Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall x \in]n;+\infty[, f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

1)a) g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car ln est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule jamais sur cet intervalle.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln(x)}{x^2}$ par la formule de dérivation d'un produit

$$\boxed{g'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}}$$

Soit $x > 0$.

$1 - \ln(x) \geq 0 \Rightarrow -\ln(x) \geq -1$

$\Rightarrow \ln(x) \leq 1$

$\Rightarrow x \leq e$

On a alors le tableau de variation de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g		$-\infty \nearrow$	$1/e$	$\searrow 0$	

$g(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ par produit car : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

1)b) $\forall k \geq 3$, $\dfrac{\ln(k+1)}{k+1} \geq \dfrac{\ln(k)}{k}$ car $\boxed{k \geq 3}$

i.e $\boxed{k \geq e}$ ($e \approx 2.78$)

↳ donc tous les termes de la suite $\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ sont

situés à droite dans le tableau de variation et que

g est décroissante sur $[e ; +\infty[$.

$\boxed{\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3} \text{ est decroissante}}$

$\forall k \geq 4$, $\dfrac{\ln(k)}{k} \leq \dfrac{\ln(4)}{4}$ car cette suite est décroissante donc majorée par son premier terme

a $\dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{2\ln(2)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2}$ par propriétés sur ln.

$$\boxed{\forall k \geq 4, \ \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2)a) $n \geq 1 > 0$ et $x > n$ (ie $x - n > 0$)

donc $x \mapsto (x-n)\ln(\underset{>0}{x}) - x\ln(\underset{>0}{x-n})$ est

bien définie

f_n est dérivable sur $]n;+\infty[$ par produit, somme et composée de fonctions dérivables sur $]n;+\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]n;+\infty[,$

$$f_n'(x) = \ln(x) + (x-n)\cdot\frac{1}{x} - \left(\ln(x-n) + \frac{x}{x-n}\right)$$

$$f_n'(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$$

$$\boxed{f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}.}$$

b)

$\forall t > 0, \ \ln'(t) = \frac{1}{t}$.

$\forall t > 0, \ \ln''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$.

Donc $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
ie la courbe représentative de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est toujours sous ses tangentes en ses points d'abcisses appartenants à $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(t) \leq \ln'(a)(t-a) + f(a)$

et en $a = 1$:

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(t) \leq t - 1}$ CQFD

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x > n$,

$$f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) - \frac{x}{x-n} + \frac{x-n}{x}$$

$$\leqslant \frac{x}{x-n} - 1 - \frac{x}{x-n} + \frac{x-n}{x}$$ grâce à l'inégalité démontrée et car $\frac{x}{x-n} > 0$.

$$\leqslant \frac{x-n}{x} - 1$$

$$\leqslant \frac{x-n-x}{x}$$

$$\leqslant -\frac{n}{\underbrace{x}_{>0}}$$ car $(x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$.

< 0.

Donc f_n est strictement décroissante sur $]n; +\infty[$ car sa dérivée est strictement négative sur cet intervalle.

c) Soit $n \geqslant 2$.

→ Sur $[n+1, n+2] \subset \mathbb{R}_+^*$,

- f_n est strictement décroissante (q 2b)
- f_n est continue car dérivable sur cet intervalle
- * $f_n(n+1) = (n+1-n)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1-n)$
  $= \ln(n+1) > 0$.
  * $f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$

Or d'après q 1)b) car $n+2 \geqslant 4$ ($n \geqslant 2$), $\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leqslant \frac{\ln(2)}{2}$
D'où :

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\forall n \geq 2$, $f_n(n+2) \leq (n+2)\frac{\ln(2)}{2} - (n+2)\ln(2)$

$f_n(n+2) \leq \underbrace{\ln(2)(n+2)}_{>0} \underbrace{\left[\frac{1}{2} - 1\right]}_{<0}$

$f_n(n+2) < 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $[n+1, n+2)$ avec $n \geq 2$.

3) Soit $n \geq 2$. (assez grand donc)

on a $n+1 \leq x_n \leq n+2$ (q2c)

ie $\frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$ $\boxed{n \neq 0}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ car $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

de même $\frac{n+2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

donc Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1}$

ie $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4)a) $\forall n \geq 1$, $f_n(x_n) = 0$

d'où.

