Code épreuve : 283	Nombre de pages : 19	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2 S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1) a) ~~$\forall k \in [\![0;r]\!]$~~

D'après l'hypothèse :

$\deg(\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_r Q_r) = -\infty$

Or $\deg(\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_r Q_r) = \deg(\lambda_m Q_m)$ car $d_0 < d_1 < \dots < d_r$
$= d_m$ (et $m = \max\{k \in [\![0;r]\!], \lambda_k \neq 0\}$)
≥ 0 car les $\lambda_0, \dots, \lambda_r$ sont non tous nuls.

L'hypothèse est donc absurde.
$(Q_0, \dots, Q_r)$ est une famille libre car il n'existe pas $(\lambda_0, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_0 Q_0 + \dots + \lambda_r Q_r = 0$.

b) $(Q_0, \dots, Q_r)$ est une base de F_r si
$\forall k \in [\![0;r]\!], Q_k \in F_r$ (car c'est une famille libre de cardinale $r+1 = \dim(F_r)$)
$\iff d_r = r$

Donc si $d_r = r$ $(Q_0, \dots, Q_r)$ est une base de F_r.

Si $(Q_0, \dots, Q_r)$ est une base de F_r alors $Q_r \in F_r$ ie $d_r \leq r$.
Comme $-\infty < d_0 < d_1 < \dots < d_r$ on a $d_r = r$.

$d_r = r$ est donc une condition nécessaire et suffisante

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

par que $(Q_0, \dots, Q_r)$ soit une base de F_r.

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $V_r(x) = \prod_{k=0}^{r-1} (x-k)$

$x \in [\![0; r-1]\!] \Rightarrow V_r(x) = 0$.

Or $\text{card}([\![0; r-1]\!]) = r$. et $\deg(V_r) \leq r$.

Puisque $[\![0; r-1]\!]$ de cardinal r est inclu dans l'ensemble des racines de V_r, d'après le ~~th~~ théorème d'Alembert Gauss, $[\![0; r-1]\!]$ est l'ensemble des racines de V_r.

b) soit $x \in \mathbb{R}$ $x^{\underline{0}} = 1$ et $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $x^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (x-i)$.

$\deg(1) = 0$ $\forall k \in [\![1;r]\!]$ $\deg\left(\prod_{i=0}^{k-1} (X-i)\right) = k$

Donc $\forall k \in [\![1; r]\!]$ $\deg(V_k) = k \leq r$ $(\deg(V_0) < \deg(V_1) < \dots < \deg(V_r))$

Ainsi $V_k \in F_r$. et puisque $\deg(V_r) = r$, d'après 1)b) $(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r

2)c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x = x^2 - \frac{2 \times 1}{2} x + 0$.

On a donc bien $x^{\underline{2}} \underset{x \to +\infty}{=} x^2 - \frac{2(2-1)}{2} x^{2-1} + o(x^{2-1})$.

Soit $r \geq 2$, On suppose que $x^{\underline{r}} = x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})$

$\forall x \in \mathbb{R}$. $x^{\underline{r+1}} = (x-r) x^{\underline{r}}$ $\quad x^{\underline{r+1}} \underset{x \to +\infty}{=} (x-r)\left(x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})\right)$

$$x^{r+1} \underset{x \to +\infty}{=} x^{r+1} - \frac{r(r-1)}{2} x^r + o(x^r) - r x^r$$

$$\underset{x \to +\infty}{=} x^{r+1} - \frac{r(r-1)+2r}{2} x^r + o(x^r)$$

$$\underset{x \to +\infty}{=} x^{r+1} - \frac{r(r+1)}{2} x^r + o(x^r).$$

Par principe de récurrence, on a bien démontré que $\forall r \geq 2, \; x^r \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2} x^{r-1} + o(x^{r-1})$.

3) a) $U_r \in F_r$ et $(V_0, \dots, V_r)$ est une base de F_r.

Donc : $\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $U_r = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k V_k$.

On peut réécrire la famille de réels $(\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ de la sorte : $(\sigma(r,k))_{0 \leq k \leq r}$.

b) $\forall r \in \mathbb{N}^*, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; U_r(x) = x^r = \sum_{k=0}^{r} \sigma(r,k) V_k(x)$

Or $\forall k \in [\![1; r]\!], \; V_k(x) = \sum_{i=0} \alpha_i U_i$ avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$

et $\alpha_0 = 0$.

et $V_0(x) = 1$.

