Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 24 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2$

$= 1.$

Par linéarité de l'espérance $E(S_n)$ existe et, ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~,

$\forall n \in \mathbb{N}$ $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$

$= \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

b) def simul (n) :

```
return(np.sum(rd.normal(0,1,n)**2))
```

c) ~~On conjecture que S_n^2 ne converge pas en probabilité vers~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~On conjecture que $E(S_n^2) \neq n^2$ et même $E(S_n^2) > n^2$.~~

On conjecture que S_n n'admet pas de variance car $E(S_n^2)$ n'existerait pas. En effet, si $E(S_n^2)$ existe, on a $E(S_n^2) > n^2$ pour $n \in [\![1;9]\!]$ et la courbe augmente. Donc par théorème de comparaison $E(S_n^2)$ n'existerait pas.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est une variable à densité et $\frac{1}{2} \neq 0$ donc par théorème de transformation affine,

W_n est une variable aléatoire à densité, de densité f_{W_n} définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{W_n}(x) = \frac{1}{|\frac{1}{2}|} f_{S_n}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)$

$= 2 f_{S_n}(2x)$ où

f_{S_n} est la densité de S_n.

En particulier pour $n=1$, $f_{W_1}(x)$

$W_1 = \frac{1}{2} S_1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-$, $P(\frac{1}{2} S_1 \leq x) = 0$, $\frac{1}{2} S_1(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P(\frac{1}{2} S_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq 2x)$

$= P(|X_1| \leq \sqrt{2x})$

$= 2\phi(\sqrt{2x}) - 1$.
$= F_{W_1}(x)$.

$x \mapsto \sqrt{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeur dans $\mathbb{R}$ et ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composition F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ (fonction nulle). ~~Do~~

Or $\lim\limits_{x \to 0} F_{W_1}(x) = 2\phi(0) - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{W_1}(x) = 0$ donc

F_{W_1} est continue sur $\mathbb{R}$ donc W_1 est à densité.
F_{W_1} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
On peut poser f_{W_1} une densité tel que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{W_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \times 2}{2\sqrt{2x}\sqrt{2\pi}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

~~Donc $W_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$.~~

b) Soit $Z \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-x} dx \quad \text{car} \int f_Z(x) dx$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Or $E(W_1) = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} e^{-x} dx$

$$= \frac{1}{2} E(S_1)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} x \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-x} dx$

Soit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

c) Donc $W_1 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

~~$S_1 = 2W_1 \hookrightarrow$~~

Soit $\frac{1}{2} X_1^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$X_1^2, \dots, X_n^2$ sont mutuellement indépendants par indépendance et par lemme des coalitions donc, par stabilité par somme de la loi gamma,

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ soit $W_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

4/

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES II

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

d) $E(W_n) = \frac{n}{2}$.

$\Rightarrow E(S_n) = n$ par linéarité de l'espérance.

$$E(W_n^2) = V(W_n) + (E(W_n))^2$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$= \frac{n^2+2n}{4}.$$

$\Rightarrow V(S_n) = 4V(W_n)$

$$= 2n$$

3) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, par théorème de transfert $E\left(\frac{1}{W_n}\right)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-x} dx$ converge absolument car $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f_{W_n}(x) dx$ converge et vaut 0.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^2 \xrightarrow[x]{} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-x}$~~

Soit $Z \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2}-1)$, $n \geq 3$.

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-2}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} e^{-x} dx$$

$$= 1$$

Donc par combinaison linéaire $E(\frac{1}{W_n})$ existe et

$$E(\frac{1}{W_n}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \times \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-2}}{1} e^{-x}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \times \Gamma(\frac{n}{2}-1) \times \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-2}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} e^{-x} dx}_{=1}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{W_n}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(\frac{1}{S_n}) = \frac{1}{2} \times E(\frac{1}{W_n})$

6/

Donc $E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$$

$$= \frac{1}{n-2}$$

b)

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(|T_n| \leq x) = P(-x \leq T_n \leq x)$

$= F_{T_n}(x) - F_{T_n}(-x)$ car

T_n est à densité.