$(x_n - n)\ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n) = 0$

ie $-x_n \ln(x_n - n) = -(x_n - n)\ln(x_n)$

ie $\forall n \geq 2 \ \ln(x_n - n) = \frac{1}{x_n}(x_n - n)\ln(x_n)$

4)b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $x_n \geq n$ $+\infty$

ie $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0}$ par croissance comparée

$\cancel{\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n - n) \cdot \frac{x_n}{\ln(x_n)}}$

$\cancel{= \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln(x_n) + \ln\left(1 - \frac{n}{x_n}\right)\right]\frac{x_n}{\ln(x_n)}}$

$\cancel{= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(x_n)} x_n + x_n \frac{\ln\left(1 - \frac{n}{x_n}\right)}{\ln(x_n)}}$

$$x_n - n = \ln(x_n - n) \cdot \frac{x_n}{\ln(x_n)}$$
$$= \ln\left(x_n\left(1 - \frac{n}{x_n}\right)\right) \frac{x_n}{\ln(x_n)}$$
$$= \left[\ln(x_n) + \ln\left(1 - \frac{n}{x_n}\right)\right] \frac{x_n}{\ln(x_n)}$$

$\forall n \geq 2$, $U_n = \cancel{x_n - n - 1} \neq 0$.

$$\cancel{\frac{\ln(1+U_n)}{U_n}} = \frac{\ln(\cancel{x_n - n} - 1 + 1)}{x_n - n - 1} = \frac{\ln(x_n - n)}{x_n - n - 1}$$

$$= \cancel{\frac{\ln(x_n - n)}{x_n\left(1 - \frac{n}{x_n} - \frac{1}{x_n}\right)}}$$

$$= \cancel{\frac{\ln\left(x_n\left(1 - \frac{n}{x_n}\right)\right)}{x_n\left(1 - \frac{n}{x_n} - \frac{1}{x_n}\right)}}$$

$$= \cancel{\frac{\ln(x_n) + \ln\left(1 - \frac{n}{x_n}\right)}{x_n\left(1 - \frac{n}{x_n} - \frac{1}{x_n}\right)}}$$

5)

- $\forall n \geq 2$, $U_n = x_n - n - 1$.

$$\lim U_n = \lim (x_n - n) - 1$$
$$= 0. \qquad (q4b)$$

donc $\boxed{\ln(1+U_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} U_n}$ d'après le cours.

- $\ln(1 + n + U_n) = \ln(x_n)$ or $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$

Par composition À GAUCHE (qui est licite),

$$\boxed{\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

Soit $n \geq 2$.

b) On a avec q4)a)

$\ln(x_n - n) = \ln(U_n + 1)$. or $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(U_n+1)$

et $(x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = (U_n+1) \cdot \dfrac{\ln(U_n+n+1)}{U_n+n+1}$

$\underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{U_n+1}{U_n+n+1} \cdot \ln(n)$

Donc

$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{U_n+1}{U_n+n+1} \cdot \ln(n)$

$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \cdot \ln(n)$ car $U_n + 1 = x_n - n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

et que $U_n + n + 1 = x_n$.

et $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$

On a donc bien

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \ln(n)}$$

6)

~~$\forall n \geq 2$, $\dfrac{\ln(n)}{n} \cdot n^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)\, n^{-1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 34 | **Session :** 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Exercice 3 :

Partie 1 :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2x e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1) • $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ car $\underbrace{\underbrace{-2x}_{\leq 0\ \leq 0} \underbrace{e^{-x^2}}_{\geq 0}}_{\geq 0 \text{ si } x \leq 0} \geq 0$

f est positive sur $\mathbb{R}$

• f est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
→ en tant que la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$
et par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} -2x e^{-x^2} dx$ converge.

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} u e^{-u^2} du$ converge
par un simple changement de variable $x = u^2$
C^1 bijectif strictement monotone.

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ converge
par le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

qui est aussi bijectif C^1 et strictement monotone.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} -2xe^{-x^2}dx$ converge

changement de variable $u=-x$ C^1 bijectif strictement monotone

$\Leftrightarrow \int_{+\infty}^{0} -2ue^{-u^2}du$ converge

$\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} 2ue^{-u^2}du$ converge

changement de variable $x=u^2$. C^1 bijectif strictement monotone

$\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} 2\sqrt{x}\, e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ converge

$\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ converge

On reconnaît $\Gamma(1)=1$ qui est bien définie (convergente car $1\in\mathbb{R}_+^*$)

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1.