Donc puisque U_r n'a pas de partie constante alors $\sigma(r,0) = 0$.

3) c) $\forall r \in \mathbb{N}^*$,

$\sigma(r+1, 1) = 1$ d'après (2)

$\sigma(r, 1-1) = 0$ d'après (1)

$1 \times \sigma(r, 1) = 1$ d'après (2).

Donc on a $\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\,\sigma(r, k)$ pour $k=1$

Soit $k \in [\![1; r-1]\!]$ On suppose que $\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\,\sigma(r, k)$.

$\sigma(r+1, k+1)$

3) d) $U_1 = x = V_1$ donc $\sigma(1, 0) = 0$ et $\sigma(1, 1) = 1$.
Donc $\forall k \in \{1\}$, $\sigma(1, k) \in \mathbb{N}^*$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1; r]\!]$, $\sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*$.

~~Alors~~ $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $\sigma(r+1, k) = \sigma(r, k-1) + k\,\sigma(r, k)$ d'après 3) c)

$\sigma(r, k-1) \in \mathbb{N}$, $k\,\sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*$
Donc $\forall k \in [\![1; r]\!]$ $\sigma(r+1, k) \in \mathbb{N}^*$.

$\sigma(r+1, r+1) = 1 \in \mathbb{N}^*$ d'après (2).

Donc $\forall k \in [\![1, r+1]\!]$, $\sigma(r+1, k) \in \mathbb{N}^*$
Par principe de récurrence, on a : $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\sigma(r, k) \in \mathbb{N}^*$

Code épreuve : 283	**Nombre de pages :** 19	**Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques 2 S

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3)e) ~~function M = stirling1~~

A = ones (4, 4)

S0 = 0

S1 = 1

A(

4)a) $\forall r \in \mathbb{N} \quad V_r \in F_r$.

$(U_0, \dots, U_r)$ est une base de F_r.

Donc $\exists ! (s(r,k))_{0 \leq k \leq r} \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que :

$$V_r = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) U_k .$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^r = V_r(x) = \sum_{k=0}^{r} s(r,k) U_k(x)$

$$= \sum_{k=0}^{r} s(r,k)\, x^k$$

4) b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^{\underline{r+1}} = (x-r)\, x^{\underline{r}}$

$= (x-r) \sum_{k=0}^{r} S(r,k)\, x^k$

$= \sum_{k=0}^{r} S(r,k)\, x^{k+1} - \sum_{k=0}^{r} r S(r,k)\, x^k$

$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{r+1} S(r+1,k)\, x^k = \sum_{k=1}^{r+1} S(r,k-1)\, x^k - \sum_{k=0}^{r} r S(r,k)\, x^k$

$~~= \sum_{k=1}^{r+1} S(r,k-1)~~$

$= S(r,r)\, x^{r+1} - r S(r,0)\, x^0 + \sum_{k=1}^{r} (S(r,k-1) - r S(r,k))\, x^k$

$\Longrightarrow \forall k \in [\![1;r]\!]$, $S(r+1,k) = S(r,k-1) - r S(r,k)$ par identification des coefficients.

$S(r,1) = \dfrac{S(r,0) - S(r+1,1)}{r}$

$= \dfrac{-S(r+1,1)}{r}$ car le coefficient de $x^{\underline{r}}$ devant x^0 est nul.

$\Longrightarrow \forall r \in \mathbb{N}^*$, $S(r+1,1) = -r S(r,1)$

Par récurrence immédiate on obtient :

$\forall r \in \mathbb{N}^*$ $S(r,1) = (-1)^{r-1} (r-1)!\, S(1,1)$

$= (-1)^{r-1} (r-1)!$

4)c) $s(1,1)=1$, son signe est bien celui de $(-1)^{1+1}$

Soit $r\in\mathbb{N}^*$, On suppose que pour tout $k\in[\![1;r]\!]$, le signe de $s(r,k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$

$\forall k\in[\![1,r]\!]$
$s(r+1,k)=s(r,k-1)-r\,s(r,k)$ d'après 4)b)

le signe de $-r\,s(r,k)$ est celui de $(-1)^{r+1+k}$
celui de $s(r,k-1)$ est celui de $(-1)^{r+k-1}=(-1)^{r+1+k}$.
Donc le signe de $s(r+1,k)$ est celui de $(-1)^{r+1+k}$.

