2b_n + 10a_n$$
$$= -4a_n - 2b_n$$
$$= 2(-2a_n - b_n)$$

$V_{n+1} = 2V_n$, d'où (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

- $V_0 = -2a_0 - b_0 = 0 - 1$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) DOSSONGUY HANNIEL

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths-Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 14

Numéro de table 007

$v_0 = -1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = v_0\, q^n$

$$\boxed{v_n = -(2)^n}$$

6 · c)

$\forall n \geqslant 0$; $u_n = 5a_n + b_n$

$v_n = -2a_n - b_n$

• $(u_n + v_n) = 5a_n + b_n - 2a_n - b_n$

$u_n + v_n = 3a_n$

Ainsi : $a_n = \frac{1}{3}(u_n + v_n)$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n)}$$

• $(5v_n + 2u_n) = -10a_n - 5b_n + 10a_n + 2b_n$

$5v_n + 2u_n = -5b_n + 2b_n$

$5v_n + 2u_n = -3b_n$

$\Rightarrow b_n = -\frac{1}{3}(5v_n + 2u_n)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$w_n = \frac{1}{3}(-5v_n - 2u_n)$$

$$= \frac{1}{3}(5(+2)^n - 2 \times 5^n)$$

$$\boxed{w_n = \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n)}$$

7/

Initialisation

pour $n = 0$:

- $M^0 = I$
- $a_0 M + b_0 I = 0.M + 1.I = I$

La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

- supposons que $M^n = a_n M + b_n I$
- démontrons que $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

On a :

$$M^{n+1} = M^n . M$$
$$= (a_n M + b_n I) M \quad \text{(Hypothèse de récurrence)}$$
$$= a_n M^2 + b_n M$$

or $M^2 = 7M - 10I$ d'après 1.d.

$$M^{n+1} = a_n(7M - 10I) + b_n M$$

$M^{n+1} = 7a_n M - 10 a_n I + b_n M$
$= (7a_n + b_n) M - 10 a_n I$
$M^{n+1} = a_{n+1} M - b_{n+1} I$, la propriété est héréditaire.

conclusion : d'après l'hypothèse de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$; $M^n = a_n M + b_n I$.

Partie 3

5.

a)

. Le 2è jour, le chat a la possibilité de se nourrir dans la maison numéro 1 avec la probabilité $\frac{3}{5}$ puisqu'il s'y est nourri le jour 1.

~~Ainsi~~

. De plus, le 2è jour, le chat peut se nourrir dans une autre maison que celle numéroté 1, c'est-à-dire les maisons numérotées 2 et 3 avec équi-probabilité $= \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5 \times 2} = \frac{1}{5}$.

On a donc :

$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$

$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{5}$

(suite)

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) DOSSONGUY HANNIEL

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 14

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page.

8.

b)

$$E(X_2) = 1.\mathbb{P}(X_2=1) + 2.\mathbb{P}(X_2=2) + 3.\mathbb{P}(X_2=3)$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$\boxed{E(X_2) = \frac{8}{5}}$$

c) $V(X_2) = E(X_2^2) - E^2(X_2)$

$$V(X_2) = 1^2.\mathbb{P}(X_2=1) + 4\,\mathbb{P}(X_2=2) + 9\,\mathbb{P}(X_2=3) - \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{5} - \frac{64}{25}$$

$$= \frac{80-64}{25}$$

$$\boxed{V(X_2) = \frac{16}{25}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

. soit σ l'écart-type de X_2.

$$\sigma = \sqrt{V(X_2)}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{4}{5}}$$

9)

a.

$$X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}.$$

$[(X_2=1), (X_2=2), (X_2=3)]$ est un système complet d'évènement.

