MOHAMED

Note de délibération : 18.21 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MOHAMED

18.21 / 20

Signature

écricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 09

Numéro de table 39

Exercice 1.

1- a) Soit $J = M - 2I$

donc $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.21 / 20

on a $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J$

donc on on conclut que $J^2 = 3J$

c) calculons d'abord M^2

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9+2 & 3+3+1 & 3+1+3 \\ 3+3+1 & 1+9+1 & 1+3+1 \\ 3+1+3 & 1+3+3 & 1+1+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 7J + 4I$$

d) Montrons que $M^2 = 7M - 10I$

$$7M - 10I = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} = M^2$$ (déjà calculé dans 1-c)

2) a) les racines du polynomes annulateur de M sont les valeurs propre possibles de M.

b) $R(2) = 4 - 14 + 10$
$= 0$

donc on conclut que 0 est efficacement une racine de R

on a $R(X) = X^2 - 7X + 10 \Leftrightarrow R(X) = 0$

$\Leftrightarrow X^2 - 7X + 10 = 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$

donc $x_1 = \dfrac{7-3}{2} = 2$

et $x_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$

donc 5 est une autre racine de P

2) puisque 2 et 5 sont les racines du polynome annulateur de M
alors 2 et 5 sont les valeurs propres possible de M.

3) $M \cdot U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5U$ avec $U \neq 0$

donc on conclut que 5 est effectivement une valeur propre de M.

4) $M \cdot V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2V$ avec $V \neq 0$

$M \cdot W = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2W$ avec $W \neq 0$

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted]

Signature

Nom [redacted]

Prénom (s) MOHAMED

18.21 / 20

Ecricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 09

Numéro de table 39

puisque $M.V = 2V$ et $Mw = 2w$

donc on conclut que ~~w~~ e V sont des vecteurs propre de M associés à la valeur propre 2

5 - a) $Q.P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

b) on a $QP = 3I$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} Q\right) \cdot P = I$

donc on conclut que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.21 / 20

c) Vérifions que $PD = MP$

$$P.D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M.P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

donc on conclut que $MP = PD$

D/ Soit $n \in \mathbb{N}$, mq $M^n = \frac{1}{3} . D^n . Q$

on a $M = P . D . P^{-1}$ (d'après 5 - 1)

or il est évident que $M^n = P . D^n . P^{-1}$ (par récurrence)

donc $M^n = P . D^n . (\frac{1}{3} Q)$

d'où $M^n = \frac{1}{3} . P . D^n . Q$

Partie 2:

6-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, mq u_n est géométrique ..

on a $u_{n+1} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$

$= 35a_n + 5b_n - 10a_n$

$= 25a_n + 5b_n$

$= 5(5a_n + b_n)$

$= 5 \cdot u_n$

donc on conclut que (u_n) est S.G de raison 5

u_n en fonction de n:

$u_n = u_0 \cdot 5^n$

or $u_0 = 5 \times 0 + 1 = 1$

donc $u_n = 1 \times 5^n$

$= 5^n$

b) soit $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = -2a_{n+1} - b_{n+1}$

$= -14a_n - 2b_n + 10a_n$

$= -4a_n - 2b_n$

$= 2(-2a_n - b_n)$

$= 2v_n$

donc on conclut que v_n est une suite géométrique de raison 2

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$, mq $M^n = a_n M + b_n I$

Initialisation:

pour $n = 0$, $M^0 = I$ et $a_0 M + b_0 I = 0 \times M + 1 \times I$
$= I$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$

on suppose que $M^n = a_n M + b_n I$ et on montre
que $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

on a $M^{n+1} = M^n . M$
$= (a_n M + b_n I) . M$ (d'après HR)
$=$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) MOHAMED

18.21 / 20

Ecricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 39

Commencez à composer dès la première page

Partie 3 :

8-a) $P(X_2=1)=\frac{3}{5}$

~~car le chat se nour~~

Dans le jour 1, le chat se nourrit à la maison 1, dans le jour le chat se nourrit dans la même maison de la veille (maison 1) donc la probabilité est de $\frac{3}{5}$