Pour $k=r+1$. $s(r+1,r+1)=1$ $\quad (x^{\underline{r+1}}=x^{r+1}+P(x)$, avec $P\in\mathcal{P}_r)$
Donc le signe de $s(r+1,r+1)$ est celui de $(-1)^{2(r+1)}$.

Par principe de récurrence on a:
$\forall k\in[\![1;r]\!]$, le signe de $s(r,k)$ est celui de $(-1)^{r+k}$.

4)d) $\sigma(r,r)=1$ d'après (2)

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad x^{\underline{r}}=x^r+P_2(x)$ avec $P_2\in\mathcal{P}_{r-1}$
donc $s(r,r)=1$.
Ainsi $\sigma(r,r)\,s(r,r)=1$.

4)e) $\forall r\geq 2$
$$\sum_{k=r-1}^{r}\sigma(r,k)\,s(k,r-1)=0$$

$\Rightarrow \sigma(r,r-1)\,s(r-1,r-1)+\sigma(r,r)\,s(r,r-1)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{r(r-1)}{2}\times 1+1\times s(r,r-1)=0$ $\quad$ (on a précédemment trouvé que $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $s(r,r)=1$)

$\Leftrightarrow s(r,r-1)=\dfrac{r(1-r)}{2}$

On a alors $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $S(r,r)=1$

et $\forall r \geqslant 2$, $S(r,r-1)=\frac{r(r-1)}{2}$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 19 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2 S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

5) a) $E(X) = V(X) = \theta$

$E(X^2) = \theta(1+\theta)$

b) $X^1 = X$

$X^2 = X(X-1) = X^2 - X$

$X^3 = X(X-1)(X-2) = (X^2-X)(X-2) = X^3 - 2X^2 - X^2 + 2X$
$= X^3 - 3X^2 + 2X$

$X^4 = X^3(X-3) = (X^3 - 3X^2 + 2X)(X-3)$
$= X^4 - 3X^3 - 3X^3 + 9X^2 + 2X^2 - 6X$
$= X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X.$

$X^1 = X^1$

$X^2 = X^2 + X = X^2 + X^1$

$X^3 = X^3 + 3X^2 - 2X = X^3 + 3X^2 + 3X^1 - 2X^1$
$= X^3 + 3X^2 + X^1$

$X^4 = X^4 + 6X^3 - 11X^2 + 6X$
$= X^4 + 6(X^3 + 3X^2 + X^1) - 11(X^2 + X^1) + 6X^1$
$= X^4 + 6X^3 + 7X^2 + X^1$

~~5)b)~~ 5)c) Soit $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{E}(X^n)$ existe ssi $\sum_{k \geq 0} k^n \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$ converge absolument

ssi $\sum_{k \geq 0} k^n \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$ converge (car les termes sont tous positifs).

Or $\lim_{k \to +\infty} \frac{k^{n+2} \theta^k}{k!} = 0$ par croissances comparées

Donc $\frac{k^n \theta^k}{k!} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

~~Donc~~ $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente.
Donc par critère de négligeabilité entre deux séries à terme générale positif, $\sum_{k \geq 0} k^n \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$ converge.

Ainsi X admet des moments à tous les ordres.

6)a) $\forall r \geq 1$ D'après l'énoncé, X^r est combinaison linéaire des $X, X^2, \dots, X^r$.
Or X admet des moments à tous les ordres donc les $X, X^2, \dots, X^r$ admettent des moments à tous les ordres.
Par linéarité de l'espérance X^r admet des moments à tous les ordres.

~~6)b) $\forall r \geq 1$ $\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{r} s(r,k) X^k\right)$~~
~~$= \sum_{k=0}^{r} s(r,k) \mathbb{E}(X^k)$ par linéarité de l'espérance~~

6) b) D'après le théorème de transfert.. (Sachant que $E(X^{\underline{r}})$ existe)
$\forall r \geq 1$

$$E(X^{\underline{r}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{\underline{r}} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

$$= \sum_{k=r}^{+\infty} k^{\underline{r}} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} + \sum_{k=0}^{r-1} k^{\underline{r}} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

$$= \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{\theta^k}{(k-r)!} e^{-\theta} + 0$$ car $\forall k \in [\![0; r-1]\!]$, $k^{\underline{r}} = k(k-1)\dots(k-r+1)$ contient un facteur 0.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{k+r}}{k!} e^{-\theta}$$ par le changement de variables $j = k-r$

$$= \theta^r$$ car $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} = 1$

6) c) $E(X^3) = E(X^{\underline{3}}) + 3E(X^{\underline{2}}) + E(X^{\underline{1}})$ par linéarité

$$= \theta^3 + 3\theta^2 + \theta$$
$$= \theta(\theta^2 + 3\theta + 1)$$

De même $E(X^4) = E(X^{\underline{4}}) + 6E(X^{\underline{3}}) + 7E(X^{\underline{2}}) + E(X^{\underline{1}})$

$$= \theta^4 + 6\theta^3 + 7\theta^2 + \theta$$

7) a) ~~Pour k=0.~~
$\cancel{\partial_1 g(\theta, 0) = -\frac{1}{k!} e^{-\theta}}$