En posant g_{T_n} la densité de T_n comme elle est strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, ~~par ce que F_{T_n} l'est aussi~~ alors

$g : x \mapsto F_{T_n}(x) - F_{T_n}(-x)$ est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = g_{T_n}(x) + g_{T_n}(-x)$

> 0.

par continuité de g par somme, par théorème de la bijection g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $]0;1[$.

car $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to +\infty} F_{T_n}(-x)$

$= 1 - 0 = 1$.

Donc, $\exists!\, t_{n,\alpha} \in]0;+\infty[$, $P(|T_n| \leq t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha$.

5) a : Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $X_1, \dots, X_n$ et Y sont mutuellement indépendants

donc par le lemme des coalitions Y et $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum X_i^2}}$ sont

indépendants. $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ existe donc $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}S_n}}\right)$

existe par linéarité.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $E(T_n)$ existe et $E(T_n) = E(Y) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}S_n}}\right)$

$= 0.$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, E(T_n) = 0$

b)

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $V(T_n)$ existe si et seulement si $E\left(\frac{Y^2}{S_n/n}\right)$ existe.

Par lemme des coalitions Y^2 et S_n/n sont indépendants.

Donc $E(T_n^2) = E(Y^2) \times E\left(\frac{1}{S_n/n}\right)$

$= 1 \times \frac{n}{n-2}.$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2$

$= \frac{n}{n-2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \quad (T_n - Y)^2 = T_n^2 - 2T_nY + Y^2.$

$$= T_n^2 - \frac{2Y^2}{\sqrt{S_n/n}} + Y^2$$

$$= T_n^2 - \sqrt{2n}\frac{Y^2}{\sqrt{W_n}} + Y^2.$$

Y^2 et $\frac{1}{\sqrt{W_n}}$ sont indépendants par le lemme des coalitions donc $E((T_n - Y)^2) = E(T_n^2) - \sqrt{2n}E(Y^2) \times E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) + E(Y^2)$

$$= \frac{n}{n-2} - \sqrt{2n}E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right) + \frac{n-2}{n-2}$$

$$= \frac{2n-2}{n-2} - \sqrt{2n}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{W_n}}\right)$$

6)

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall \omega \in \Omega, W_n(\omega) \leq W_{n+1}(\omega)$ car $X_1^2(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{\sqrt{W_n(\omega)}} \geq \frac{1}{W_{n+1}(\omega)}$$ car

$W_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ et par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\frac{1}{\sqrt{W_n(\omega)}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{W_{n+1}(\omega)}}$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $v_{n+1} \leqslant v_n$ par croissance de l'espérance.

$v_2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$.

Or $W_2 \hookrightarrow \gamma(1)$

~~Soit~~

$E\left(\frac{1}{\sqrt{W_2}}\right)$ existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$ converge absolument.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
$= \sqrt{\pi}$.

Donc $v_2 = \sqrt{\pi}$

c) Par théorème de transfert, $E\left(\frac{1}{\sqrt{un}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dx > 0$ par théorème de stricte positivité des intégrales.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $un \neq 0$.

