Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Math T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1- a) Vérifions que $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ est un polynôme annulateur de A

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{27} + \frac{2}{27} & \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$$A^2 - \frac{4}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{9} \times \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{9} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} I$$

$$A^2 - \frac{4}{3} A + \frac{1}{3} I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

donc on conclue que $x^2 - \frac{4}{3} x + \frac{1}{3}$ est bien un polynome annulateur de A.

b) les valeurs propres possibles de A sont les racines de son polynome Annulateur $P(x) = x^2 - \frac{4}{3} x + \frac{1}{3}$

$P(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3} x + \frac{1}{3} = 0$

$\Delta = \frac{16}{9} - 4 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{16 - 12}{9} = \frac{4}{9}$

$x_1 = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2}$ = $\qquad$ $x_2 = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2}$

$= \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $= \frac{\frac{6}{3}}{2} = \frac{6}{3} \times \frac{1}{2}$

$= 1$

donc on conclue que 1 et $\frac{1}{3}$ sont des valeurs propres possibles de A.

c) $A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+1 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc on a $A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

donc on conclut que 1 est bien une valeur propre de A associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-1 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc on $A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$

donc on conclut que $\frac{1}{3}$ est une valeur propre de A associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 - a) $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3+3 & 9-9 \\ 1-1 & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I$$

b) on a $P \cdot Q = 9I$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \cdot P \cdot Q = I$

$\Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~

donc on conclut que P est inversible
et $P^{-1} = \frac{1}{9} Q$

c) $A \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \times 3 + 1 & \frac{2}{3} \times 3 - 1 \\ \frac{1}{9} \times 3 + \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \times 3 - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$P \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \times \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donc on conclut que $AP = PD$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Math T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

on a $AP = PD$

$\Leftrightarrow A = P.D.P^{-1}$

avec P une matrice inversible et D une matrice Diagonale

donc on conclut que A est une matrice Diagonalisable.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$, mq $A^n = P.D^n.P^{-1}$

<u>Initialisation</u>:

pour $n=0$, $A^0 = I$ et $P.D^0.P^{-1} = P.P^{-1} = I$

donc on conclut que la proposition est vraie pour $n=0$

<u>Hérédité</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$,

on suppose que $A^n = P.D^n.P^{-1}$ et on montre que $A^{n+1} = P.D^{n+1}.P^{-1}$

on a $A^{n+1} = A^n.A$

$= P.D^n.P^{-1}.A$ (d'après Hypothèse de récurrence)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= P.D^n.P^{-1}.P.D.P^{-1}$ (d'après 2.c)

$= P.D^n.I.D.P^{-1}$

$= P.D^{n+1}.P^{-1}$

Conclusion :

D'après le principe de la récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$A^n = P.D^n.P^{-1}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = P.D^n.P^{-1}$

avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$ car matrice Diagonale

$$P.D^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

donc $A^n = P.D^n.P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3+3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 9-9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3+3.\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

3 - a) soit $n \in \mathbb{N}$

on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} U_n + V_n \\ \frac{1}{9} U_n + \frac{2}{3} V_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$

$= A \cdot X_n$

donc on conclut que $X_{n+1} = A \cdot X_n$

b) soit $n \in \mathbb{N}$, mq par récurrence que $X_n = A^n \cdot X_0$

Initialisation:

~~pour $n=0$ $\cancel{X_0}$ et $\cancel{A}$.~~

pour $n=0$, on a X_0 et $A^0 \cdot X_0 = X_0$

donc $X_0 = X_0$

donc la proposition est vraie pour $n=0$

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$,

on suppose que $X_n = A^n \cdot X_0$ et on montre que $X_{n+1} = A^{n+1} \cdot X_0$

on a $X_{n+1} = A \cdot X_n$ (qst précédente)

$= A \cdot A^n \cdot X_0$ (d'après H Recurrence)

$= A^{n+1} \cdot X_0$

<u>conclusion:</u>

d'après le principe de la récurrence on conclut

que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ X_n = A^n \cdot X_0$

c) ~~on a~~ $\cancel{A^n}$

soit $n \in \mathbb{N}$,

on a $A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$

or $X_n = A^n \cdot X_0$

$\Leftrightarrow X_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$\cancel{\Leftrightarrow X_n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3u_0+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u_0 + 9u_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}v_0 \\ u_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}u_0 + 3v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}v_0 \end{pmatrix}}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)u_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)v_0 \\ \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)v_0 \end{pmatrix}$

donc $u_n = \frac{1}{6}u_0\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6}v_0\left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)$

et $v_n = \frac{1}{6}u_0\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) + \frac{1}{6}v_0\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Math T

