Copie anonyme - n°anonymat : 450318

N8-00187
450318
Maths T

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** 29 | **Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques T / ESCP

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

Partie 1)

1) a) on a $P(X) = X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-3}{9} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & 0 \\ 0 & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3}$$

Ainsi $P(A) = 0_3$ donc le polynôme $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$ est bien annulateur de A.

1) b) les valeurs propres possibles de A sont donc les racines du polynôme

on a $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$

on pose $a = 1$ $b = \frac{-4}{3}$ $c = \frac{1}{3}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{16}{9} - \frac{4}{3}$$
$$= \frac{16}{9} - \frac{12}{9}$$
$$= \frac{4}{9} > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{9}}}{2}$$
$$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{}$$
$$= \frac{2}{2}$$
$$x_2 = 1$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } A \text{ sont donc } \frac{1}{3} \text{ et } 1}$$

1) c)

$$A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}} = 1\times\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

On en déduit que 1 est bien valeur propre de A avec A non nulle

$$A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{-1}{3}\end{pmatrix}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

On en déduit que $\frac{1}{3}$ est bien valeur propre de A avec A non nulle.

2) a)

$$PQ = \begin{pmatrix}3 & 3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{PQ = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}}$$

2) b) $PQ = 6I$

donc $PQ\frac{1}{6} = I$ donc P est inversible

Ainsi $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6} Q}$

2) c) $AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}}$$

$PD = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\boxed{PD = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}}$$

Ainsi $AP = PD$

donc $APP^{-1} = PDP^{-1}$

$A = PDP^{-1}$

donc A est diagonalisable avec D diagonale et P inversible.

2) d) on note $P(n)$ la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$ »

Initialisation : ($n = 0$)

d'une part $A^0 = I$

d'autre part $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$

Ainsi $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier quelconque
supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi, à savoir
$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

$A^{n+1} = A \times A^n$

$= PDP^{-1} \times PD^nP^{-1}$ d'après la 2c) et par hypothèse de récurrence

$= PDID^nP^{-1}$

$= PD^{n+1}P^{-1}$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$

2) e)

$A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$ car D diagonale

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 \times \frac{1}{3^n} \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^m = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+3\times\frac{1}{3^m} & 9-9\left(\frac{1}{3}\right)^m \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^m & 3+3\left(\frac{1}{3}\right)^m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\frac{1}{3^{m-1}} & 9-3^2\times\frac{1}{3^m} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^m & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^m = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^m & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \end{pmatrix}}$$

3)a) on doit montré que $X_{m+1} = \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u_m + v_m \\ \frac{1}{9}u_m + \frac{2}{3}v_m \end{pmatrix}$

on a $AX_m = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u_m + v_m \\ \frac{1}{9}u_m + \frac{2}{3}v_m \end{pmatrix} = X_{m+1}$

ainsi $\boxed{AX_m = X_{m+1}}$

3) b) Montrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $X_m = A^m X_0$
on note $P(m)$ la propriété « $X_m = A^m X_0$ »

<u>Initialisation</u> : $(m=0)$

on a d'une part X_0

d'autre part $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$

Ainsi $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u>: Soit n un entier quelconque
supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi, à savoir
$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{d'après la 3)a)}$$

$$= A A^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= A^{n+1} X_0$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire

<u>Conclusion</u>: D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir $\boxed{X_n = A^n X_0}$

3)c)

$$X_n = A^n X_0$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)u_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)v_0 \\ \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)v_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a $\boxed{u_n = \frac{1}{6}\left(\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)u_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)v_0\right)}$

et $\boxed{v_n = \frac{1}{6}\left(\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)v_0\right)}$

d) pour apprécier l'évolution au bout d'un temps très grand, on calcule la limite de (u_n) et de (v_n)

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)u_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)v_0\right)$$

or $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

et $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left((3+0)u_0 + (9-0)v_0\right) = \frac{1}{2}u_0 + \frac{3}{2}v_0$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left(\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)v_0\right)$$

donc comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{6}\left((1-0)u_0 + (3+0)v_0\right) = \frac{1}{6}u_0 + \frac{1}{2}v_0$$

Ainsi l'évolution tend vers une survie des deux populations car les limites des deux suites tendent vers un nombre fini.

4) a) une clé primaire qui peut être choisie pour la table ANIMAUX est 'espèce' car il est à la fois dans la base de données animaux et dans la base alimentation

b)

c)

Copie anonyme - n°anonymat : 450318

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T/ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

d)

Partie 2)

5) a) on a $w_{n+1} - w_n = r w_n$

donc $w_{n+1} = r w_n + w_n$

Ainsi $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{r w_n + w_n}{w_n}$

$= \dfrac{w_n(r+1)}{w_n}$

$= r+1$

Ainsi (w_n) est géométique de raison $q = r+1$

donc $w_n = w_0 \times q^n$

$$\boxed{w_n = w_0 \times (r+1)^n}$$

5) b)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) si $r = 0$

on a $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} w_0 \times 1^n = w_0}$

Cette limite signifie que la taille de la population n'évolue pas

si $r > 0$

on a $\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} w_0 \times (r+1)^n$

or $r+1 > 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} (r+1)^n = +\infty$

ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty}$

Cela signifie que la taille de la population augmente toujours plus vers l'infinie.

