Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Maths appliqués ESSEC - HEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1) a) M est μ - réversible, soit :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$

Or, $(\mu_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \neq 0$ par définition de μ et $m_{i,j} \neq 0$

Alors, $\mu_i m_{i,j} \neq 0$

$\Leftrightarrow \mu_j m_{j,i} \neq 0$

$\Leftrightarrow m_{j,i} \neq 0.$

b) M est symétrique, soit $m_{i,j} = m_{j,i}$.

M est donc μ - réversible si et seulement si, $\forall (i;j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$\mu_i = \mu_j$

Dès lors, car $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, $(\mu_i)_{i\in[\![1,n]\!]} = \frac{1}{n}$.

$\mu = \underbrace{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ coefficients.}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Selon le produit matriciel, car Δ est diagonale, on a :

$$(\Delta M_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} = \mu_i m_{i,j}$$

Alors, M est μ-réversible si $(\Delta M_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} = \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$

Or, car Δ est diagonale, ${}^t\Delta = \Delta$ donc $\mu_{i,j} = \mu_{j,i}$

$$\mu_i = \mu_j$$

De plus, $\mu_j m_{j,i} = m_{j,i}\mu_j$ et car ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$:

Alors, $(\Delta M_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} = ({}^tM\,{}^t\Delta_{i,j}) = ({}^tM\Delta_{i,j})$

Soit M μ-réversible si et seulement si $\Delta M = {}^t(\Delta M) = {}^tM\Delta$.

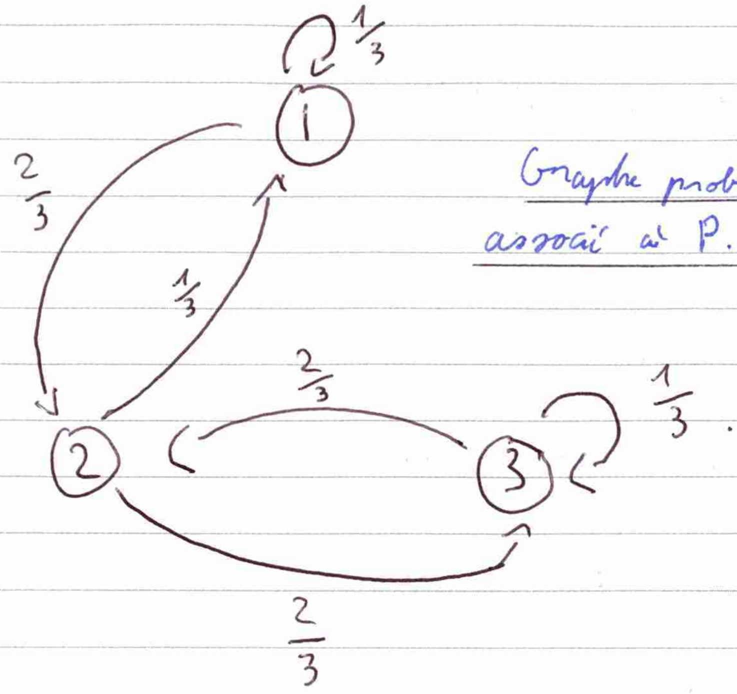
2) Par produit matriciel, on a :

$$(\mu M)_{i\in[\![1,n]\!]} = \sum_{j=1}^{n} \mu_i m_{i,j} = \mu_i \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}$$ car $M \in ST_n$. et $\mu_i \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} = \mu_j \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$

$$= \mu_i$$

Soit, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mu M_i = \mu_i$, i.e. $\mu M = \mu$.

3) a)



Graphe probabiliste associé à P.

b) Soit $\mu = (\lambda, \beta, \alpha)$

On a $\underbrace{\mu P = \mu}_{\text{selon Q.2}} \iff \begin{cases} \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\beta = \lambda \\ \frac{2}{3}\lambda + \frac{2}{3}\alpha = \beta \\ \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\alpha = \alpha \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda + \beta = 3\lambda \\ 2\lambda + 2\alpha = 3\beta \\ 2\beta + 1\alpha = 3\alpha \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \beta = 2\lambda \\ 2\lambda + 2\alpha = 6\lambda \\ 4\lambda + 1\alpha = 3\alpha \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \beta = 2\lambda \\ \alpha = 3\lambda \\ \alpha = 3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{6} \\ \beta = \frac{2}{6} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i = 1\right)$.