Pour $k=0$, $\partial_1(f)(\theta, 0) = -e^{-\theta}$

$$\partial_1(g)(\theta, 0) = \frac{-e^{-\theta}}{e^{-\theta}} = -1$$

Pour tout $k \geq 1$, $\forall \theta > 0$

$$\partial_1 f(\theta, k) = \frac{k\theta^{k-1}}{k!} e^{-\theta} - \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

$$\partial_1 g(\theta, k) = \frac{e^{-\theta}\theta^{k-1}}{k!}(k-\theta) \times \frac{1}{f(\theta,k)} = \frac{\theta^{k-1}e^{-\theta}}{k!}(k-\theta) \times \frac{k!e^{\theta}}{\theta^k}$$

$$\partial_1 g(\theta,k) = \frac{k-\theta}{\theta} = \frac{k}{\theta} - 1$$ (Cela correspond aussi avec $k=0$)

On a : $\forall k \geq 0$, $\partial_1 g(\theta,k) = \frac{k}{\theta} - 1$

Ainsi, puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,

$$\partial_1 (g)(\theta, X) = \frac{X}{\theta} - 1$$

7) b) $\forall r \geq 1$

$$\begin{aligned} X X^r &= \sum_{k=0}^{r} S(r,k) X^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} S(r,k-1) X^k \\ &= \sum_{k=1}^{r} S(r,k-1) X^k + S(r,r) X^{r+1} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(S(r+1,k) + r S(r,k)\right) X^k + X^{r+1} \text{ d'après 4) b et 4) c} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} S(r+1,k) X^k + r \sum_{k=1}^{r} S(r,k) X^k \\ &= X^{r+1} + r X^r \text{ car } S(r,0) = 0 \text{ pour tout } r \geq 1. \end{aligned}$$

D'après la formule de Huygens ;

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, X^r) &= E(X X^r) - E(X) E(X^r) \\ &= E(X^{r+1}) + r E(X^r) - \theta \, \theta^r \\ &= \theta^{r+1} + r\theta^r - \theta^{r+1} \\ &= r\theta^r \end{aligned}$$

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 19

Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques 2S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) a) $\forall r \geq 1$ $\operatorname{cov}\left(\partial_1(g)(\theta X), X^r\right) = \operatorname{cov}\left(\frac{X}{\theta} - 1, X^r\right)$

$= \frac{1}{\theta}\operatorname{cov}(X, X^r) - \operatorname{cov}(1, X^r)$

$= \frac{1}{\theta} r\theta^r - 0$

$= r\theta^{r-1}$

$\forall \theta > 0$

$\forall r \in \mathbb{N}^*$

$V(X^r) = \operatorname{cov}(X^r, X^r)$

Partie 3 : Soit $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$

8) a) $F_2 : \theta \longrightarrow f(\theta, k_1, \dots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, k_i) = \dfrac{\theta^{k_1 + \dots + k_n} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} (k_i)!}$

$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\theta \longrightarrow f(\theta, k_i)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc par produit de fonctions dérivables, F_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$G_2 : \theta \longrightarrow G(\theta, k_1, \dots, k_n) = \ln(F_2(\theta))$

F_2 est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ~~donc~~ et $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, G_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall \theta > 0$, $\partial_1(f)(\theta, k_1, \dots, k_n) = F_2'(\theta) = \dfrac{e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} (k_i)!} \left(\sum_{i=0}^{n} k_i\right) \theta^{k_1 + \dots + k_n - 1} - \dfrac{\theta^{k_1 + \dots + k_n}}{\prod_{i=1}^{n} (k_i)!} e^{-n\theta}$

$\partial_1(G)(\theta, k_1, \dots, k_n) = F_2'(\theta) \times \dfrac{1}{F_2(\theta)}$

$= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\theta} - 1$

8) b) $E(Z_\theta) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta} - 1\right)$

$= \dfrac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} (E(X_i) - 1)$

$= \dfrac{n\theta}{\theta} - n = 0$

Z_θ est bien centrée.