. f est bien une densité de probabilité

2) Soit X de densité f. Soit F la fonction de répartition de X.
$X(\Omega)=\mathbb{R}_-$

$\forall x\in\mathbb{R}_-$, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} -2ue^{-u^2}du$

exactement le même changement de variable que q1

$= \int_{+\infty}^{-x} -2ue^{-u^2}du = \int_{-x}^{+\infty} 2ue^{-u^2}du$

10/34

$= 2\int_{x}^{+\infty} u e^{-u^2} du$

changement de variable
$v = u^2$.
$u = \sqrt{v}$
$du = \frac{1}{2\sqrt{v}} dv$ comme q1

$= 2\int_{x^2}^{+\infty} \sqrt{v}\, e^{-v} \frac{1}{2\sqrt{v}} dv$

$= \int_{x^2}^{+\infty} e^{-v} dv$

$= \lim_{A\to+\infty} [-e^{-v}]_{x^2}^{A} = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A} + e^{-x^2}$
$= e^{-x^2}$.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ e^{-x^2} \text{ si } x \leq 0 \end{cases}}$$

3) une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $N(0, \frac{1}{2})$ peut être :

$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \sqrt{2} . e^{-\frac{(\frac{x}{1/\sqrt{2}})^2}{2}}$

$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{2}x)^2\right)$

$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{2}x^2\right)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)}$$

4) X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} \cancel{t} f(t)\,dt$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} |t| f(t)\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} \underbrace{-t}_{\text{car } t \leq 0} f(t)\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 2t^2 \exp(-t^2)\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 \exp(-t^2)\,dt$ converge car $t \mapsto 2t^2\exp(-t^2)$ est paire sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi}\, t^2 \exp(-t^2)\,dt$ converge.

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sqrt{\pi}\, t^2 k(t)\,dt$

Or on reconnait le moment d'ordre 2 d'une variable suivant la loi $N(0, \frac{1}{2})$ cf. q4) et cette variable admet bien une variance (loi usuelle)

D'où :

$E(X) = 2\sqrt{\pi}\, E(K^2)$ avec $K \hookrightarrow N(0, \frac{1}{2})$.

Or $E(K^2) = V(K) + E(K)^2$ par la formule de Koenig Huygens.

$= \frac{1}{2} + 0.$

$= \frac{1}{2}.$

D'où $E(X) = 2\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$.

$\boxed{E(X) \text{ existe et } E(X) = \sqrt{\pi}}$

$Z = X^2$.

9) $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ G(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x)$

$G(x) = P(|X| \leq \sqrt{x})$

$G(x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+\ G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \; G(x) = 1 - e^{-(\sqrt{x})^2} = 1 - e^{-x}$.

On reconnaît la fonction de répartition d'un loi exponentielle de paramètre 1

$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

6) X^2 admet une espérance car Z admet une espérance (loi usuelle) et que $X^2 = Z$.
Donc X admet un moment d'ordre 2 et
$E(X^2) = E(Z) = 1$.

Par la formule de Koenig Huygens :
X admet une variance et
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) = 1 - \underbrace{\pi}_{94}$.

$\boxed{V(X) \text{ existe et vaut } 1 - \pi}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7)

```
def simulX(n):
    M = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        M[i] = rd.exponential(1)
    return(M).
```

```
def EsperanceX(n):
    S = 0
    for i in range(n):
        S = 0 + simulX(n)[i]
    return (S/1000)
```

Partie 2 :

8) . h est positive sur $\mathbb{R} \setminus [0;1]$ en tant que la fonction nulle

. sur $[0;1]$: $x-1 \in [0;1]$ donc $2(1-x)$ est positive sur cette intervalle

$\rightarrow$ Donc h est positive sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ h est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1 (fonction nulle continue sur $\mathbb{R} \setminus [0;1]$ et comme fonction polynomiale sur $[0;1]$).