On a donc $\mu = \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{6}\right)$.

4) a) ~~def~~ Trajectoire (L, n):

```
Compt = 0.
m = len(L[0])
i, j := rd.randint(0, m-1), rd.randint(0, m-1).
pos = i
V = [pos].
for k in range(n-1):
    X = L[pos]
    for l in rg(m-1):
        X = X.remove(0)
```

b) On a $(p_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2} = \dfrac{\text{Card (arrêtes de A de } i \text{ vers } j)}{\text{Card (toutes les arrêtes partant de } i)}$

$$= \frac{a_{i,j}}{d_i}.$$

Alors, on a bien $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$ car $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = d_i$

c)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 281

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Maths appliquées ESSEC - HEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) $\Theta_M(i_0 \dots i_n)\Theta_M(j_0 \dots j_n) = m_{i_0, i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1}, i_n} \times \underbrace{m_{j_0, j_1}}_{= m_{i_n, j_1}}$

$= \Theta_M(i_0 \dots j_n)$.

6) On a alors M vérifie K si et seulement si :

$\Theta_M(1, 3, 2, 1) = \Theta_M(1, 2, 3, 1)$

$\Leftrightarrow m_{1,3}\, m_{3,2}\, m_{2,1} = m_{1,2}\, m_{2,3}\, m_{3,1}$.

Or, $\Theta_P(1, 3, 2, 1) = \Theta_P(1, 2, 3, 1) = 0$.

P vérifie K.

7) a) M est μ-réversible alors $\Delta M = {}^tM \Delta$.

Alors $\theta_{\Delta}(i_0 \dots i_{n-1})\theta_M(i_0 \dots i_n) = \theta_{\Delta}(i_n \dots i_1)\theta_{{}^tM}(i_0 \dots i_n)$.

Or, $\theta_{{}^tM}(i_n \dots i_0) = \theta_M(i_0 \dots i_n)$ et $\theta_{\Delta}(i_0 \dots i_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}$.

Alors, on a bien :

$$\underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right)\theta_M(i_0 \dots i_n)}_{E(1)} = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_k}\right)\theta_M(i_n \dots i_0)}_{E(2)}.$$

b) On a alors $E(1)\mu_{i_n} = E(2)\mu_{i_0}$

$\cancel{}$ $\theta_M(i_0 \dots i_n) = \theta_M(i_n \dots i_0)$

$m_{0,n} = m_{n,0}$)

$\cancel{}$ $\theta_M(i_0 \dots i_n, i_0) = \theta_M(i_0\, i_n \dots i_0)$

$\Leftrightarrow$ M vérifie $(\star)$.

/

8) Initialisation : Soit P_s la proposition "$m_{i,j}^{s} > 0$ si et seulement si il existe $(i_0 \dots i_s) \in [\![1,n]\!]^{s+1}$ tels que $i_0 = i$, $j = i_s$ et $\Theta_M(i_0 \dots i_s)$ strictement supérieur à 0."

P_1 vérifiée ($\Theta_M(i,j) = m_{i,j}$).

Hérédité : Soit P_n vrai, montrons P_{n+1}.

On a alors $m_{i,j}^{n} > 0$.

$m_{i,j}^{n+1} = M^{n+1}_{i,j} = (M^n M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^{n} m_{k,j}$

Or, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^{n} m_{k,j} > 0$ si et seulement si P_n est vérifié.

Alors, la propriété P_s est héréditaire et vraie en $s = 1$.

Ainsi, par récurrence, $m_{i,j}^{(s)} > 0$ si et seulement si $\forall (i_0 \dots i_s) \in [\![1,n]\!]^{s+1} / i_0 = i, i_s = j$, $\Theta_M(i_0 \dots i_s) > 0$.

9) a)

Question 4) (Toutes mes excuses).