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

c)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}u_0\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{1}{6}v_0\left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)$$

$$= \frac{1+2}{6}u_0 + \frac{9}{6}v_0$$

$$= \frac{1}{2}u_0 + \frac{3}{2}v_0 = \frac{u_0+3v_0}{2}$$

$$\left(\text{car } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0\right)$$

$$\text{car } -1 < \frac{1}{3} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6}u_0\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) + \frac{1}{6}v_0\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{6}u_0 + \frac{1}{3}v_0$$

$$= \frac{u_0+2v_0}{6}$$

$$\left(\text{car } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = 0\right.$$

$$\text{car } -1 < \frac{1}{3} < 1$$

on peut dire qu'il y a une survie que ce soit pour les enfants et pour les adultes.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) a) la clé primaire qui peut être choisie pour la table animaux est Espèce, cela va

permettre une meilleur differenciation des animaux disponible puisqu'ils sont unique par leur espèces.

b) Select Type
From Alimentation;

c) Select Espèce
From Animaux
where categorie = adulte and Effectif >= 6 ;

d) Select Espèce, effectif

From Animaux, Alimentation
where

5) a) soit $n \in \mathbb{N}$, mq (w_n) est une suite géometrique

on a $w_{n+1} = r w_n + w_n$

et ~~$w_n = r w_{n+1}$~~ . $w_n = w_{n+1} - r w_n$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{r w_n + w_n}{w_{n+1} - r w_n}$$

$$= \frac{w_n (r+1)}{r w_n + w_n - r w_n} = \frac{w_n (r+1)}{w_n} = r + 1$$

donc on conclue que (w_n) est une suite géométrique

de raison $q = r + 1$

w_n en fonction de n ;

$w_n = w_0 \cdot (q)^n$

$= w_0 \cdot (r+1)^n$

c) 1^{er} cas : $r \in [-1, 0[$

$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_0 (r+1)^n$

dans ce cas $-1 \leq r < 0$

$\Rightarrow -1 < 0 \leq r+1 < 1$

$\Rightarrow -1 < r+1 < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_0 (r+1)^n = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{n \to +\infty} (r+1)^n = 0 \\ \text{puisque } -1 < r+1 < 1 \end{array} \right.$

si $r \in [-1, 0[$, cela signifie que

la population ~~va~~ ne varie pas (en survie)

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

2^e cas : si $r = 0$

~~ffff~~ dans ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} w_0 (r+1)^n = w_0$

car $r = 0$

et si $r = 0$, cela veut dire que la population

reste comme elle était à l'instant initiale

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = w_0$

~~Si~~

<u>Si $r > 0$:</u>

~~la limite existe et il y a deux cas~~

~~si $r \in]0, 1[$~~

~~donc ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{+\infty} w_0 (r+$~~

alors $r > 0$

donc $r + 1 > 1$

dans ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} w_0 (r+1)^n = +\infty$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{car } \lim\limits_{n \to +\infty} (r+1)^n = +\infty \\ \text{car } r+1 > 1 \end{array} \right.$

donc si $r > 0$, ce cas signifie que la population croît à une grande échelle (explosion de la population).

b) on a choisit la modelisation de $r \in [-1, +\infty[$ pour que la limite de w_n existe toujours en $+\infty$, autrement

il y aura toujours variation de la population même nulle (car $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ n'existe pas si $r \leq -2$)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages : 24

Session : 2025

Épreuve de : Math T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

suite 5-c)

oui on peut conclure que le modèle proposée est ~~toujours~~ réaliste puisque la limite de u_n existe toujours en plus l'infini, c'est à dire qu'il y'a toujours une variation de la population.

6) a)-i) soit $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha x \cdot (1 - \frac{1}{\beta} x) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha x - \frac{\alpha}{\beta} x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(\alpha - \frac{\alpha}{\beta} x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\alpha - \frac{\alpha}{\beta} x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\frac{\alpha}{\beta} x = \alpha$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \alpha \times \frac{\beta}{\alpha}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \beta$

donc on conclue que $\{0, \beta\}$ sont les solution de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha x\left(1-\frac{1}{\beta}x\right) = -\infty$

car $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\beta}x = -\infty \right.$ et $\left. \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha x = +\infty \right)$

x	0 $\qquad\qquad$ β
$f(\cdot)$	0

$\cancel{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = \cancel{\lim\limits_{x\to}}$

b) i) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$g(x)=0$

$\Leftrightarrow x+f(x)=0$

$\Leftrightarrow x+\alpha x-\frac{\alpha}{\beta}x^2=0$

$\Leftrightarrow x\left(1+\alpha-\frac{\alpha}{\beta}x\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $1+\alpha-\frac{\alpha}{\beta}x=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\frac{\alpha}{\beta}x=1+\alpha$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=(1+\alpha)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\frac{\beta+\beta\alpha}{\alpha}$