$\rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$ converge

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 2(1-x)\,dx$ converge

or $x \mapsto 2(1-x)$ est C^0 sur $[0;1]$ donc l'intégrale converge.

$$\int_0^1 2(1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2} - 0 + 0\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$\hookrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 1}$$

donc h est une densité de probabilité

9) $\forall x \in [0;1]$, $H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$

$$= \int_0^x h(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 2(1-t)\,dt$$

$$= 2\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$= 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= 2x - x^2.$$

$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 1 \\ 2x - x^2 \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

Soit $(Y_1 \ldots Y_n)$ iid suivant la loi de X (donc de densité h)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\max(Y_1 \ldots Y_n) = M_n$.

$T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

10) Commençons par la fonction de répartition de M_n nommée M.

$\forall i \in [\![1;n]\!]$,

$X_i(\Omega) = [0;1]$.

- $\forall x \in [0;1]$, $M(x) = P(\max(Y_1 \ldots Y_n) \leq x)$

$$= P\left(\bigcap_{i=1} [Y_i \leq x]\right)$$

par mutuelle indépendance

$$= \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} H(x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} 2x - x^2 = \prod_{i=1}^{n} H(x) = (H(x))^n$$

$$M(x) = \begin{cases} (2x - x^2)^n \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

- $(M_n - 1)(\Omega) = [-1;0]$ donc

$T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)(\Omega) = \mathbb{R}_-$

$\forall x \in \mathbb{R}_-$, $F_n(x) = P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$

$$F_n(x) = P\left(M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

$$F_n(x) = P\left(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$

$$F_n(x) = M\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$

$$\boxed{F_n(x) = \left[H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right]^n.}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) Soit $y \in \mathbb{R}$. On prend n assez grand pour que $y < n$.

$\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\underbrace{1+\frac{y}{n}}_{>0}\right)\right)$

car $y < n$.

$\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{y}{n}$ car $\frac{y}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$n.\frac{y}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} y$ donc $\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{y}{n}\right) = y$.

donc $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1+\frac{y}{n}\right)\right) = \exp(y)$ par continuité de exp sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^y}$$

~~12) Soit n assez grand.~~
~~$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \exp\left(\ln\left(n\left(1+\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)\right)$~~

12) • si $x \leq 0$ (ie $0 \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \leq 1$):

$F_n(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{n}} - \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2$

$= 2 + \frac{2x}{\sqrt{n}} - 1 - \frac{2x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\boxed{\text{si } x > 0 :}$

alors $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} > 1$

donc

- $F_n(x) = 1$ si $1 + \frac{x}{\sqrt{n}}$ 1 (dans ce cas $F_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$)

- or $F_n(x) = 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{n}\right)$

$$= 2 + \frac{2x}{\sqrt{n}} - 1 - \frac{2x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{n}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$\boxed{\text{Donc si } x > 0, \quad F_n(x) \longrightarrow 1.}$

$\boxed{\text{si } x < 0}$: $F_n(x) = \left(H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

alors

$1 + \frac{x}{\sqrt{n}} < 1.$

$\cancel{\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0}$

$F_n(x) =$

Problème

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

P_n : « $B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}$ »

→ Initialisation

$$\prod_{k=1}^{0} \frac{k+0}{4k} = 1 \text{ (énoncé)}$$

et $\frac{1}{4^0}\binom{0}{0} = 1 = B_0$.

donc P_0 vérifiée

→ Hérédité : Supposons que P_n est vérifiée pour un certain n. Montrons que P_{n+1} est vraie.

$$B_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n+1}{4k} = \prod_{k=1}^{n} k+n.$$

Partie 1

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} = \frac{(1+n)(2+n)+\dots(n+n)}{4^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n!}$$

$$= \frac{1}{4^n} \frac{\frac{2n!}{n!}}{n!} = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{2n!}{n!\,n!}$$

$$= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

$$= B_n.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}}$

```
def B(n):
    p = 1
    for k in range(n):
        p = p *((i + n)/(4*i))
    return p.
```

Partie 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, dt$

$t \mapsto \sin(t)^n$ est continue sur $[0; \pi/2]$ donc W_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^0 dt$

$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$

$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2}}$

- $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt$

$= [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = -\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\cos(0)}_{1}$

$\boxed{W_1 = 1}$

3) $\forall n \geq 0, \forall t \in [0; \pi/2], \sin(t)^{n+1} = \sin(t)^n . \sin(t)$

$\leq \sin(t)^n$

car $\boxed{\sin(t) \leq 1}$

Donc par croissance de l'intégrale :

$\forall n \geq 0, \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} dt \leq \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$ donc

$(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4) Soit $n \geq 0$.