$P(X_2=2)=P(X_2=3)=\frac{1}{5}$

- car dans le deuxième jour le chat s'est nourrit la veille dans la maison 1, donc dans le jour 2, le chat se nourrira à la maison 2 avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ car c'est une maison différente de la veille.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.21 / 20

. même chose pour la probabilité de manger à la 3ème maison dans le jour 2

b) $E(X_2) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

c) $E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{3}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5}$

$= \frac{3+4+9}{5} = \frac{16}{5}$

$V(X_2) = \frac{16}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2$

$= \frac{16}{5} - \frac{64}{25}$

$\cancel{= -4} = \frac{80-64}{25} = \frac{16}{25}$

$\sigma(X_2) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

9 - a)

$X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$P(X_3 \backslash$ ~~$X_1, X_2, \dots$~~

$((X_2=1),(X_2=2),(X_2=3))$ forme un système complet d'événements

D'après la formule des probas totales

$$P(X_3=1) = P_{(X_2=1)}(X_3=1) \cdot P(X_2=1) + P_{(X_2=2)}(X_3=1) \cdot P(X_2=2)$$

$$+ P_{(X_2=3)}(X_3=1)\, P(X_2=3)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{9+1+1}{25} = \frac{11}{25} = \frac{11}{25}$$

$$P(X_3=2) = P_{(X_2=1)}(X_3=2) \cdot P(X_2=1) + P_{(X_2=2)}(X_3=2) \cdot P(X_2=2)$$

$$+ P_{(X_2=3)}(X_3=2) \cdot P(X_2=3)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3+3+1}{25} = \frac{7}{25}$$

$$P(X_3=3) = P_{(X_2=1)}(X_3=3) \cdot P(X_2=1) + P_{(X_2=2)}(X_3=3) \cdot P(X_2=2)$$

$$+ P_{(X_2=3)}(X_3=3) \cdot P(X_2=3)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{3+1+3}{25} = \frac{7}{25}$$

b) $P(X_2 = 2 / X_3 = 3) = \dfrac{P(X_3 = 3 / X_2 = 2) \cdot P(X_2 = 2)}{P(X_3 = 3)}$ (Formule de Bayes)

$$= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{7}{25}} = \frac{1}{7}$$

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, mq $C_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot M C_n$

$$\frac{1}{5} \cdot M \cdot C_n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \cdot P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) \\ P(X_n = 1) + 3 P(X_n = 2) + P(X_n = 1) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + 3 P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 1 + 1 \\ 1 + 3 + 1 \\ 1 + 1 + 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix}$$

car $P(X_{n+1} = 1) = 1 = P(X_{n+1} = 2) = P(X_{n+1} = 3) = 1$

car les probabilités forme des système complet d'événement

donc on conclut que $\cancel{C_{n+1} = \frac{1}{5} M \cdot C_n}$

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription [redacted]

Né(e) le [redacted]

Nom [redacted]

Prénom (s) MOHAMED

Signature

18.21 / 20

écricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 09

Numéro de table 39

Commencez à composer dès la première page

10 - b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, mq $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} \cdot C_1$

Initialisation:

Pour $n = 1$, $C_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = 1) \\ P(X_1 = 2) \\ P(X_1 = 3) \end{pmatrix}$

et $\frac{1}{5^0} \cdot M^0 \cdot C_1 = C_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = 1) \\ P(X_1 = 2) \\ P(X_1 = 3) \end{pmatrix}$

donc la proposition est vraie pour $n = 1$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$,

on suppose que $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot M^{n-1} \cdot C_1$

et on montre que $C_{n+1} = \frac{1}{5^n} \cdot M^n \cdot C_1$

on a $C_{n+1} = \frac{1}{5} M \cdot C_n$ (cf 10-a)

$C_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot M \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot M^{n-1} \cdot C_1$ (d'après HR)

$= \frac{1}{5^{n-1+1}} \cdot M^{n-1+1} \cdot C_1 = \frac{1}{5^n} \cdot M^n \cdot C_1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.21 / 20