donc on conclut que $x=0$ et $x=\frac{\beta+\beta\alpha}{\alpha}$

sont les solution de l'équation $g(x)=0$

$g(x) = x$

$\Leftrightarrow \quad x + \alpha x - \frac{\alpha}{\beta} x^2 = x$

$\Leftrightarrow \quad \alpha x - \frac{\alpha}{\beta} x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x\left(\alpha - \frac{\alpha}{\beta} x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = 0$

donc les solution de $g(x) = x$ sont les solutions de $f(x) = 0$

donc les solutions de $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$

sont $\{0, \beta)$

$g(x) = \beta$

$\Leftrightarrow \quad x + \alpha x - \frac{\alpha}{\beta} x^2 = \beta$

$\Leftrightarrow \quad x\left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{\beta} x\right) = \beta$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{x\left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{\beta} x\right) - \beta = 0}$

$\Leftrightarrow \quad x = \beta$ ou $1 + \alpha - \alpha x = \beta$

$\Leftrightarrow \quad x = \beta$ ou $\alpha x = 1 + \alpha - \beta$

$\Leftrightarrow \quad x = \beta$ ou $x = \dfrac{1 + \alpha - \beta}{\alpha}$

donc $x = \beta$ ou $x = \dfrac{1 + \alpha - \beta}{\alpha}$

sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de $g(x) = \beta$

iii) Montrer que $\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \leq$

Exercice 2:

2) $X_1(\Omega) = (-1, 1)$

$P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ (si dans l'urne contenant une seule boule il y a un nombre inferieur ou Egal à 1

$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$

$E(X_1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

3) $\cancel{X_2(\Omega) = \{-2, -2, 1, 2\}}$

$X_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$P(X_2 = -2) =$

4) l'ensemble des valeurs prise par la variable X_k sont inclus dans $[0, n]$ car l'urne est graduée de 0 jusqu'a n et on prend une ~~bille~~ ~~valeur~~ urne contenant de 0 bille (minimum de l'urne) jusqu'a n (la valeur maximale de l'urne).

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 885	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Math T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3:

1) · Positivité:

sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f_0(t) = 0 \geq 0$

sur $[0,1]$, $f_0(t) = (\alpha+1) . t^\alpha \geq 0$

puisque $\alpha \geq 1$

donc on conclue que $f_{(0)}$ est positive sur $\mathbb{R}$.

continuité par morceau:

. Sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f_0(t) = 0$ est continue en tant que fonction nulle

. sur $[0, 1]$, $f_0(t) = (\alpha+1) . t^\alpha$ est continue en tant que fonction polynomiale

donc on conclue que $f_{(0)}$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}$.

sauf peut être en 0 et 1

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$:

~~$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha+1) \cdot A$~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dt + \int_{0}^{1} (\alpha+1) \cdot t^{\alpha} + \int_{0}^{+\infty} 0 \, dt$$

$$= \alpha+1 \cdot \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1$$

$$= \left[t^{\alpha+1} \right]_0^1 = 1^2 - 0 = 1$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$:

donc on conclue que la fonction f_0 peut être considéré comme une densité de probabilité.

2-a)

• $f_0'(t) = (\alpha+1) \times \alpha \times t^{\alpha-1}$

$\cancel{= \alpha^2 + \alpha} \quad = (\alpha+1) \times \alpha \, t^{\alpha-1}$

b) Mq $f_n = a^n \cdot f_0$, on a $f_n(t) = \begin{cases} t \cdot f_{n-1}'(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

$f_n(t) = 0$ et $a^n \times f_0 = a^n \times 0 = 0$

donc $f_0(t) = f_n(t)$ sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

sur $[0,1]$

$\alpha^n \cdot f_0(t) = \alpha^n \cdot (\alpha+1) \cdot t^\alpha$

$= t \cdot f_{n-1}^{\wedge}(t)$

donc on conclue que $f_n = \alpha^n f_0$

c) on a $f_n = \alpha^n \cdot f_0$ sur $\mathbb{R}$

$$c_n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt = c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^n \cdot f_0$$

$$= c_n \left(\int_{-\infty}^{0} \alpha^n \cdot 0\, dt + \int_0^1 \alpha^n \cdot (1+\alpha) \cdot t^\alpha\, dt \right.$$

$$+ \int_1^{+\infty} 0\, dt = c_n \cdot \int_0^1 \alpha^n \cdot t^{\alpha} \cdot (1+\alpha)\, dt$$

$$= c_n (1+\alpha) \alpha^n \int_0^1 t^\alpha\, dt$$

pour que f_n soit une densité de probabilité il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) = 1$

$$\Leftrightarrow c_n (1+\alpha) \cdot \alpha^n \cdot \int_0^1 t^\alpha\, dt = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_n (1+\alpha) \cdot \alpha^n}{1+\alpha} \cdot \left[t^{\alpha+1} \right]_0^1 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_n \cdot \alpha^n \cdot 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{\alpha^n}$$

donc pour que $f_n \cdot c_n$ soit considéré comme une densité de probabilité il faut que $c_n = \frac{1}{\alpha^n}$