4) a) def Trajectoire (L, n):

```
m = len(L[1]).

pos = rd.randint(0, m-1).
Temp = [].
V = [pos].

for k in range(n):
    Temp = L[pos].
    for kk in len(Temp):
        Temp.remove(0).
    pos = rd.randint(len(Temp))
    V.append(pos)

return (V).
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288 | Nombre de pages : 20 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appliqués ESSEC - HEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

10) a) $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2} \dots \sqrt{\mu_n})$.

b) On a alors $D^{-1}QD = D^{-1}\,{}^tPD$) ${}^tD = D$

$= {}^t(DPD^{-1})$ ★

Or, selon 1)c), M est μ-réversible si et seulement si $\Delta M = {}^tM\Delta$.

On a alors : ~~...~~

${}^tP\Delta = \Delta P$

${}^tPD^2 = D^2P$) En multipliant des deux côtés par D^{-1}.

$D^{-1}\,{}^tPD = DPD^{-1}$

$D^{-1}QD = DPD^{-1}$

Or, $DPD^{-1} = D^tQD^{-1}$ (établi à ★)

Alors, ~~...~~ $\underline{D^{-1}QD = D^tQD^{-1}}$ $\underline{= {}^t(D^{-1}QD)}$, $\underline{D^{-1}QD \text{ symétrique donc diagonalisable}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Alors, $D^{-1}QD$ est semblable à une matrice diagonalisable.

Or, D et D^{-1} sont des matrices diagonales.

Alors, Q est semblable à $D^{-1}QD$, donc Q est diagonalisable.

11) ~~[illegible]~~

$\mu P = \mu \iff {}^t(\mu P) = {}^t\mu$

$\iff {}^tP\,{}^t\mu = {}^t\mu$

$\iff Q\,{}^t\mu = {}^t\mu.$

Alors, $1 \in Sp(Q)$ $({}^t\mu \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

12) a) $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\,|y_j|\right)$

$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$

$= \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

b) Or, on a $(QY)_i = (\lambda Y)_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,y_j$

d'où $(Q|Y|)_i = (|\lambda||Y|)_i = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j|$

~~[illegible]~~

Or, $\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\,|y_j|\right| = \sum_{j=1}^{n}|y_j|$

On $\sum_{i=1}^{n} (|\lambda| |Y|_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j} q_{ij} |y_j| = \sum_{j}^{n} |y_j|$

d'où $|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq \sum_{j}^{n} |y_j|$ (Par linéarité de la somme).

c) Car λ est une valeur propre quelconque de Q, alors $|\lambda| \leq 1$.

Soit ~~sp~~ $\lambda \in [-1, 1]$

Soit $sp(Q) \subset [-1, 1]$.

B) On a alors $QY = Y$

$$(QY_k)_{k \in [\![1, n]\!]} = (Y_k)_{k \in [\![1, n]\!]}$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} q_{k,j}\, y_j$$

Or, car $y_k < 0$:

$$y_k < \sum_{j=1}^{n} q_{k,j} |y_j| \quad (|y_k| > y_k). \quad (q_{i,j} > 0).$$

Alors, par ~~linéarité de la somme~~ : croissance de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k < \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{kj} |y_j|$$

Soit par croissance de la valeur absolue :

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| < \sum_{k=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} q_{kj} |y_j|\right|$$

Soit $\sum_{k=1}^{n} |y_k| < \sum_{k=1}^{n} |y_k|$, ce qui est absurde.

b) Alors, si il existe deux y_k, y_l tel que $y_k > 0$ et $y_l < 0$, la somme $\sum_{k=1}^{n} |y_k|$ vaudrait deux valeurs différentes.

De plus, si $\sum_{k=0}^{n} y_k = 0$, alors $Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, sinon le résultat est absurde.

c) On a $QY = Y$

De plus, $Q\,{}^t\mu = {}^t\mu$

Alors, on a $Y = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_j\, {}^t\mu_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad {}^t\mu$ car $\sum_{j=1}^{n} {}^t\mu_j = 1$.

Alors, $Y = \gamma\,{}^t\mu$, $\gamma \in \mathbb{R}$