~~d) def suite_v(n):~~

~~v = np.sqrt(np.pi).~~
~~S = np.zeros(n-1)~~

~~v = 2/((i-1) * v).~~

```
import numpy as np.
def suite_v(n):

    S = np.zeros(n-1)
    S[0] = np.sqrt(np.pi).
    for i in range(2, n)
        S[i-1] = 2/((i-1) * S[i-2]).

    return(S).
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

d) On peut conjecturer que $(n u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{n}{2}}\, u_n = E\left(\sqrt{\frac{n}{2W_n}}\right)$

$= E\left(\sqrt{\frac{n}{S_n}}\right).$

~~Or $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{P} 1$ par la loi faible des grands nombres par indépendance des $X_1^2, \dots, X_n^2$ et ces variables admettent même espérance et variance.~~
~~Donc, par continuité de $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}}$ en 1 (et sur $\mathbb{R}_+^*$), on a que~~

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (u_{n+1})^2 \leqslant u_{n+1} u_n \leqslant u_n^2$ par décroissance de (u_n).

$(u_{n+1})^2 \leqslant \frac{2}{n-1} \leqslant u_n^2.$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall n \geqslant 3$, $\frac{2}{n-1} \leqslant un^2 \leqslant \frac{2}{n-2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leqslant un \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-2}}$ par positivité des termes.

$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{n-1}} \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}}un \leqslant \sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

$\frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n-2} \sim \frac{n}{n} = 1$.

Par théorème d'encadrement, $\sqrt{\frac{n}{2}}un \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Donc $un \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

7) Par l'inégalité de Bienaymé Tchebychev, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|T_n - Y - E(T_n - Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(|T_n-Y|^2)}{\varepsilon^2}$.

car $V(T_n - Y) = E(|T_n - Y|^2) - \underbrace{E(T_n - Y)}_{=0}$

$= E(|T_n - Y|^2)$.

Or $\sqrt{2n}\, E\left(\frac{1}{\sqrt{Wn}}\right) = \sqrt{2n}\, un$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.

$\underset{n\to+\infty}{\sim} 2$

$\frac{2n-2}{n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|T_n - Y|^2) = 2 - 2 = 0$.

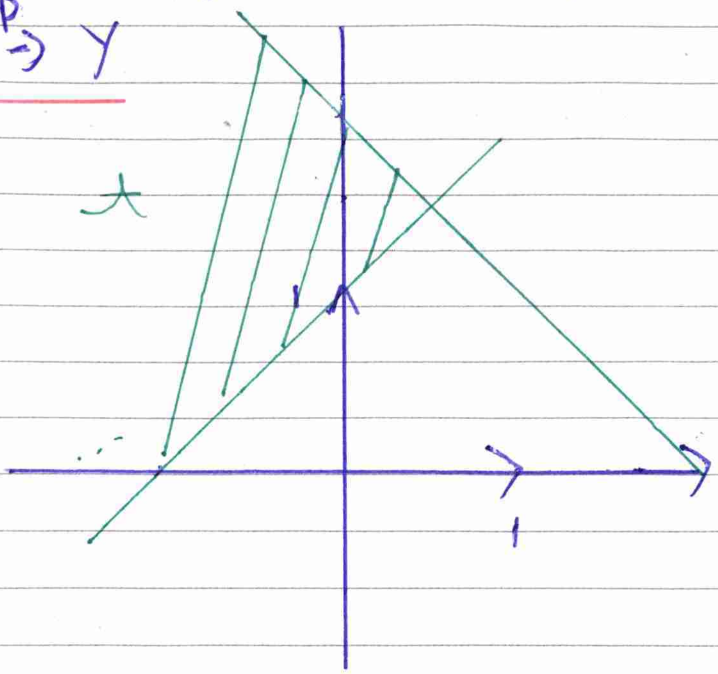
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - Y| \geqslant \varepsilon) = 0$ par théorème

/

d'encadrement par positivité de la probabilité.

Donc $T_n \xrightarrow{P} Y$

8)



9) $(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x+y \leq a$ et $x-y \leq b$

~~$\Leftrightarrow x \leq a-d$ et~~

~~$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{a+b}{2}$~~

$\Leftrightarrow x \leq a-y$ et $x \leq b+y$.

$\Leftrightarrow x \leq a-y$ car $y \geq \frac{a-b}{2}$

donc $(a-y)-(b+y) = a-b-2y \leq a-b-(a-b) \leq 0$

Donc $(x,y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in]-\infty ; a-y[$.

b) $\forall (x,y) \in A$, $\mathbb{1}_A(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; a-y]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x) \leq \varphi(x)$

$\mathbb{1}_A(x,y) \geq 0$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx$ converge

par critère de comparaison avec des fonctions positives.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x,y)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{a-y} \varphi(x)dx$$

$$= \Phi(a-y)$$

10)

Soit $y \leq d$.

$(x,y) \in A \Leftrightarrow x \leq a-y$ et $x \leq b+y$

or $(a-y)-(b+y) \geq 0$ car $y \leq d$ donc

$(x,y) \in A \Leftrightarrow x \in]-\infty ; b+y[$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathbb{1}_A(x,y)dx = \int_{0}^{b+y} \varphi(x)dx$

$$= \Phi(b+y).$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES II

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