<u>conclusion</u>

D'après le principe de la récurrence
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot M^{n-1} \cdot C_1$

c) on a $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot M^{n-1} \cdot C_1$

$$\Leftrightarrow C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $P(X_n=1) = \frac{1}{5^{n-1}} (5^{n-1}+2^n) \cdot \frac{1}{3}$

et $\cancel{P(X_n=2) = P(X_n=3) = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(5^{n-1}+2^{n}\right)}$

et $P(X_n=2) = P(X_n=3) = \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{3}\left(5^{n-1}-2^{n-1}\right)$

11-a) $E(X_n) = 1 \times \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(5^{n-1}+2^{n}\right)$

$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \left(5^{n-1}-2^{n-1}\right) + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{5^{n-1}}\left(5^{n-1}-2^{n-1}\right)$

$$\boxed{= \frac{1}{3 \cdot 5^{n-1}} \cdot \left(5^{n-1}+2^{n}\right) + \frac{5}{3}\left(5^{n-1}-2^{n-1}\right) \cdot \frac{1}{5^{n-1}}}$$

b) $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^{n-1}}\left(5^{n-1}+2^{n}\right)$

Partie 4:

14) la requete va selectionner le nom .. et le numero de puce des chats de couleur grise et de sexe féminin

15) FROM chats, propriétaires.

Exercice 2:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (e^x + e^{-x})'$.

$= e^x - e^{-x} = g(x)$

. $g'(x) = (e^x - e^{-x})' = (e^x)' - (e^{-x})'$

$= e^x - (-e^{-x})$

$= e^x + e^{-x} = f(x)$

2-a) ~~$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x + e^{-x}$~~

~~$= +\infty$~~

~~(car $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$~~

~~et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$)~~

~~$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x$.~~

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) M C H A M E D

18.21 / 20

Ecricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 5 / 0 9

Numéro de table 3 9

Commencez à composer dès la première page

2-a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - e^{-x}$

$= -\infty$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \text{et } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - e^{-x}$

$= +\infty$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right.$

b) on a $g'(x) = e^x + e^{-x}$

$= e^x + \dfrac{1}{e^x}$

$= \dfrac{e^{2x}+1}{e^x} \geq 0$

~~le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $e^{2x}+1$~~

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.21 / 20

$g'(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = -1$ impossible

donc

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
g'	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$

3 - a) $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x} - \dfrac{1}{e^{x}} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{x}} = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 1$

$\Leftrightarrow 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

sur $]-\infty, 0[$

$\Leftrightarrow x \leq 0$

$\Leftrightarrow 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} < 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{x}} < 0$

$\Leftrightarrow g(x) < 0$

sur $]0, +\infty[$

$g(x) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

c) on a $f'(x) = g(x)$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = e^0 + e^0$
$= 2$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{x} + e^{-x}$$

$$= +\infty$$

c) $f''(x) = (e^{x} - e^{-x})'$

$= e^{x} - (-e^{-x})$

$= e^{x} + e^{-x}$

$= g'(x) \geq 0$

~~donc f est~~

puisque $f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$

4) $g''(x) = (e^{x} + e^{-x})'$

$= e^{x} - e^{-x}$

$= g(x)$

on sait $g(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$

et $g(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$

donc g est convexe sur $[0, +\infty[$

et g est concave sur $]-\infty, 0[$.

5-a) $(T) : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$

$(T) : y = 2x + 0 = 2x$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MOHAMED

18.21 / 20

Ecricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 39

Signature

b) $\cancel{g(x) - y = e^x - e^{-x} - 2x}$

$\cancel{= e^x - \frac{1}{e^x} - 2x}$

$\cancel{= \frac{e^{2x} - 1 - 2xe^{2x}}{e^x}}$

$\cancel{= e^x(e^x - 1}$

g(x) se trouve en dessus de (T) sur $]-\infty, 0[$

et g(x) se trouve au dessous de (T) sur $[0, +\infty[$

c) Soit

6-a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) - g(x) = e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}$