Z_θ admet une variance strictement positive en tant que combinaison de variables aléatoires indépendantes admettant des variances strictement positives

$$I(\theta) = V(Z_\theta) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad \text{par indépendance des } X_i$$

$$= \frac{n\theta}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}$$

9) a) $E(T) = \varphi(\theta)$ donc T (qui est un estimateur de $\varphi(\theta)$) est un estimateur sans biais de $\varphi(\theta)$

b)

10) a) ~~$Cov(T, Z_\theta) = EZ_\theta$~~

$\forall \theta > 0$

$$Cov(T, Z_\theta) = E(T \times Z_\theta) - E(T)E(Z_\theta) \quad \text{d'après la formule de Huygens}$$

$$= E(T \times Z_\theta) \quad \text{car } Z_\theta \text{ est centrée.}$$

sous réserve d'existence, par le théorème du transfert :

$$E(T \times Z_\theta) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} t(k_1, \dots, k_n) \times \partial_1(G)(\theta, k_1, \dots, k_n) \times F(\theta, k_1, \dots, k_n)$$

$$\cancel{= \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} t(k_1, \dots, k_n) \times f_2'(\theta) \times \frac{1}{f_2(\theta)} \times f_2(\theta)}$$

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} t(k_1, \dots, k_n) \times \partial_1(F)(\theta, k_1, \dots, k_n) \times \frac{1}{F(\theta, k_1, \dots, k_n)} \times F(\theta, k_1, \dots, k_n)$$

$E(T \times Z_\theta) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n} t(k_1,\dots,k_n)\, \partial_1(F)(\theta, k_1,\dots,k_n)$

$= \varphi'(\theta)$

10) b) $\forall \theta > 0$,

$V(T) = E(T^2) - (\varphi(\theta))^2$

11)a) ech = (sum(X, 'c') - n* theta / theta)

car On veut simuler un echantillon de N realisations de Z_θ. Or X a N colonnes et n lignes.
~~On~~ Donc on veut une matrice colonne qui renvoie ~~les~~ ~~...~~ les realisation de Z_θ par rapport aux lignes.

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 19 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques 2 S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) b) $\frac{10}{4} \leq \frac{20}{4} \leq \frac{40}{4} = \frac{50}{5} = 10$ ces chiffres représentent les variances de Z_θ selon les couples.

La figure C présente la variance la plus faible de elle correspond au couple (10,4)
La figure B correspond au couple (20,4) car présente la deuxième variance la plus faible.

La figure A correspond au couple (50,5) car ~~est plus proche~~ les valeurs semblent mieux correspondre au modèle théorique, ce qui peut s'expliquer par le plus grand nombre de de variables dans l'échantillon.

12) a) $S_n \hookrightarrow P(n\theta)$ car les $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants et par stabilité de la loi de poisson

$E(S_n) = V(S_n) = n\theta$.

b) $M_{rn} = \frac{S_n^r}{n^r}$ est un estimateur de θ^r

$E(M_{rn}) = \frac{1}{n^r} E(S_n^r) = \frac{(n\theta)^r}{n^r} = \theta^r$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$V(S_n)$ existe comme combinaison linéaire de S_n^c qui possède une variance.

Σ

Donc $M_{r,n}$ est un estimateur régulier de θ^r.

Donc d'après 10)b),
$\forall \theta > 0,\ V(M_{r,n}) \geq \dfrac{(r\theta^{r-1})^2}{\frac{n}{\theta}} = \dfrac{r^2\theta^{2r-2}}{\frac{n}{\theta}} = \dfrac{r^2\theta^{2r-1}}{n}$

c) $M_{2,n} = \dfrac{S^{\underline{2}}}{n^2} = \dfrac{S_n^2 - S_n}{n^2}$

Partie 4 :

13) a) $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur de ~~de~~ θ car fonction indépendante de θ en $(X_1, \dots, X_n)$.

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \times n\theta = \theta$$

$V(\overline{X}_n)$ existe et vaut $\frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{n^2}$ par indépendance des X_i

$$= \frac{\theta}{n}$$

$\forall \theta > 0,\ \varphi'(\theta) = 1$ car $\varphi(\theta) = \theta$

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}$$