3) Calculons $F_{X\alpha}(x)$ sur $\mathbb{R}$

~~sur~~ si $x \leq 0$:

$$F_{X(\alpha)}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t) \quad dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0 \quad dt = 0$$

si $x \in]0,1]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} (\alpha+1)\,t^{\alpha}\,dt$$

$$= \frac{(\alpha+1)}{\alpha+1} \cdot \left[t^{\alpha+1} \right]_0^x$$

$$= x^{\alpha+1} - 0 = x^{\alpha+1}$$

si $x > 1$:

$$F_{X\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} (\alpha+1) \cdot t^{\alpha}\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$$

$$= \frac{(\alpha+1)}{\alpha+1} \cdot \left[t^{\alpha+1} \right]_0^1$$

$$= 1$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 24	Session : 2025

Épreuve de : Math T

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc $F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\alpha+1} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4) $E(X_\alpha) =$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\alpha(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 (\alpha+1)t^\alpha\,dt + \int_1^{+\infty} 0\,dt}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| \cdot f_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{0} |x| \cdot 0\,dt + \int_0^1 t(\alpha+1) \cdot t^\alpha\,dt + \int_1^{+\infty} x \cdot 0\,dt$$

$$= (\alpha+1)\int_0^1 t^{\alpha+1}\,dt$$

$$= (\alpha+1) \cdot \left[\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^1 = \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+2)} \cdot [1-0]$$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$$

donc ~~$E(X_\alpha)$~~ X admet une esperance

et donc $E(X_\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 . f_0(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 . 0\, dt + \int_0^1 t^2 . (\alpha+1) . t^\alpha\, dt$$
$$+ \int_1^{+\infty} t^2 . 0\, dt$$

$$= \alpha+1 . \int_0^1 t^{2+\alpha}\, dt$$
$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+3} . \left[t^{\alpha+3} \right]_0^1 = \frac{\alpha+1}{\alpha+3}$$

donc X^2 admet une Esperance qui $E(X^2) = \frac{\alpha+1}{\alpha+3}$

donc la variance de X_α existe

et donc $V(X_\alpha) = \frac{\alpha+1}{\alpha+3} - \frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha+2)^2}$

<u>Partie II</u> :

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 f_0 = 1$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} c_0 \times 0 + \int_0^1 c_0 \times e^t\, dt + \int_1^{+\infty} c_0 \times 0\, dt = 1$

$\Leftrightarrow c_0 \int_0^1 e^t = 1$

$\Leftrightarrow c_0 . \left[e^t \right]_0^1 = 1$

$\Leftrightarrow c_0 . (e^1 - e^0) = 1 \Leftrightarrow c_0 (e-1) = 1$

$\Leftrightarrow \quad c_0 = \dfrac{1}{e-1}$

donc pour que la $c_0 f_0$ soit considéré comme

une densité de probabilité il faut que $c_0 = \dfrac{1}{e-1}$

6) ~~E(X)~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t \cdot f_0(t)|\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} |t| \cdot 0 \, dt + \int_0^1 t \cdot e^t \, dt + \int_1^{+\infty} t \cdot 0 \, dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot e^t$$

par partie

on pose $\quad U(x) = t \qquad U'(x) = 1$
$\qquad\qquad V'(x) = e^t \qquad V(x) = e^t$

$$= [\, t \cdot e^t \,]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt$$

$$= e - [\, e^t \,]_0^1$$

$$= e - e + e^0 = 1$$

donc X_0 admet une espérance et donc $E(X_0) = 1$

7)

8) Soit $n \in \mathbb{N}$, n_4 $f_n(t) = P_n(t) e^t$

Initialisation:

pour $n = 0$, $f_0(t)$

Exercice 2 (suite)

8 - a) on reconnait une suite arithmetico-géometrique

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) x$

$\Leftrightarrow \quad x = 1 + x - \frac{2}{n} x$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{2}{n} x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{n}{2}$

c) $x_{k+1} = E(x_{k+1}) - x$

$= 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(x_k) - x$

$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(E(x_k) - x\right)$

$= \left(1 - \frac{2}{n}\right) x_k$

donc $x_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) x_k$

$x_k = \frac{1}{\frac{2}{n}} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n ($

d) $E(x_k) = \frac{n}{2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \cdot \left(E(x_0) - \frac{n}{2}\right)$

9) $\lim_{n \to +\infty} E(x_k) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2} + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \cdot E(x_0) - \frac{n}{2}$

$= \frac{n}{2}$