D'après la formule de probabilités totales :

$$* \ \mathbb{P}(X_3=1) = \mathbb{P}[(X_3=1) \cap (X_2=1)] + \mathbb{P}[(X_3=1) \cap (X_2=2)] + \mathbb{P}[(X_3=1) \cap (X_2=3)]$$
$$= \mathbb{P}(X_2=1) . \mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=1) + \mathbb{P}(X_2=2) . \mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3=1)$$
$$+ \mathbb{P}(X_2=3) . \mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=1)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{9+1+1}{25}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{11}{25}}$$

- $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 2) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 2)$

$$+ \mathbb{P}(X_2 = 3) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3 = 2)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3+3+1}{25}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{7}{25}}$$

- $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 3) + \mathbb{P}(X_2 = 2) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 3)$

$$+ \mathbb{P}(X_2 = 3) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3 = 3)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{7}{25}}$$

9. b)

$$\mathbb{P}_{(X_3=3)}(X_2 = 2) = \frac{\mathbb{P}[(X_2 = 2) \cap (X_3 = 3)]}{\mathbb{P}(X_3 = 3)}$$

$$\mathbb{P}_{(X_3=3)}(X_2=2) = \frac{\mathbb{P}(X_2=2)\cdot \mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3=3)}{\mathbb{P}(X_3=3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{5}} \times \frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{7}{\cancel{15}}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X_3=3)}(X_2=2) = \frac{1}{7}}$$

10.

a)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}$$

* Calculons les probabilités.

$[(X_n=1), (X_n=2), (X_n=3)]$ est un système complet d'évènement.

D'après la formule des probabilités totales :

- $\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \mathbb{P}(X_n=1)\cdot\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) + \mathbb{P}(X_n=2)\cdot\mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=1)$

$$+ \mathbb{P}(X_n=3)\cdot\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \frac{3}{5}\mathbb{P}(X_n=1) + \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_n=2) + \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_n=3)$$

Par ce même raisonnement, on obtient :

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signatur

Nom

Prénom (s) DOSSOWGUY

20 / 20

écricome Épreuve : Maths - Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 14

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page

- $\mathbb{P}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_n=1) + \frac{3}{5}\mathbb{P}(X_n=2) + \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_n=3)$

- $\mathbb{P}(X_{n+1}=3) = \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_n=1) + \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_n=2) + \frac{3}{5}\mathbb{P}(X_n=3)$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\mathbb{P}(X_n=1) + 1/5\,\mathbb{P}(X_n=2) + 1/5\,\mathbb{P}(X_n=3) \\ 1/5\,\mathbb{P}(X_n=1) + 3/5\,\mathbb{P}(X_n=2) + 1/5\,\mathbb{P}(X_n=3) \\ 1/5\,\mathbb{P}(X_n=1) + 1/5\,\mathbb{P}(X_n=2) + 3/5\,\mathbb{P}(X_n=3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \\ \mathbb{P}(X_n=3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} C_n$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n$$

10. b)

Initialisation

pour $n = 1$:

$$\frac{1}{5^{1-1}} M^{1-1} C_1 = \frac{1}{1} I C_1 = C_1$$

La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

supposons que la propriété est vraie et démontrons qu'elle est vraie aussi pour $n+1$.

$$C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n$$

$$= \frac{1}{5} M . \times \frac{1}{5^{n-1}} \times M^{n-1} \times C_1$$ (hypothèse de récurrence)

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^{n-1}} \times M . M^{n-1} \times C_1$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{5^n} M^n C_1$$, la propriété est héréditaire

<u>conclusion</u> : d' après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \quad C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1 .$$

10. c) $\quad X_n(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

- $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi ; $M^{n-1} . C_1$ revient à ne retenir que la première colonne de M^{n-1}.

Ainsi ; la loi de X_n est donnée par :

- $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^{n-1}} \times (5^{n-1} + 2^n)$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2^n}{5^{n-1}}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3}\left[1 + 5\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}$$

- $\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^{n-1}} (5^{n-1} - 2^{n-1})$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]}$$

- $\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^{n-1}} (5^{n-1} - 2^{n-1})$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]}$$

11.

a)

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\left[1 + 5\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]$$
$$+ \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]$$

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\left[1 + 5\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{5}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$\boxed{E(X_n) = 2 + \frac{5}{3}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]}$$

b)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$

car $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = 2}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) DOSSONGUY

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 14

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page

Partie 4

12/

Cette requête permet d'afficher le nom des chats et leur numéro de puce (entier), spécialement pour les chats de couleur grise et de sexe "femelle".