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(t)^{n+1}}_{u} \cdot \underbrace{\sin(t)\,dt}_{v'}$$

On définit sur $[0; \pi/2]$, deux fonctions de classe C^1 sur cet intervalle

- $u(t) = \sin(t)^{n+1}$
- $v(t) = -\cos(t)$

Par intégration par partie :

$$\forall n \geq 0, W_{n+2} = \left[-\sin^{n+1}(t)\cdot\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(t)(n+1)\sin^n(t)\cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (n+1)(1-\sin^2(t))\sin^n(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(t)\,dt - \int_0^{\pi} (n+1)\sin^{n+2}(t)\,dt$$

d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{2n}$

ie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+n+1)W_n = (n+1)W_n$

$$\boxed{\text{ie } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+2)W_n = (n+1)W_n}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5)

$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = W_{2n-2+2} = \frac{2n-2+1}{2n} W_{2n-2}$

$= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4}$ de proche en proche

$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n\ (2n-2)(2n-4)} \cdots W_{2n-6}$

on rajoute les termes pairs

$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{2n(2n-2)\cdots 2^n(n(n-1)(n-2)\ldots 1)} \cdots \underbrace{W_0}_{\text{pair}} = \frac{\pi}{2}$

$= \frac{2n!}{2^n \cdot 2n(2n-2)\cdots n!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$= \frac{2n!}{2^n 2^n n! n!} \cdot \frac{\pi}{2}$

$= \frac{2n!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2} = B_n \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = B_n \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \underbrace{W_1}_{\text{impair}} = 1$

De la même manière qu'avant mais là on complète le dénominateur

$= \frac{2(n!) 2^n (n!)}{(2n+1)\ 2n\ (2n-1)(2n-2)\cdots} \cdots W_1$

$= \frac{4^n (n!)^2}{2n+1 (2n)!} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{B_n}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}}$$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n-1} = \dfrac{1}{(2n-1)B_{n-1}}$ (grâce à la q5 car $n \in \mathbb{N}^*$ ici)

$$= \frac{1}{(2n-1)\,\dfrac{B_n}{\left(\frac{n+n}{4n}\right)}}$$ ← n^e terme du produit

$$= \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{B_n} \left(\frac{4n}{2n}\right)$$

$$= \frac{2}{2n-1}$$

$$= \frac{1}{(2n-1)} \cdot \frac{1}{B_n \times \frac{4n}{(2n)}}$$ n-ième terme

$$= \frac{1}{(2n-1)}\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B_n}$$

$=$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$ (expression donnée en q4)

donc $W_{2n-1} = \dfrac{2n+1}{2n} W_{2n+1}$

donc $W_{2n-1} = \dfrac{2n+1}{2n} \cdot \dfrac{1}{(2n+1)} \cdot \dfrac{1}{B_n}$

ie $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n-1} = \dfrac{1}{2nB_n}}$

7) Puisque $(W_n)_{n \geq 0}$ est décroissante (q3).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$

ie.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{2nB_n} \leq \dfrac{\pi}{2} B_n \leq \dfrac{1}{(2n+1)B_n}}$

ie

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n+1) B_n} \leq B_n \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n B_n}}$$

ie

8) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leq B_n \times \sqrt{\pi n} \leq 1$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi n + 1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/2} = 1.$$

donc Par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} B_n \cdot \sqrt{\pi n} = 1$

ie $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{B_n}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} = 1$

donc $\boxed{B_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$

Partie 3 :

$(X_n)_{n \geq 1}$ iid telles que

$\forall i \in [\![1; n]\!]$, $X_i(\Omega) = \{-1; 1\}$ et $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

9) a)

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$$

$$Y_k(\Omega) = \left\{ \frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right\} = \{0; 1\}.$$

$$P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \; Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 **Nombre de pages :** 34 **Session :** 2025