Le modèle proposé n'est plus réaliste car une population ne peut tendre vers l'infini

6) a) i) $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow ax\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right) = 0$

$\Leftrightarrow ax = 0$ ou $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\beta}x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta}x = 1$

$$\Leftrightarrow x = \beta$$

donc $\boxed{S = \{0 ; \beta\}}$

ii) $f(x) = ax\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right)$

$$= ax - \frac{ax^2}{\beta}$$

$$f'(x) = a - \frac{2ax}{\beta}$$

$$= \frac{\beta a - 2ax}{\beta}$$

$$= \frac{a(\beta - 2x)}{\beta}$$

x	0		$\frac{\beta}{2}$		$+\infty$
signe de a		$+$		$+$	
signe de $\beta - 2x$		$+$	0	$-$	
signe de β		$+$		$+$	
signe de f'		$+$	0	$-$	
variations de f	$f(\beta)$ 0	↗	$\frac{a\beta}{4}$	↘	$-\infty$

$\beta - 2x = 0$

$\Leftrightarrow \beta = 2x$

$\Leftrightarrow x = \frac{\beta}{2}$

car $a \in]0,1[$
et $\beta > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ax\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right)$: $\lim\limits_{x \to +\infty} ax = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{\beta}x = -\infty$

par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$f\left(\frac{\beta}{2}\right) = a\times\frac{\beta}{2}\left(1-\frac{1}{\beta}\times\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{a\beta}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{a\beta}{4}$$

$$f(0) = a\times 0\left(1-\frac{1}{\beta}\times 0\right) = 0$$

b) i) $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x + f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + ax\left(1-\frac{1}{\beta}x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + ax - \frac{ax^2}{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta x + a\beta x - ax^2}{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(\beta + a\beta - ax)}{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\beta}\times(\beta + a\beta - ax) = 0$$

$\frac{x}{\beta} = 0$ ou $\beta + a\beta - ax = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ $\qquad \Leftrightarrow \beta + a\beta = ax$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\beta + a\beta}{a}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{\beta + a\beta}{a}\right\}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 450318

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 29	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T /ESCP

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$g(x) = x$

$\Leftrightarrow x + f(x) = x$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

or d'après la 6)a)i)

$\boxed{\mathcal{G} = \{0 ; \beta\}}$

$g(x) = \beta$

$\Leftrightarrow \dfrac{\beta x + a\beta x - ax^2}{\beta} - \beta = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\beta x + a\beta x - ax^2 - \beta^2}{\beta} = 0$

ii)

on admet l'inégalité pour la suite

iii)

$$g'(x) = 1 + f'(x) = \frac{\beta + \beta a - 2ax}{\beta}$$

donc

x	0		$\frac{\beta + \beta a}{2a}$		$+\infty$
~~signe de~~					
signe de $\beta + \beta a - 2ax$		$+$	0	$-$	
signe de β		$+$		$+$	
signe de g'		$+$	0	$-$	
variations de g	0	$\nearrow$	$\frac{(\beta + \beta a)}{2} \times (1+a)$	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = 0 + f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + f(x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + a - \frac{a}{\beta} x\right)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + a - \frac{a}{\beta} x = -\infty$ | par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

c) on note $P(n)$ la propriété « $w_n \in [0; \beta]$ »

Initialisation : $(n = 1)$

$w_1 \geqslant 0$ d'après le tableau de variation de g qui

$w_1 \leqslant \beta$ d'après la 6) b) ii) et car $\beta < \frac{\beta + \beta a}{2a}$

ainsi $P(1)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$
supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi, à savoir
$w_{n+1} \in [0; \beta]$

$0 \leqslant w_n \leqslant \beta$ par hypothèse de récurrence

$0 \leqslant a w_n \leqslant a\beta$

ii) $f(w_n) = a w_n \left(1 - \frac{1}{\beta} w_n\right) = w_{n+1} - w_n$

$a w_n > 0$ et $1 - \frac{1}{\beta} w_n < 0$

car $a \in]0;1[$

et $w_0 > 0$

Ainsi $\boxed{(w_n) \text{ est décroissante}}$

iii) comme $w_n \in [0;\beta]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a w_n$ tend vers un point fini

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{\beta} w_n$ tend vers un point fini

par produit (w_n) tend vers un point fini donc elle converge vers une limite l

iv)

v)