13 /

```
UPDATE propriétaires
SET nomchat = "Niels"
AND pucechat = 987654321
WHERE idprop = 1234;
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

14/

```
INSERT INTO chats
VALUES (457, "Niels", "birmane", "M", "blanc",
        1, 2, 987654321);
```

15/

```
SELECT chats.nomchat, race, puce, nomprop, adresse
FROM Chats JOIN propriétaires
ON Chats.puce = propriétaires.~~puchat~~ pucechat;
```

EXERCICE 2

Partie 1

1.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f'(x) = (e^x)' + (e^{-x})'$$
$$= e^x - e^{-x}$$
$$f'(x) = g(x)$$

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$;

$$g'(x) = (e^x)' - (e^{-x})'$$
$$= e^x - (-e^{-x})$$
$$= e^x + e^{-x}$$
$$g'(x) = f(x)$$

2.

a)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

2.b)

$\forall x \in \mathbb{R}; \quad g'(x) = f(x).$

or $f(x) = e^{x} + e^{-x}$

$\cdot \forall x \in \mathbb{R}; \ e^{x} > 0$

$\cdot \forall x \in \mathbb{R}; \ e^{-x} > 0.$

Ainsi; $\forall x \in \mathbb{R}; \ g'(x) > 0.$

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3)

a.

$$g(x) = 0 \iff e^{x} - e^{-x} = 0$$
$$\iff e^{x} = e^{-x}$$
$$\iff x = -x \quad \text{(par passage au log)}$$
$$\iff 2x = 0$$
$$\iff x = 0.$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) HANNIEL

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 14

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page...

Ainsi : $g(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 0}$.

3. b/

. $\forall x \;]-\infty ; 0]$; $g(x) \in]-\infty ; 0]$.

. $\forall x \in [0 ; +\infty[$; $g(x) \in [0 ; +\infty[$.

Tableau de signe de g.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

c/

. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- $f(0) = e^0 + e^{-0}$
  $= 1 + 1$
  $f(0) = 2$

3. d/

$\forall x \in \mathbb{R};$

$f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.

Ainsi: $f''(x) = f(x)$.

~~Or $\forall x \in \mathbb{R}$;~~

Or f admet un minimum au point

d' abscisse $x=0$; et le minimum est 2.

Ainsi ;

$\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f(x) \geq 2$$
$$\Rightarrow f''(x) \geq 2 \geq 0$$
$$\Rightarrow f''(x) \geq 0.$$

On en déduit que que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$g'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = g(x).$$

Ainsi : $g''(x) = g(x)$.

D'après la question 3.b ; on déduit que :

* $\forall x \in]-\infty ; 0]$; $g(x) \leq 0$; donc g est concave sur cet intervalle

* $\forall x \in [0 ; +\infty[$; $g(x) \geq 0$ donc g est convexe sur cet intervalle.

5)

a.

$$(T) : y = g'(0)(x-0) + g(0)$$
$$= x.f(0) + 0$$
$$(T) : y = x \times 2.$$

$$\boxed{(T) : y = 2x}$$

5°

b)

