Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie I. Autour de l'adjoint.

1. Soit $x \in E$. Soit $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Notons M la matrice de ℓ dans la base canonique de $\mathbb{R}$. On a en effet, $M \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Notons X le vecteur représentant x. On a :

$MX \in \mathbb{R}$. MX représente $\ell(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}$.

On a ainsi, comme $M \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$:

$$\ell(x) = \langle M, X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \ell(e_1) \\ \vdots \\ \ell(e_n) \end{pmatrix}, X \right\rangle$$

Notons alors a_0 le vecteur représentant M. On a bien :

$$\ell(x) = \langle a_0, x \rangle$$

Par unicité de la matrice dans $\mathcal{B}_E$, on a que :

a_0 est unique.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. Soit $y \in E$. Notons $v : E \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto \langle u(x), y \rangle_E$

Par linéarité du produit scalaire, on a que $v \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
Par la question précédente :

$\forall x \in E, \exists! z_y \in E \,/\, v(x) = \langle z_y, x \rangle_E$. c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle z_y, x \rangle_E.$$

3. Soit $(x, x') \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in E$:

$\exists! z_{x_1+\lambda x'} \in E \,/\, \langle u(x), x_1+\lambda x_2 \rangle = \langle z_{x_1+\lambda x_2}, x_1+\lambda x_2 \rangle$.

Par bilinéarité du produit scalaire, pour ce vecteur $z_{x+\lambda x'}$:

$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x_1 \rangle + \lambda \langle u(x), x_2 \rangle = \langle z_{x_1+\lambda x_2}, x_1 \rangle + \lambda \langle z_{x_1+\lambda x_2}, x_2 \rangle$.

En appliquant (2), $\exists! (z_{x_1}, z_{x_2}) \in E^2$ tels que :

$$\langle z_{x_1}, x_1 \rangle + \lambda \langle z_{x_2}, x_2 \rangle = \langle z_{x_1+\lambda x_2}, x_1 \rangle + \lambda \langle z_{x_1+\lambda x_2}, x \rangle$$

Soit :

$$\langle z_{x_1} + \lambda z_{x_2} - z_{x_1+\lambda x_2}, x_1 + \lambda x_2 \rangle = 0.$$

Considérant l'application de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ nulle, on a, par (2) qu'il existe un unique $u_0 \in E \,/\, \langle u_0, x_1 + \lambda x_2 \rangle = 0$. Et u_0 est le vecteur nul. Par unicité :

$$z_{x_1} + \lambda z_{x_2} = z_{x_1+\lambda x_2}, \quad \text{Soit :}$$

$$u^*(x_1+\lambda x_2) = u^*(x_1) + \lambda u^*(x_2)$$

u^* linéaire

4. Puisque la base $\mathcal{B}_E$ est orthonormée, on a :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad u^*(e_i) = \sum_{j=1}^{p} \langle u^*(e_i), e_j \rangle e_j$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \langle u(e_j), e_i \rangle e_j \quad \text{(déf)}.$$

Puis, en notant $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]}$ le terme général de A, on a comme la base est orthonormée :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad u(e_i) = \sum_{j=1}^{} a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{p} \langle u(e_i), e_j \rangle e_j$$

Ainsi, en notant $a'_{ij} = {}^tA$:

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \; u^*(e_i) = \sum_{j=1}^{} a'_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{} a_{ji} e_j.$$

Ainsi, par lecture des coordonnées :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u^*) = {}^tA.$$

On a donc :

- $$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}({}^tA) \underset{\substack{\text{une matrice et} \\ \text{sa transposée ont même} \\ \text{rang}}}{=} \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u).$$

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}((u^*)^*) = {}^t({}^tA) = A$. Par unicité de la représentation matricielle :

$$(u^*)^* = u.$$

5. Soit $(x,y) \in \mathrm{Im}(u^*) \times \ker(u)$. $\exists z \in E \,/\, x = u^*(z)$. On a :

- $\langle x, y \rangle = \langle u^*(z), y \rangle = \langle z, u(y) \rangle = 0$. Ainsi :

$$x \in \ker(u)^{\perp}$$

$$\mathrm{Im}(u^*) \subset \ker(u)^{\perp}.$$

- $\dim(\ker(u)^{\perp}) = n - \dim(\ker(u)) = \mathrm{rg}(u)$ (théorème du rang) $= \mathrm{rg}(u^*)$