1) a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \psi_1(x,y) \leq a\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \psi_2(x,y) \leq b\}$

où $\psi_1 : (x,y) \mapsto x + y$ et $\psi_2 : (x,y) \mapsto x - y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On sait que $A \subset \mathbb{R}^2$.

Donc par intersection de fermés, A est fermé.

b). $P((X,Y) \in A) = P(Y \geq d, (X,Y) \in A)$
$+ P(Y \leq d, (X,Y) \in A)$ car $([Y \geq d], [Y \leq d])$ est un système complet d'évènements.

$= P(Y \geq d) P(X \leq a-y) + P(Y \leq d)$
$\times P(X \leq b+y)$ car Y est à densité.

$= (1 - \Phi(d)) \Phi(a-y) + \Phi(d) P(X \leq b+y)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $P((X,Y) \in \mathcal{A}) = \int_d^{+\infty} \varphi(x)dx\, \phi(a-y)dx + \int_{-\infty}^{d} \varphi(x)\phi(b+y)dx$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x+d)\phi(a-y)dx + \int_{-\infty}^{d} \varphi(x)\phi(b+y)dx$$

par le changement de variable affine avec $x \mapsto x-d$ une bijection croissante de classe C^1 de $[d;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x+d)\phi(a-y)dx + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x-d)\phi(b+y)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x+d)\phi(a-y) + \varphi(x-d)\phi(b+y)dx$$ par parité de φ sur $\mathbb{R}$.

$$= \int_0^{+\infty} (\varphi(x+d) + \varphi(d-x))\phi(c-x)\,dx$$

12) $\forall z \in \mathbb{R}_+, \Phi(c-z) = \int_{-\infty}^{c-z} \varphi(t)\,dt$.

$= \int_{-\infty}^{c} \varphi(t-z)\,dt$ par changement de variable affine avec $t \mapsto t+z$ étant une bijection croissante C^1 de $]-\infty ; c-z]$ sur $]-\infty ; c]$.

Donc $P((X,Y) \in \mathcal{D}) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{c} (\varphi(d+z)+\varphi(d-z))\varphi(t-z)\,dz \right.$

car $\varphi(d+z) + \varphi(d-z)$ ne dépendent pas de t.

13) $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}}$

$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}$.

car $\frac{-\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} = \frac{-\frac{u^2}{2} - uv - \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} + uv}{2}$

$= \frac{-u^2}{2} - \frac{v^2}{2}$.

Donc, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \varphi(u)\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}} e^{-\frac{\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}$

$= \varphi\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)\varphi\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)$

/

14)

$$\cancel{P((X,Y)\in A) = \int_{-\infty}^{c}\int_{0}^{+\infty} \varphi(d+z)\varphi(t-z)+\varphi(d-z)\varphi(t-z)\,dz\,)dt}$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{c}\int_{0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{d+t}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{d-t+2z}{\sqrt2}\right)+\varphi\left(\frac{d-t}{\sqrt2}\right)}$$

$$\cancel{\times\,\varphi\left(\frac{d+t-2z}{\sqrt2}\right)dz\,)\,dt.}$$

15) On pose, $\forall B<0, \forall t\in[B;c]$, $\begin{cases} v(t) = \phi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right) \\ V(t) = \sqrt2\,\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt2}\right)\end{cases}$

avec v et V de classe C^1 sur $[B;c]$ et $\begin{cases} v'(t) = \frac{1}{\sqrt2}\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right) \\ V'(t) = \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt2}\right)\end{cases}$.

Par intégration par partie,

$$\int_B^c \varphi\left(\frac{t+d}{\sqrt2}\right)\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)dt = \left[\sqrt2\,\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)\phi\left(\frac{t+d}{\sqrt2}\right)\right]_B^c$$

$$+\int_B^c \phi\left(\frac{t+d}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)dt.$$