Alors, $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

d) $QY = -Y \Leftrightarrow QY = \sum_{j=1}^{n} q_{i,j}\, y_j$

(14) a) On a $\mu P = \mu \Leftrightarrow {}^tP\,{}^t\mu = {}^t\mu$

$Q\,{}^t\mu = {}^t\mu$.

En référence à la question 13.c, on a $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : Maths appliqués ESSEC / HEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b)

15) a) On a $L_{n+1} = \left(P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) \; \dots \; P_{(X_n=n)}(X_{n+1}=R)\right)$

H_3.

$= \left(P([X_n=1]\cap[X_{n+1}=1]) \; \dots \; P([X_n=n]\cap[X_{n+1}=1])\right)$

$= \underline{L_n P}$.

Dès lors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$L_n = L_{n-1} P$

$= L_{n-2} P^2$

récurrence immédiate. $= \underline{L_0 P^n}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $L_n = L_0 P^n$

$\Rightarrow {}^tL_n = Q^n \, {}^tL_0$) $Q = ADA^{-1}$, $D = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $A = (\mu_1, \dots, Y_n)$ $({}^t\mu, Y_2 \dots Y_n)$

$= AD^nA^{-1} \, {}^tL_0$

) $L_0 = a_1 \dots a_n$

$= a_1 \, {}^t\mu + \sum_{k=2}^{n} a_k \lambda_k^n ({}^tY_k)$

$\Rightarrow L_n = a_1 \mu + \sum_{k=2}^{n} a_k \lambda_k^n ({}^tY_k)$.

c) Alors, car $\lambda \in]-1, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} a_1 \mu + \sum_{k=2}^{n} a_k \lambda_k^n ({}^tY_k) = a_1 \mu$

Soit $\lim_{n \to +\infty} L_n = a_1 \mu$

Soit $\lim_{n \to +\infty} L_n(j) = a_1 \mu_j$

Soit $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = j) = a_1 \mu_j$.

d)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 20

Session : 2025

Épreuve de : Maths appliqués ESSEC - HEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3 :

16)
```
def opLigne(M, k, alph):
    n = len(M[k])
    for i in range(n-1):
        if i == k:
            M[k-1][i] = 1 - alph + alph * M[k-1][i]
        else:
            M[k-1][i] = alph * M[k-1][i].
    return M.
```

17) a) Supposons que M' ne vérifie pas (K) :

b-) Soit $m_{i,j} > 0$

~~[illegible]~~ * Opération 1 :

$i \neq j \Rightarrow m'_{i,j} = \alpha m_{i,j} > 0$ car $\alpha > 0$.

$i = j \Rightarrow m'_{i,j} = 1 - \alpha + \alpha m_{i,j}$ car $1 - \alpha \geq 0$ et $\alpha m_{i,j} > 0$.

* Opération 2 :

$i \neq j \Rightarrow m'_{i,j} = \alpha m_{i,j} > 0$

$i = j \Rightarrow m'_{i,i} = m_{i,i} + m_{i,k} - \alpha m_{i,k} > 0$ car ~~[illegible]~~ $\alpha \in]0,1]$.

Alors, si $m_{i,j} > 0$, $m'_{i,j} > 0$.

c) Si M est ergodique, alors, $\forall v \in \mathbb{N}$:

$$\left(M_{i,j}^{(v)}\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]} > 0 \Rightarrow \left(M'^{(v)}_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]} > 0 \qquad (17.b))$$

Soit si M est ergodique, alors M' aussi.

18°) Si $m_{l,k}$ ~~m~~ $\leq m_{k,l}$:

$m'_{k,l} = m_{l,k}$ si $k \neq l$

$= 1 - \dfrac{m_{l,k}}{m_{k,l}}$

M' est comonotone car tous les coefficients de M sont supérieurs à 0

(M est comonotone).

2) a)

```
def NonNul(M, I, J):
    for i in I:
        for j in J:
            if M[i-1][j-1] != 0:
                return (i, j)
    return (0, 0).
```

b)

```
def estRev(M):
    n = np.shape(M)[0]
    I = [1] ; J = [k for k in range(2, n+1)]
    while len(I) < len(J).
        ell, k = NonNul(M, I, J)
        if (ell == 0) or M[k-1][ell-1] * M[ell-1][k-1] == 0 :
            return False
        else :
            if M[ell-1][k-1] <= M[k-1][ell-1] :
                OpLigne(M, k, M[ell-1][k-1] / M[k-1][ell-1])
            else :
                OpCol(M, k, M[k-1][ell-1] / M[ell-1][k-1])
            I.append(ell)
            J.remove(k)
    return (np.transpose(M) == M).all()
```