Ainsi, par égalité de dimension et inclusion :

$$\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp .$$

6. Soit $x \in E$.

- Si $x \in \ker(u)$, alors $u^* \circ \underbrace{u(x)}_{0} = 0$. Ainsi :

$$\ker(u) \subset \ker(u^* \circ u).$$

- Si $x \in \ker(u^* \circ u)$, alors :
$\forall y \in E,\ \langle u^* \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = 0$. On a alors :

$$u(x) \in \mathrm{Im}(u) \text{ et } u(x) \in \mathrm{Im}(u)^\perp .$$

$$u(x) = 0 . \quad x \in \ker(u).$$

Par double inclusion :

$$\ker(u) = \ker(u^* \circ u).$$

On remarque qu'on a déjà $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^*)$. De plus

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(u^*)) &= \dim(\ker(u)^\perp) = n - \dim(\ker(u)) \\ &= n - \dim(\ker u^* \circ u) \\ &= \mathrm{rg}(u^* \circ u) \quad \text{par le théorème du rang}\end{aligned}$$

Par égalité de dimensions :

$$\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u).$$

7. - Comme $u^* \circ u$ est linéaire et à valeurs dans $\mathrm{Im}(u^*)$, w est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(u^*)$.

- Soit $x \in \ker(w)$. On a que $x \in \mathrm{Im}(u^*)$ et $w(x) = u^* \circ u(x) = 0$. Ainsi, $x \in \ker(u)$. (par (6)).
Or :

$$\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp, \text{ donc } x \in \ker(u) \text{ et } x \in \ker(u)^\perp.$$

$$x = 0_E .$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 **Nombre de pages :** 20 **Session :** 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES I Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

7. Il suit donc que $\ker(w) = \{0_E\}$. Donc :

w isomorphisme de $\mathrm{Im}(u^*)$ dans lui-même.

On interprète matriciellement comme suit :

$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \exists!\, Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ /\ {}^tAX = {}^tAAY.$

On peut poser $Z = {}^tAX \in \mathrm{Im}({}^tA)$, $Z \in \mathrm{Im}(u^*)$.

8.a. • Soit $x_1 \in E$. On a : $\pi(x_1) = y \in \mathrm{Im}(u)$.
On a alors :

$u^* \circ \pi(x_1) \in \mathrm{Im}(u^*)$.

• Soit $x_2 \in \mathrm{Im}(u^*)$. On a que $x_2 \in \mathrm{Im}(w)$
$\exists!\, y' \in \mathrm{Im}(u^*) \ /\ u^* \circ u(y') = x_2$. Or, comme
$u(y') \in \mathrm{Im}(u)$:

$x_2 = u^* \circ \pi \circ u(y')$ car $\pi(u(y')) = u(y')$.

$x_2 \in \mathrm{Im}(u^* \circ \pi)$.

On a donc l'égalité :

$\mathrm{Im}(u^* \circ \pi) = \mathrm{Im}(u^*)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8. b. On a à considérer une base adaptée de F où l'écriture $Im(\pi) \oplus \ker(\pi) = F$. Notons $(f_1', \dots f_n')$ cette base. On a :

- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $f_i' \in Im(\pi) = Im(u)$, donc $\pi(f_i') = f_i'$
- $\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $f_i' \in \ker(\pi)$.

(Avec $r = rg(u)$). La matrice de π, dans cette base est :

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = diag(\underbrace{1, \dots 1}_{r \text{ fois}}, 0 \dots 0)$$

Donc, $Tr(Q') = r$. Or, comme Q et Q' sont semblables, on a :

$$Tr(Q') = Tr(Q) = r = rg(u).$$

9. Montrons que $rg(A) = rg(M)$. On a :

- $rg(M) = rg({}^tAA) = rg(u^* \circ u) = rg(u^*)$ (par 6).
- $rg(u^*) = rg({}^tA) = rg(A)$. (deux matrices, l'une étant la transposée de l'autre, on même rang).