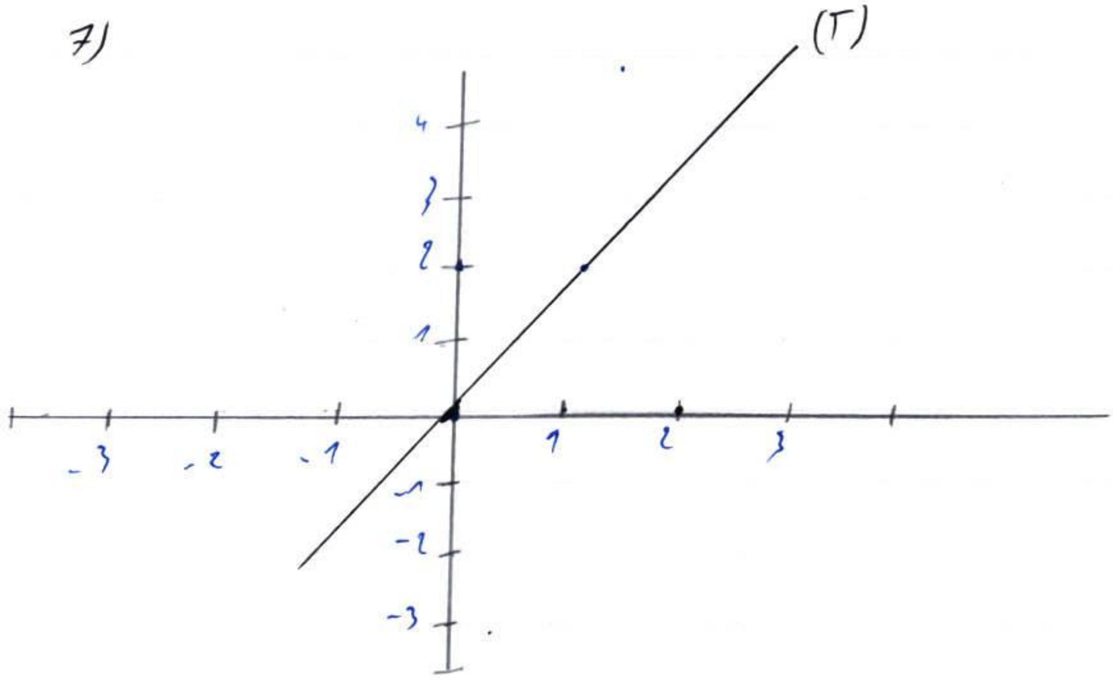
$= 2 \cdot e^{-x} > 0$

b) donc on déduit que C_f se trouve au dessous de C_g

car $f(x) > g(x)$

18.21 / 20

7)



(T) : $y = 2x$

x	0	1
$f(x)$	0	2

9) Soit $x \in \mathbb{R}$, ~~$h(x)$~~ :

a) $h'(x) = (f(x) - 2 - x^2)'$
$= (e^x + e^{-x} - 2 - x^2)'$
$= e^x - e^{-x} - 2x$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, m.q $f(x) \geq 2 + x^2$
$f(x) - 2 - x^2 = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$k'(x) = \left(g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3\right)'$$
$$= \left(e^{x} - e^{-x} - 2x - \frac{1}{3}x^3\right)'$$

$$= e^{x} + e^{-x} - 2 - x^2$$

Partie 2 :

11) ~~on a $g(u_1) = .P$~~

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, mq $u_n > 0$

Initialisation.

~~on suppose~~ pour $n = 1$, $u_1 > 0$ (cf A1)

donc la proposition est vraie pour $n = 1$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,

on suppose que $u_n > 0$ et mq $u_{n+1} > 0$

on a   on a $u_n > 0$

$$g(u_n) \geqslant g(0)$$
$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

Conclusion

D'après le principe de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

13 - b) puisque (u_n) est minorée par 0 et elle est décroissante, alors on conclut que (u_n) est convergente.