* g est concave sur $]-\infty ; 0]$; donc g est situés en dessous de (T) sur cet intervalle

* g est convexe sur $[0 ; +\infty[$; donc g est située au dessus de g sur cet intervalle.

c)

* g est située en dessus de (T) sur $]-\infty ; 0]$; Ainsi :

$\forall x \leq 0 ; \quad g(x) \leq (y = 2x)$

$\forall x \leq 0 ; \quad g(x) \leq 2x$

* g est située au dessus de (T) sur $[0 ; +\infty[$; Ainsi :

$\forall x \geq 0 ; \quad g(x) \geq (y = 2x)$

$g(x) \geq 2x$

6/

a.

$\forall x \in \mathbb{R} ;$

$f(x) - g(x) = e^{x} + e^{-x} - (e^{x} - e^{-x})$

$= \cancel{e^{x}} + e^{-x} - \cancel{e^{x}} + e^{-x}$

$f(x) - g(x) = 2e^{-x}$

or $\forall x \in \mathbb{R} ;\ e^{-x} \geq 0 \Rightarrow 2e^{-x} \geq 0.$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) HANNIEL

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 14

Numéro de table 007

Ainsi ; $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) - g(x) \geq 0$

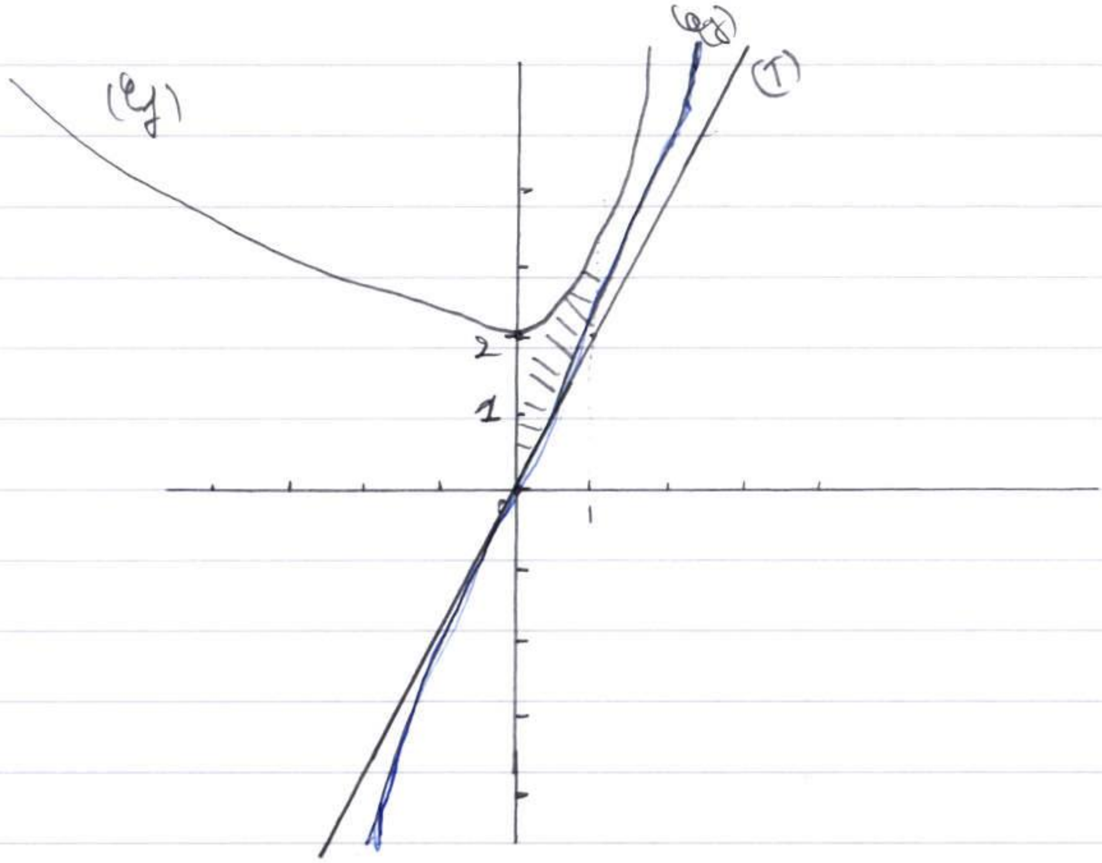
$\Rightarrow f(x) \geq g(x)$

6/ .

b.

L'on peut en déduire que $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

7.



NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

8/

a. (Voir graphique)

b.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= [\, g(x) \,]_0^1$$

$$= g(1) - g(0)$$

$$= g(1) \quad \text{car} \quad g(0) = 0$$

$$= e - e^{-1}$$

$$= e - \frac{1}{e}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{e^2-1}{e}$$

L'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$ est égale à $\left(\frac{e^2-1}{e}\right)$ en unités d'aire.

8/ c. $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 2x\,dx$

$= \frac{e^2-1}{e} - [x^2]_0^1$

$= \frac{e^2-1}{e} - 1$

$= \frac{e^2-1-e}{e}$

$\mathcal{A} = \frac{e^2-e-1}{e}$

$\mathcal{A}$ est donc égale à $\frac{e^2-e-1}{e}$ en unités d'aire

9/

a.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$h'(x) = [f(x) - 2 - x^2]'$

$= f'(x) - 2x$

$h'(x) = g(x) - 2x$

b.

D'après 5.c :

* h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ car $g(x) \leq 2x$ sur cet intervalle
* h est croissante sur $[0; +\infty[$ car $g(x) \geq 2x$ sur cet intervalle.

h admet donc un minimum en 0.

. $h(0) = g(0) - 2\times 0$

$= 0 - 0$

$h(0) = 0$.

0 étant le minimum de h,

on a : $\forall x \in \mathbb{R}$;

$h(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow f(x) - 2 - x^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow f(x) \geqslant 2 + x^2$

9/

c.

k est dérivable sur $\mathbb{R}$;

$\forall x \in \mathbb{R}$;

$k'(x) = g'(x) - 2 - x^2$

$= f(x) - 2 - x^2$

$k'(x) = h(x)$

d.

D'après 9.b ; $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geqslant 2 + x^2$