On a $rg(M) = rg(A)$.

$[rg(M) = p] \iff [M \text{ inversible}]$ (car $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$)

$[rg(A) = p] \iff [M \text{ inversible}]$.

10. a. Reprenons l'égalité matricielle de (7). On a :

$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \exists! Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) / {}^tAX = MY$. On a alors :

$$Y = (M^{-1})\,{}^tAX.$$

Enfin, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \exists ! Y' \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ QX = AY'$.

$$ {}^tAQX = {}^tAX = MY' .$$

Ainsi : $Y' = (M^{-1}) {}^tAX$. Donc :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ QX = A(M^{-1}){}^tAX .$$

D'où :

$$Q = A(M^{-1}){}^tA .$$

10. b. On a :

```
def Calcule_Q(A):
    if al.matrix_rank(A) != np.shape(A)[1]:
        return "err"
    else :
        M = np.dot(np.transpose(A), A)
        return np.dot(A, np.dot(al.inv(M), np.transpose(A)))
```

11. M est symétrique réelle. (Par le théorème spectral, elle est diagonalisable dans le groupe orthogonal). Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tXMX = {}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2 \geq 0 .$$

* * *

Partie II. Minimisation d'une fonction quadratique.

12. Soit $(X,H) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$.

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|AX+AH-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2.$$

$$= \frac{1}{2}\langle AX-Y, AX+AH-Y\rangle + \frac{1}{2}\langle AH, AX+AH-Y\rangle$$

$$- \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\langle AX-Y, AH\rangle - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2 + \frac{1}{2}\langle AH, AX-Y\rangle$$

$$- \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2 + \|AX-Y\|^2 + \frac{1}{2}\langle AH, AH\rangle$$

$$= \langle AX-Y, AH\rangle + \frac{1}{2}\langle AH, AH\rangle$$

(définition du produit scalaire canonique) $= {}^tH({}^tAAX - {}^tAY) + \frac{1}{2}{}^tH{}^tAAH$

$$= {}^tHD(X) + \frac{1}{2}{}^tHMH = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}{}^tHMH.$$

13. • Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

• Supposons J_0 possède un minimum global en X. On a :
$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(X) \leq J_0(X+H)$.

Ainsi :
$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}{}^tHMH \geq 0.$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ J_0(X - \lambda D(X)) - J_0(X) = -\lambda\|D(X)\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}{}^tD(X)MD(X) \underset{\lambda\to 0}{=} -\lambda\|D(X)\|^2 + o(\lambda)$

Pour λ suffisamment petit $J_0(X-\lambda D(X)) < J_0(X)$, ce qui n'est possible que si $D(X) \neq 0$. Par contraposée : $D(X) = 0$

• Réciproquement, si $D(X) = 0$:

$\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}{}^tHMH \geq 0$ par (11.)

J_0 possède un minimum global en X

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I Approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

14. Par (I.7), $u^* \circ u$ est un isomorphisme de $\mathrm{Im}\, u^*$:

$$\exists !\, X_0 \in \mathrm{Im}\, u^* = \ker u^{\perp} \mid u^* \circ u\,(X_0) = {}^tAY \qquad (*)$$
$$= \ker A^{\perp}$$

Mais alors :

$$D(X_0) = MX_0 - {}^tAY = {}^tAY - {}^tAY = 0.$$

Ainsi $\{X_0\} \subset \mathbb{S}_0 \cap \ker(A)^{\perp}$.