Exercice 3:

1 - a) comme $T \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

$$f_T(x) = \begin{cases} 1 e^{-1 \times x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) $P(T \leq 3) = F_T(3) = 1 - e^{-3}$

d) $$P_{(T=1)}(T \geq 1) = \frac{P((T \geq 1) \cap T = 1)}{P(T = 1)}$$

$$= \cancel{P(T \geq 1)} = \frac{P(T \geq 1)}{P(T = 1)}$$

$$= \frac{1 - F_T(1)}{1 - e^{-1}}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

$$= \frac{1}{e - e^0} = \frac{1}{e - 1}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) MOHAMED

Signature

18.21 / 20

Ecricome Épreuve : Math T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 39

Commencez à composer dès la première page

2) a) $f_U = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$F_U = \begin{cases} \frac{x-0}{1-0} = x & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$P(X \leq x) = P(-\ln(U) \leq x)$

$= P(\ln(U) \geq -x)$

$= P(e^{\ln U} \geq e^{-x})$

$= P(U \geq e^{-x})$

<u>Partie 2:</u>

3-a) Soit $A > 0$

$I_1(A) = \int_0^A e^{-x}\,dx$

$= [-e^{-x}]_0^A$

$= -e^{-A} + e^0$

$= 1 - e^{-A} = 1 - \frac{1}{e^A}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.21 / 20

b) $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x}$

$= \lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-A}$

$= 1$ $\left(\text{car } \lim_{A \to +\infty} e^{-A} = 0 \right)$

4) soit $A > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$

$I_n(A) = \int_0^A x^{n-1} e^{-x}$

on pose $U(x) = x^{n-1}$ $U'(x) = (n-1)(x^{n-2})$

$V'(x) = e^{-x}$ $V(x) = -e^{-x}$

$= \left[-x^{n-1} e^{-x} \right]_0^A + (n-1) \int_0^A e^{-x} \cdot x^{n-2}$

$I_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x} \, dx$

on pose $U(x) = x^n$ $U'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$V'(x) = e^{-x}$ $V(x) = -e^{-x}$

$= \left[-e^{-x} \cdot x^n \right]_0^A + n \int_0^A x^{n-1} e^{-x}$

$= -e^{-A} \cdot A^n + n \cdot I_n$

$= \dfrac{-A^n}{e^A} + n I_n$

~~5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$~~

~~lim.~~

~~6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ mq $I_{n+1} = n I_n$~~

~~$n I_n = n$.~~

Partie 3:

8) Positivité :

. sur $]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0 \geqslant 0$

. sur $[0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \geqslant 0$

donc $f_n(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

continuité par morceaux :

. sur $]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0$ est continue en tant que fonction nulle

. sur $[0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \cdot e^{-x}$

est continue en tant que composée de fonction continue

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \, dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times \lim_{A \to +\infty} I_n(A) = \frac{1}{(n-1)!} \times (n-1)!$$

$$= \cancel{\frac{1}{(n-1)!} \times \lim_{A \to +\infty}} \qquad = 1$$

donc on on conclut que $f_n(x)$ est effectivement une densité de probabilité.

9)- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{(n-1)!} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-x}\, dx$$

~~on pose $u(x) = x^n$~~

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{A \to +\infty} I_{n+1}(A)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times \lim_{A \to +\infty} \frac{-A^n}{e^A} n \cdot I_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \times n \times (n-1)!$$

$$= n$$

$$\begin{cases} \text{car } \lim_{A \to +\infty} -A^n e^{-A} = 1 \\ \text{et } \lim_{A \to +\infty} I_n = (n-1)! \end{cases}$$

b) $$E(F_n) = E\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} E(Y_k)$$

$$= \frac{1}{\cancel{N}} \times n \times \cancel{N}$$ (car suivent la même loi et independants)

$$= n$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s) M O H A M E D

18.21 / 20

Ecricome Épreuve : Math T.

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 8 / 0 9

Numéro de table 3 9

Commencez à composer dès la première page.

$$V(Y_n) = V\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k\right)$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{k=1}^{N} V(Y_k)$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot m \cdot N$$

$$= \frac{1}{N} \times m = \frac{m}{N}$$

9-c) Soit $\varepsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$= 1 - P(Y - m \geq \varepsilon) \leq \frac{m}{\varepsilon^2}$$