Copie anonyme - n°anonymat : 450318

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 285 — **Nombre de pages :** 29 — **Session :** 2025
	Épreuve de : Mathématiques T/ESCP
	Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d) i)

$$g\left(\frac{(a+1)\beta}{2a}\right) = \frac{(a+1)\beta}{2a} + \frac{a(a+1)\beta}{2a}\left(1 - \frac{1}{\beta} \times \frac{(a+1)\beta}{2a}\right)$$

$$= \frac{(a+1)\beta}{2a} + \frac{(a+1)\beta}{2}\left(1 - \frac{(a+1)}{2a}\right)$$

$$= \frac{(a+1)\beta}{2a} + \frac{(a+1)\beta}{2} \times \frac{(a-1)}{2a}$$

ii)

iii)

e) i)

ii)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

f)

Exercice 2

1) a)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def deplacement_pion(n, k):
        position = np.zeros(k+1)
        for j in range(0, k):
                bille = rd.randint(1, n+1)
                if position[j] < bille:
                        position[j+1] = k+1
                else:
                        position[j+1] = k-1
        return(k)
```

b) def deplacement_pion(20, 10):

return(10)

c)

2)

k	1
$P(X_1 = k)$	1

car au moment 0, il n'y a pas de billes 0 donc la bille ne peut pas être inférieur ou égale à la position donc il avance obligatoirement de 1 au 1er tour.

$E(X_1) = 1 \times P(X_1 = 1)$

$= 1 \times 1$

$\boxed{E(X_1) = 1}$

2)

k	0	2
$P(X_2 = k)$	$\frac{1}{m}$	$\frac{m-1}{m}$

car pour reculer il faut que la bille soit égale à 1, il y a donc 1 chance sur m que le pion recule

et donc $1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$ pour trouver la 2e probabilité

$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 2 \times P(X_2 = 2)$

$= 0 + 2 \times \frac{(m-1)}{m}$

$\boxed{E(X_2) = \frac{2(m-1)}{m}}$

4) l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire x_k est inclus dans $[\![0;m]\!]$ car le pion ne peut aller dans le négatif car à l'emplacement 0, le numéro de la bille va forcément faire avancer le pion.

5) $P(X_{k+1}=0) = P(X_k=1) \times P(X_{k+1}=0)$ par indépendance

$= P(X_k=1) \times \frac{1}{m}$

$$\boxed{P(X_{k+1}=0) = \frac{1}{m} P(X_k=1)}$$

car pour reculer sur 0 au moment $k+1$, le pion devait être sur 1 au moment k et la probabilité d'avoir un numéro de dé inférieur ou égale à l'emplacement est de $\frac{1}{m}$

$P(X_{k+1}=m) = P(X_k=m-1) \times P(X_{k+1}=m)$

$= P(X_k=m-1) \times \frac{1}{m}$

$$\boxed{P(X_{k+1}=m) = \frac{1}{m} P(X_k=m-1)}$$

6) a) lorsque le pion est en $l-1$:

b)

c) on admettra cette question pour la suite

Copie anonyme - n°anonymat : 450318

Emplacement QR Code	Code épreuve : 285	Nombre de pages : 29	Session : 2025
	Épreuve de : Mathématiques T/ESCP		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

7) $E(X_{k+1}) =$

8 a)

b) $x = 1 + \left(1 - \frac{2}{m}\right) x$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 + x - \frac{2x}{m}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{m} = 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x = m$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{m}{2}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{m}{2} \right\}}$$

c) $x_{k+1} = E(X_{k+1}) - x$

$$\boxed{x_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{m}\right) x_k - x}$$

d)

g)

Exercice 3

Partie 1)

1)

• si $t \in [0;1]$, $f_0(t) = (a+1)t^a \geqslant 0$ car $a \geqslant 1$

sinon $f_0(t) = 0 \geqslant 0$

Ainsi f_0 est positive sur $\mathbb{R}$

• si $t \in [0;1]$, $f_0(t) = (a+1)t^a$ continue car fonction usuelle

sinon $f_0(t) = 0$ continue

Ainsi f est continue sauf éventuellement en 0 et en 0

• sous réserve de convergence, on a par relation de Chasles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_0(t)\,dt + \int_{0}^{1} f_0(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f_0(t)\,dt$$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt$ converge et vaut 0

$\rightarrow \int_{0}^{1} f_0(t)\,dt = \int_{0}^{1} (a+1)t^a\,dt = (a+1)\int_{0}^{1} t^a\,dt$ par linéarité

$$= (a+1)\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^1$$

$$= (a+1)\left(\frac{1}{a+1} - 0\right)$$

$$= \frac{a+1}{a+1}$$

$= 1$ donc converge

$\rightarrow \int_{1}^{+\infty} f_0(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$ converge et vaut 0

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) = 0 + 1 + 0 = 1$ donc l'intégralle converge et vaut 1

donc la fonction f_0 peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_0.

2) a)

b)

3)

si $x \leq 0$, $F_{X_a}(x) = P(X_a \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

si $x \in]0;1]$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ par relation de Chasles

$= 0 + \int_{0}^{x} (a+1)\,t^a\,dt$

$= (a+1)\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_0^x$

$= (a+1)\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)$

$= x^{a+1}$