Réciproquement, on a bien $\mathbb{S}_0 \cap \ker(A)^{\perp} \subset \{X_0\}$ par unicité de X_0 dans la relation $(*)$:

$$\underline{\mathbb{S}_0 \cap \ker A^{\perp} = \{X_0\}}$$

15. a. <u>Soit $X \in S_0$.</u> On a que

$$D(X) = MX - {}^tAY = 0.$$

Ainsi, $MX = {}^tAY$, ${}^tAAX = {}^tAY$. Puis, par (8.a) : ${}^tAAX = {}^tAQY$. Donc :

$${}^tA(AX - QY) = 0. \text{ Ainsi, } AX - QY \in \ker({}^tA).$$

Mais aussi,

$$AX - QY \in \ker(A) = \ker({}^tA)^{\perp}.$$

Donc, $AX - QY = 0$. On a :

$$\underline{QY = AX.}$$

15. b. On a :

. $AX_0 = QY$ car $X_0 \in S_0$. Ainsi :

. $A(X - X_0) = QY - QY = 0$,

$$X - X_0 \in \ker(A).$$

Puis, si $X \neq X_0$, $X = \underbrace{X_0}_{\in \ker(A)^\perp} + \underbrace{X - X_0}_{\in \ker A}$. Par le théorème de Pythagore :

$$\|X\| = \|X_0\| + \underbrace{\|X - X_0\|}_{>0}, \text{ soit :}$$

$$\|X\| > \|X_0\|$$

15. c. • $\underline{\text{Si } rg(A) = p}$ alors M inversible. Dans ce cas :
$Q = A(M^{-1})^t A$. Par 15. b :

$$AX = A(M)^{-1} {}^tAY,$$

En multipliant par A^{-1}.

$$X = M^{-1} {}^tAY.$$

• Puis si $rg(A) = p$, on a $\ker(M) = \{0\}$. Donc :
$M(X - X_0) = {}^tA(A(X - X_0)) = 0 \implies \underline{X - X_0 = 0}$.

$$X = X_0. \text{ On a donc :}$$

$$\underline{S_0 \cap \ker(A)^\perp = \{X\}}.$$

Puis, comme $\ker(A)^\perp = \ker(M)^\perp = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ car M inversible :

$$S_0 = \{X\}.$$

10. a. X est défini par (4). De ce fait.

$$AX = QY.$$

Ainsi, $T = \|AX - AU_0\|^2 \underset{\substack{AU_0 \in \mathrm{Im}(A), \\ QAU_0 = AU_0}}{=} \|QY - QAU_0\|^2$

$= \|Q(Y - AU_0)\|^2 = \|QZ\|^2.$

$= {}^tZ\,{}^tQQ\,Z \underset{\substack{Q \text{ symétrique} \\ \text{(matrice de projecteur orthogonale)}}}{=} {}^tZQ^2Z \underset{Q \text{ projecteur.}}{=} {}^tZQZ.$

16. b. On utilise la fonction Calcule_Q (10. b). On a:

```
def simuleT(A, sigma):
    n = np.shape(A)[0].
    Z = rd.normal(0, sigma**2, n)
    Q = Calcule_Q(A)
    return np.dot(np.transpose(Z), np.dot(Q, Z))
```

16. c. On a:

```
def esperance(A, sigma):
    Samp = np.array([simuleT(A, sigma) for _ in range(10000)])
    return np.sum(Samp)/10000
```

16. d. On peut conjecturer que $\mathbb{E}(T) = \mathrm{rg}\,A = p$.

16. c. On a :

- $E(Z_1^2) = V(Z_1) = \sigma^2$ (car Z_1 centrée),
- $E(Z_1^3)$ existe bien car Z_1 admet des moments de tous ordres. Calculons $E(Z_1^3)$. On a :

$E(Z_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dt$. En posant le changement de variable affine $u = \frac{t}{\sigma}$, on a, par le théorème de changement de variable :

$$E(Z_1^3) = \frac{\sigma^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

~~Soit $A > 0$. $\int_{-A}^{A} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \left[u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\right]_{-A}^{A} - 2\int_{-A}^{A} u e^{-\frac{u^2}{2}} du$. (par intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 sur $[-A, A]$) En faisant tendre A vers $+\infty$:~~

~~$\int_{-A}^{A} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} du =$~~

Mais comme $u \mapsto u^3 e^{-\frac{u^2}{2}}$ impaire, on a :
$\int_{-\infty}^{+\infty} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0 = E(Z_1^3)$.