$\Rightarrow f(x) - 2 - x^2 \geqslant 0$

$\Rightarrow h(x) \geqslant 0$.

Ainsi, k est croissante sur $\mathbb{R}$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) HANNIEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - Info

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 14

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page

. $k(0) = g(0) - 2\times 0 - \frac{1}{3}(0)$

$k(0) = 0$.

Ainsi :

. $\forall x \in]-\infty ; 0] ;\quad x \leq 0$

$k(x) \leq k(0)$ (k étant croissante)

$k(x) \leq 0$.

. $\forall x \geq 0 ;\quad k(x) \geq 0$.

On a donc :

* $\forall x \leq 0 ;\quad k(x) \leq 0 \iff g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3 \leq 0$

$\iff g(x) \leq 2x + \frac{1}{3}x^3$

* $\forall x \geq 0 ;\quad k(x) \geq 0 \iff g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3 \geq 0$

$\iff g(x) \geq 2x + \frac{1}{3}x^3$

Partie B

10°

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ($]\lim_{x \to -\infty} g(x) ; \lim_{x \to +\infty} g(x)[$).

Or $\forall n \neq 0 ; \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$.

On conclut donc que l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution.

11°

- $g(u_1) = \frac{1}{1} = 1$.

- $g(0) = 0$

- $g(1) = e - e^{-1} = 2{,}7 - 0{,}4 = 2{,}3$

$g(0) < g(u_1) < g(1)$

g étant croissante sur $[0,1]$;

$0 < u_1 < 1$.

12.

Initialisation

pour $n = 1$:

$u_1 \in]0,1[$; $u_1 > 0$.

La propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- supposons que la propriété est vraie pour n et démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

$$\cdot g(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

or : $g(0) = 0$ et $g(1) = 2,3$.

De plus; $\frac{1}{n+1} > 0$ et $\frac{1}{n+1} < 1$.

Ainsi : $g(0) < g(u_{n+1}) < g(1)$

$0 < u_{n+1} < 1$, g étant croissante

La propriété est héréditaire

conclusion : d'après le principe de récurrence ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n > 0$.

13.

a)

$$g(u_{n+1}) - g(u_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$g(u_{n+1}) - g(u_n) = -\frac{1}{n(n+1)}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n(n+1)} > 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

Ainsi ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$g(u_{n+1}) - g(u_n) < 0$

$g(u_{n+1}) < g(u_n)$

$u_{n+1} < u_n$, g étant croissante sur $\mathbb{R}$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

b)

(u_n) est décroissante et est minorée par 0. (u_n) est donc convergente.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) HANNIEL

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 14

Numéro de table 007

14.

a)