si $x > 1$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt$

par relation de Chasles

$= 0 + \int_{0}^{1} (a+1)\,t^a\,dt + 0$

$= \left[t^{a+1}\right]_0^1$

$= 1$

$$\boxed{F_{X_a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{a+1} & \text{si } x \in]0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 450318

Code épreuve : 285	**Nombre de pages :** 29	**Session :** 2025

Épreuve de : Mathématiques T / ESCP

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

4) on détermine premièrement si il y a une Espérance.
Pour cela $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ doit converger

Par relation de Chasles on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt + \int_{0}^{1} t f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt$$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t \times 0\,dt$ converge et vaut 0

$\rightarrow \int_{0}^{1} t f(t)\,dt = \int_{0}^{1} t(a+1)t^a\,dt = (a+1)\left[\frac{t^{a+2}}{a+2}\right]_0^1$

$= \frac{(a+1)}{a+2}$ donc converge

$\rightarrow \int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} t \times 0\,dt$ converge et vaut 0

ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge donc X_a admet une espérance.

$$E(X_a) = \frac{a+1}{a+2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

désormais vérifions s'il y a une espérance au carré

on doit vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge

par relation de Chasles on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 f(t) dt + \int_{0}^{1} t^2 f(t) dt + \int_{1}^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

-> $\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 \times 0 \, dt$ converge et vaut 0

-> $\int_{0}^{1} t^2 f(t) dt = \int_{0}^{1} t^2 (a+1) t^a dt$

$$= (a+1) \left[\frac{t^{a+3}}{a+3} \right]_0^1$$

$= \frac{(a+1)}{a+3}$ donc converge

-> $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_{1}^{+\infty} t^2 \times 0 \, dt$ converge et vaut 0

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge donc X_a^2 admet une espérance de

valeur $E(X_a^2) = \frac{a+1}{a+3}$

D'après la formule de Koenig-Huygens on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

donc $V(X_a) = E(X_a^2) - E(X_a)^2$

$$= \frac{a+1}{a+3} - \left(\frac{a+1}{a+2}\right)^2$$

$$\boxed{V(X_a) = \frac{a+1}{a+3} - \frac{(a+1)^2}{(a+2)^2}}$$

Donc il existe la variance de X_a

Partie 2)

5) . f est positive sur $\mathbb{R}$

. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$ sous réserve de convergence et par relation de Chasles

-> $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt$ converge et vaut 0

-> $\int_{0}^{1} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = e-1$ donc converge

-> $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$ converge et vaut 0

pour être une densité de probabilité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ doit converger et valoir 1

donc $\boxed{c_0 = \frac{1}{e-1}}$ pour que f_0 soit une densité de probabilité car $C_0(e-1)=1$

$\iff C_0 = \frac{1}{e-1}$

6) déterminons si X_0 admet une espérance, donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_0(t)\,dt$ converge

sous réserve de convergence, on a par relation de Chasles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t f_0(t)\,dt + \int_{0}^{1} t f_0(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} t f_0(t)\,dt$$

$\to \int_{-\infty}^{0} t f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t \times 0\,dt$ converge et vaut 0

$\to \int_{0}^{1} t f_0(t)\,dt = \int_{0}^{1} t e^t\,dt$

on pose

$u = t \qquad v = e^t$

$u' = 1 \qquad v' = e^t$

u, u', v, v' sont continues sur $[0;1]$

donc par intégration par partie

$$\int_0^1 t e^t\,dt = \left[t e^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt$$

$$= e - \left[e^t\right]_0^1$$

$$= e - (e-1)$$

$= 1$ donc converge

$\to \int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} t \times 0\,dt$ converge et vaut

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge donc X_0 admet une espérance de valeur

$$\boxed{E(X_0) = 1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 450318

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 29 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T / ESCP

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) $\int_0^1 f_{n+1}(t) = \int_0^1 f_n(t) + f_n(1)$

8) on note $P(n)$ la propriété « $f_n(t) = P_n(t)e^t$ »

Initialisation : $(n=0)$

d'une part $f_0(t) = e^t$

d'autre part $P_0(t)e^t = 1 \times e^t$

ainsi $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit n un entier quelconque
supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi, à savoir
$f_{n+1}(t) = P_{n+1}(t)e^t$

on a $f_{n+1}(t) = f_n(t) + f_n(1)$ d'après 7)

$= P_n(t)e^t + f_n(1)$ par hypothèse de récurrence

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751