- On admet que $\mathbb{E}(Z_1^4) = 3\sigma^4$

16. d. • On conjecture que pour $\sigma = 1$, $E(T) = rg(A_i) \times \sigma$

- On conjecture que pour les cas présentés :

$$E(T) = rg(A_i) \times \sigma^2$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 20 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I Approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16. f. Développons la forme quadratique ${}^tZQZ$. On a :

- $T = {}^tZQZ = \langle Z, QZ\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geq i}^{n} Q_{i,j} z_i z_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} Q_{i,j} z_i z_j$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} Q_{i,j} z_i z_j$$

$$= T_1 + 2T_2.$$

- Toutes les espérances existent. Par linéarité de l'espérance :

$$E(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} E(z_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} Q_{i,j} \underbrace{E(z_i z_j)}_{= E(z_i)E(z_j) = 0 \text{ par indépendance}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\, \sigma^2 = Tr(Q) \times \sigma^2.$$

- Comme $Tr(Q) = rg(A)$, nos conjectures sont valides. En effet, $rg(A_1) = 2$, $rg(A_2) = 3$, $rg(A_4) = 5$.

16. g.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16.h. Il vient :

$$E(T_1^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 \times \sum_{j=1}^{n} Q_{j,j} z_j^2\right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}^2 z_i^4\right) + E\left(2\sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} \sum_{j>i}^{n} Q_{j,j} z_i z_j\right)$$

$$= E(z_1^4) \times q + 2$$

16.i. On a alors, par la formule de König-Huygens :

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E(T_1^2) + 4E(T_1T_2) + 4E(T_2^2) - E(T)^2$$

$$= \sigma^4(2q + p^2) + 2\sigma^4(p-q) - p^2\sigma^4$$

$$= 2p\,\sigma^4$$

Soit alors $\alpha > 0$. Appliquons l'inégalité de Markov à la variable T^2.

Partie III. Minimisation d'une fonction non-différentiable.

17. Posons $\varphi : t \longmapsto \|u+tv\|$. Comme la fonction norme, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \varphi'(0).$$

Or, par le théorème de la dérivation directionnelle :

$$\varphi'(0) = \langle \nabla g(u), v\rangle \text{ , } g \text{ étant la fonction norme}$$

$$= \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}$$

18. Soit X_0 réalisant le minimum global de J. Supposons $BX_0 \neq 0$. Admis !

19. a. On raisonne comme dans (II.13). $\forall t>0$, $J(X_0-tH)-J(X_0) = -t(\langle D(X_0),H\rangle - \|BH\|) + o(t)$. Pour t petit, $J(X_0-tH)-J(X_0) \geq 0$ ce qui $\underset{t\to 0}{}$ implique $-t(\langle D(X_0),H\rangle - \|BH\|) \geq 0$, soit $\langle D(X_0),H\rangle \leq \|BH\|$

19. b. $\forall X \in \operatorname{Ker} B$, $\langle D(X_0),X\rangle \leq \|BX\| = 0$ et $\langle -D(X_0),X\rangle \leq \|BX\| = 0$
Ce qui n'a lieu ssi :
$\langle D(X_0),X\rangle = 0 \iff D(X_0) \in \operatorname{Ker}(B)^\perp$

19. c. On a que $D(X_0) \in \operatorname{Ker}(B)^\perp$, donc $D(X_0) \in \operatorname{Im}({}^tB)$ en utilisant l'adjoint (I.5). Ainsi :

$$\exists V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,/\, D(X_0) = {}^tBV.$$

19. d. Nous avons $\operatorname{Im}({}^tB) = \operatorname{Im}({}^tBB)$ par (I.6). Il suit donc :

$$\exists V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \,/\, D(X_0) = {}^tBBV.$$

19. c. En posant $H = V$ dans (u) : $\|BV\|^2 \leq \|BV\|$, soit $\|BV\| \leq 1$

On a alors que : $-D(X_0) = -{}^tQBV$, avec $\|BV\| \leq 1$. Puis, comme $\|BX_0\| = 0$:

$$\|BX_0\|BV - BX_0 = 0.$$

Ainsi :

$$-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0).$$

20. a. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$.