$$\xrightarrow[B\to-\infty]{} \sqrt2\,\phi\left(\frac{c-d}{\sqrt2}\right)\phi\left(\frac{c+d}{\sqrt2}\right) + \overbrace{\int_{-\infty}^{c}\phi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)\varphi\left(\frac{t-d}{\sqrt2}\right)dt}^{A_c}$$

Donc $P((X,Y)\in A) = \phi\left(\frac{c-d}{\sqrt2}\right)\phi\left(\frac{c+d}{\sqrt2}\right) + \frac{A_c}{\sqrt2} - \frac{A_c}{\sqrt2}$

$$= \underline{\phi\left(\frac{c-d}{2}\right)\phi\left(\frac{c+d}{\sqrt2}\right)}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2025
Épreuve de : MATHEMATIQUES II		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Troisième Partie :

17) Soit p le projecteur orthogonal sur Vect(a_1).

(a_1) est une base orthonormale de Vect(a_1) donc,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{1} \langle x, a_i \rangle a_i$$

$$= \langle x, a_i \rangle a_i$$

$$= \frac{1}{n} \langle (x_1, \dots, x_n), (1, \dots, 1) \rangle (1, \dots, 1)$$

$$= \frac{x_1 + \dots x_n}{n}$$

$$= (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~$p(x) = \bar{x} \Rightarrow x - \bar{x}$~~

$p(x) = (\bar{x}, \dots, \bar{x}) \Rightarrow x - (\bar{x}, \dots, \bar{x}) \in \mathrm{Vect}(a_1)^{\perp} = \mathrm{Vect}(a_2, \dots a_n)$

car $\mathbb{R}^n$ est euclidien

$\Rightarrow x - (\bar{x}, \dots, \bar{x}) = q(x)$ où q est le

projecteur othogonal sur $\mathrm{Vect}(a_2, \dots, a_n)$

$\Rightarrow x - (\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \sum_{i=2}^{n} \langle x, a_i \rangle a_i$ car

$(a_2, \dots, a_n)$ est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(a_2, \dots, a_n)$.

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k = (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x})$$

b) $\left\langle \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k, \sum_{k=2}^{n} \langle x, a_k \rangle a_k \right\rangle = \langle (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}), (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) \rangle$

donc $\sum_{k=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} \langle x, a_k \rangle \langle x, a_j \rangle \langle a_j, a_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ par

bilinéarité de $\langle \dots, \dots \rangle$

Donc $\sum_{k=2}^{n} (\langle x, a_k \rangle)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ par orthonormalité.

18) a) pour $n=2$

• (a_1, a_2) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ où

$a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

~~$(Y_1, a_1$~~ $Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ et $Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}$.

Par le théorème de Cochran,

Y_1 et Y_2 sont indépendants et $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

donc la partie 2 se vérifie.

b) Si R_1 et R_2 sont indépendantes :

$Cov(R_1, R_2) = E(R_1 R_2) - E(R_1)E(R_2)$

$= E(\beta_1 X_1^2 + \beta_2 X_1 X_2 + \beta_1 X_1 X_2 + \beta_2 X_2^2) - (E(X_1) + E(X_2))$

$\times(\beta_1 E(X_1) + \beta_2 E(X_2))$

$= 0$ par linéarité de l'espérance et car

$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$ par indépendance.

R_1 et R_2 indépendantes implique $Cov(R_1, R_2) = 0$.

~~Supposons $Cov(R_1, R_2) = 0$:~~

~~$V(R_1 + R_2) = V(R_1) + V(R_2) + 2Cov(R_1, R_2)$~~

~~$=$~~

19)

a) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants donc, par stabilité par sommes de loi normale,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

b) $\bar{X} = Y_1 = \langle X, a_1 \rangle \times \sqrt{n}$.

$$U = \sum_{k=2}^{n} \langle X, a_k \rangle^2$$

$$= \sum_{k=2}^{n} Y_k^2$$

c) $X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants donc par le lemme des coalitions $\bar{Y}$ et U sont indépendants.

pour $i \in [\![2 ; n]\!]$, $X_i - \bar{X} = \frac{(n-1)X_i - \sum_{k=1, k \neq i}^{n} X_k}{n}$ suit une loi normale de paramètre 0 et 1. Donc $\sum_{i=2}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = U$ suit la loi du Khi deux avec $n-1$ degrés de liberté.