```
import numpy as np
def d(x, n) :
    if n==0 :
        return "erreur"
    else :
        return (np.exp(x) - np.exp(-x) - 1/n)
```

b)

```
def SuiteU(n) :
    U = np.zeros(n)
    for k in range(n):
        a=0 ; b=1
        while b-a > 10**(-3) :
            c = (a+b)/2
            if d(a, k+1)* d(c, k+1) < 0 :
                b = c
            else:
                a = c
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE


```
        u[k] = c
return (u)
```

14. c)

On peut conjecturer que

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

EXERCICE 3

Partie 1

1)

a.

Soit f une densité de T.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(T) = \frac{1}{p} = 1$$

$$V(T) = \frac{1}{p^2} = 1$$

b.

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > 3) &= 1 - \mathbb{P}(T \leq 3) \\ &= 1 - F(3) \\ &= 1 - (1 - e^{-3}) \\ &= 1 - 1 + e^{-3} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}(T \leq 3)$

$$\mathbb{P}\cancel{(T > 3)} = e^{-3}$$

$$\mathbb{P}(T \leq 3) = F_T(3)$$

$$\underline{\mathbb{P}(T \leq 3) = 1 - e^{-3}}$$

d.

$$\mathbb{P}_{(T \geq 1)}(T \geq 2) = \frac{\mathbb{P}[(T \geq 1) \cap (T \geq 2)]}{\mathbb{P}(T \geq 1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T \geq 2)}{\mathbb{P}(T \geq 1)}$$

$$= \frac{1 - \mathbb{P}(T < 2)}{1 - \mathbb{P}(T < 1)}$$

$$= \frac{1 - 1 + e^{-2}}{1 - 1 + e^{-1}}$$

$$= \frac{e^{-2}}{e^{-1}}$$

$$\mathbb{P}_{(T \geq 1)}(T \geq 2) = e^{-1}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 14

Numéro de table

2.

a)

$U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$.

Soit f_U une densité de U

$$\cancel{f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}}$$

$$f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2. b)

$\forall x \in \mathbb{R};$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(U) \leq x)$

$= \mathbb{P}(\ln(U) \geq -x)$

$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(U \geq e^{-x})$

c)

$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(U \geq e^{-x}).$

. $\forall x < 0; \quad x < 0$

$-x > 0$

$e^{-x} > 1.$

or $U(\Omega) =]0;1[$.

Ainsi ;

$\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(U \leq e^{-x})$

$= 1 - F_U(e^{-x})$

$= 1 - 1$ car $(e^{-x} > 1)$

$\mathbb{P}(X \leq x) = 0$

d)

$\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F_U(e^{-x})$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit f_X une densité de X.
F étant dérivable, on obtient :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

e)

```
def SimulT():
    return rd.exponential(1)
```

Partie 2

3-

a)

$$I_1(A) = \int_0^A e^{-x}\,dx$$

$$= -\left[e^{-x}\right]_0^A$$

$$= -\left(e^{-A} - 1\right)$$

$$I_1(A) = 1 - e^{-A}$$

b)

$$\lim_{A \to +\infty} e^{-A} = 0.$$

$$\lim_{A \to +\infty} I_1(A) = 1.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge et vaut 1.

4-

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad I_n(A) = \int_0^A x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$;

$$I_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x} \, dx$$

Posons : $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \to u(x) = -e^{-x} \\ v(x) = x^n \to v'(x) = n x^{n-1} \end{cases}$

u et v sont dérivables sur $[0, A]$
u' et v' sont continues sur $[0, A]$.

$$I_{n+1}(A) = -\left[x^n e^{-x}\right]_0^A + \int_0^A n x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

$$= -\left(A^n e^{-A} - 0\right) + n \int_0^A x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

$$I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^{+A}} + n \, I_n(A)$$

5)

* Soit $I_n(A)$ admet une limite finie quand A tend vers plus l'infini $(+\infty)$.

* $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{A^n}{e^A} = 0$ par croissance comparée.

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Écricome Épreuve :

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 12 / 14

Numéro de table

Ainsi ; si $(I_n)(A)$ admet une limite finie que A tend vers $+\infty$, $I_{n+1}(A)$ admet une limite finie car lorsque A tend vers $+\infty$; la limite de $\left(-\frac{A^n}{e^A}\right)$ est une limite finie.