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \langle u+v, u+v\rangle - \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle - \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2} = \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

20. b. Admis !

21. a. Par l'inégalité de (20. b) :

$$\|BX_0\|(\|BX\| - \|BX_0\|) = \|BX_0\|(\|BX_0 + B(X - X_0)\| - \|BX_0\|)$$
$$\geq \langle BX_0, BX - BX_0\rangle = \|BX_0\|\langle {}^tBV, X - X_0\rangle$$
$$= \|BX_0\|\langle W, X - X_0\rangle$$

Soit, si $\|BX_0\| \neq 0$:

$$\|BX\| - \|BX_0\| \geq \langle W, X - X_0\rangle$$

21. b. On écrit :

$$J(X) - J(X_0) = \langle D(X_0), X - X_0\rangle + \|BX\| + \|BX_0\|$$

On applique (II-12) pour le même type de calcul.

Puis, en minorant à l'aide de (21. a) :

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

21. b. On a :

$$\underline{J(X) - J(X_0) \geq \langle D(X_0) + W, X - X_0 \rangle}$$

22. • Supposons alors que $-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$.

$\exists V \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ \|V\| \leq 1 \ /\ \|BX_0\| BV - BX_0 = 0$,

$$\underline{\text{où } -D(X_0) = {}^tBV}.$$

Notons $W = {}^tBV$, $W \in \mathcal{N}(X_0)$. On a alors :

$$\underline{J(X) - J(X_0) \geq \langle -D(X_0), X - X_0 \rangle = 0}$$

Ce qui montre que J admet un minimum global en X_0

• Réciproquement, par (18) et (19), on a que
$[J$ admet un minimum global en $X_0] \Rightarrow [-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)]$

Ainsi :

$$\underline{[J \text{ admet un minimum global en } X_0] \Leftrightarrow [-D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)]}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

23. a. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. On a :

$$F(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2 y_i^{-2}}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4}$$

$$= -1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{-2}}{\frac{\lambda^2}{\alpha_i^2} + 2\lambda + \alpha_i^2}$$

Etudions la fonction $\varphi_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda^2}{x^2} + 2\lambda + x^2$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a que φ admet pour minimum 4λ. Ainsi, en majorant :

$$F(\lambda) \leq -1 \; \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{-2}}{1}$$

23. b. F est dérivable sur $[0,+\infty[$. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad F'(\lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2\alpha_i^2 y_i^{-2}}{(\lambda + \alpha_i^2)^3} \leq 0.$$

Ainsi, F est décroissante (strictement) sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $F(0) = f(Y) - 1 > 0$, et :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = -1.$$

Donc, F étant continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]-1, f(Y)-1[$, elle est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur cet ensemble. On a dès lors :

$$\exists! \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^* \; / \; F(\lambda_0) = 0$$

λ_0 étant non nul :

$$0 \leq -1 + \frac{1}{4\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \qquad (23.a)$$

D'où :

$$\lambda_0 \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

23.c. /

23.d.

(i).

```
def FoncSom(alpha, Y, lda):
    F = -1.
    for i in range(len(alpha)):
        F += alpha[i]**2 * Y[i]**2/((lda + alpha[i]**2)**2)
    return F.
```

(ii). On cherche à déterminer λ_0. On a :

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon):
    a = 0
    b = (1/4)* np.sum(Y**2).
    while abs(a - b) >= epsilon:
        if FoncSom(alpha, Y, a) > 0:
            a = (a+b)/2
        elif FoncSom(alpha, Y, b) > 0:
            b = (a+b)/2

    return (a+b)/2
```

(iii). On a :

```
def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):
    beta = 0
    if np.sum[Y**2 / alpha**2] > 1:
        beta = CalcBeta(alpha, Y, epsilon)
    v = np.zeros(n)          # On suppose n connu.
    for i in range(len(alpha)):
        v[i] = (alpha[i]*Y[i]) / (beta + alpha[i]**2)
    D = np.zeros((n,n))
    for i in range(len(alpha)):
        D[i,i] = alpha[i]
    return Y - np.dot(D, v)
```

* * *