6/

Initialisation

pour $n=1$:

I_1 converge d'après 3.b

la propriété est initialisée

Hérédité

soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé

- supposons que $\int_0^{+\infty} I_n$ converge

- démontrons que I_{n+1} converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$I_{n+1}(A) = -\dfrac{A^n}{e^A} + n\, I_n(A).$

Si $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$ converge, (hypothèse de récurren)

$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$ converge d'après 5.

Car si I_n admet une limite finie ; I_{n+1} admet aussi une limite finie quand $A \to +\infty$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : D'après le principe de récurrence ;

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; I_n converge

- $\lim\limits_{A \to +\infty} -\dfrac{A^n}{e^A} = 0$ par croissance comparée.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = 0 + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

Et $I_{n+1} = n\, I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

7.

$\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad I_{n+1} = n\, I_n.$

$\cancel{I_2} = 1 \times I_1$

$\cancel{I_3} = 2 \times \cancel{I_2}$

$\cancel{I_4} = 3 \times \cancel{I_3}$

$\vdots$

$I_n = (n-1)\, \cancel{I_{n-1}}$

En multipliant, l'on obtient :

$I_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times I_1$

$= (n-1)! \times I_1$

$I_n = (n-1)!$ (avec $I_1 = 1$)

Partie 3

8.

Positivité

. f_n est positive sur $]-\infty; 0[$ en tant que fonction nulle.

. $\forall x \geq 0;\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \geq 0$

car $\forall x \geq 0$: . $x^{n-1} \geq 0$ et $\dfrac{1}{(n-1)!} \geq 0$

. $e^{-x} \geq 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

f_n est donc positive sur $\mathbb{R}$.

<u>continuité</u>

- f_n est continue sur $]-\infty; 0[$ en tant que fonctionne nulle.

- $\forall x \in [0; +\infty[$; $f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}$

  . $x \mapsto x^{n-1}$ est continue sur $[0; +\infty[$
  . $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

f_n est donc continue sur $[0; +\infty[$ par produit

f_n est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

<u>Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt$</u>

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,dt = 0$

- $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}\,dx$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times I_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times (n-1)! \text{ (D'après 7)}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 13 / 14

Numéro de table

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = 1.$$

Les 2 intégrales $\int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ convergent. Ainsi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1.$$

Les 3 conditions étant réunies;

f_n est effectivement une densité de probabilité.

9.

a)

Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\, dx$ converge.

- $\int_{-\infty}^{0} x f_n(x)\, dx = 0$

- $\int_{0}^{+\infty} x f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x . x^{n-1} e^{-x}\, dx$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} I_{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} n . I_n$$

$$= \frac{1}{\cancel{(n-1)!}} n \times \cancel{(n-1)}!$$

$$\int_0^{+\infty} x f_n(x)\, dx = n$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x f_n(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} x f_n(x) dx$ converges.

Ainsi, Y admet une espérance et :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{0} x f_n(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$$

$$= 0 + n$$

$$\boxed{E(Y) = n}$$

9. b)

- $$E(F_N) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(Y_i) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n$$

$$= \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N} 1.$$

$$= \frac{n}{\cancel{N}} \times \cancel{N}$$

$$\boxed{E(F_N) = n}$$

- $$V(F_N) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} V(Y_i) \quad \text{par indépendance}$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} n$$

$V(F_N) = \frac{1}{N^2} \times n \times N$

$$\boxed{V(F_N) = \frac{n}{N}}$$

9.

c)

F_N est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.

D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchébychev, $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}[|F_N - E(F_N)| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(F_N)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}[|F_N - E(F_N)| \geq \varepsilon] \leq \frac{n}{N\varepsilon^2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}[|F_N - n| \geq \varepsilon] \leq \frac{n}{N\varepsilon^2}}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le / /

Signature

Nom

Prénom (s)

20 / 20

Ecricome Épreuve : ....

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 14 / 14

Numéro de table

9.

d)

La valeur de n pourrait être estimée à : 3

e)

Certains intervalles ne contiennent pas la valeur de n car il s'agit d'intervalles de confiances qui peuvent présenter des marges d'erreur.