Épreuve de : MATHS EDHEC APPRO

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, E(Y_k) = \frac{1}{2}}$

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, V(Y_k) = \frac{1}{4}.}$

b) $\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2Y_k - 1)$ (d'après l'expression de X_k en fonction de Y_k)

$= \left(2\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) - n.$

$\cancel{\sum_{k=1}^{n} X_k(\Omega) =}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left(2\sum_{k=1}^{n} Y_k - n\right)$

$= \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n}{2}$

$= \sum_{k=1}^{n} Y_k.$

Ainsi, puisque les $Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Si ~~tous~~ les $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ ~~valent~~ -1, ~~S_n peut descendre jusqu'à~~

$S_n = 2\sum_{i=1}^{n} Y_i - n$

$Y_i(\Omega) = \{0;1\}$

donc $\sum_{i=1}^{n} Y_i(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

de plus, $2\sum_{i=1}^{n} Y_i(\Omega) = [\![0;2n]\!]$.

et $(2\sum_{i=1}^{n} Y_i - n)(\Omega) = [\![-n;n]\!]$.

donc $\boxed{\begin{aligned} S_n(\Omega) &= [\![-n;n]\!], \\ &= \{2j-n \,;\, j \in [\![0;n]\!]\}. \end{aligned}}$

car tout élément de $[\![-n;n]\!]$ s'écrit comme $2j-n$ avec $j \in [\![0;n]\!]$

$\forall k \in S_n(\Omega)$, $P(S_n = k) = P(2(T_n - \frac{n}{2}) = k)$

$= P(2T_n = k + n)$

$= P(T_n = \frac{k+n}{2})$

$= \binom{n}{\frac{k+n}{2}}$

Je fais l'exo 2 et je reviens au problème

RDV pg 33

Exercice 2.

1) a) Soit F un sev de E et p la projection orthogonale sur F.

Soit $x \in F$ (donc $x \in E$)

$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle p^2(x), x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

car p est symétrique   car p est un projecteur

donc $\|p(x)\| = \|x\|$.

ie

$x \in E$ et $p\|x\| = \|x\|$.

$$\boxed{F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}}$$

b)

$$\|x - p(x)\|^2 = \langle x - p(x), x - p(x)\rangle$$
$$= \langle x, x - p(x)\rangle - \langle p(x), x - p(x)\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle - \langle x, p(x)\rangle - \langle p(x), x\rangle + \langle p(x), p(x)\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|p(x)\|^2 - 2\langle x, p(x)\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|p(x)\|^2 - 2\langle p^2(x), p(x)\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \|p(x)\|^2 - 2\langle p^3(x),$$

Soit $x \in E$. Soit F un sous espace vectoriel de E

$$x = \underbrace{pF(x)}_{\in F} + \underbrace{x - pF(x)}_{\in F^\perp}$$

donc $\|x\|^2 = \|pF(x) + x - pF(x)\|^2 = \|pF(x)\|^2 + \|x - pF(x)\|^2$

par théorème de Pythagore

Car $F \perp F^\perp$ donc $\forall (x,y) \in F \times F^\perp, \langle x,y \rangle = 0$

Donc

$$\boxed{\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x) - x\|^2 + \|p_F(x)\|^2}$$

(c'est p pas p_F je m'en excuse)

c)

Soit $x \in E$, $\|p(x)\| = \|x\|$.

Avec la formule de q1b

$$\|p(x)\|^2 = \|p(x) - p^2(x)\|^2 + \|p^2(x)\|^2$$

car p projection

$$\cancel{\|p(x)\|^2 = \|p(x) - p^2(x)\|^2 + \|p^2(x)\|^2}$$

$$\|p(x)\|^2 = \|p(x) - x\|^2 + \|x\|^2$$

Soit $x \in E$.

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{\|x - p(x)\|^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \|x\|^2$$

$\forall x \in E$

d'où $\boxed{\|p(x)\| \geq \|x\|}$

2) Soit $x \in F_1 \cap F_2$.

$p_3(x) = p_1 \circ p_2(x) = p_1(x) = x$ car $p_2(x) = p_1(x) = x$.

donc $p_3(x) = x$

d'où $x \in F_3$.

D'où : $\boxed{F_1 \cap F_2 \subset F_3}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	**Nombre de pages :** 34	**Session :** 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EPITEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

2)b)

Soit $x \in F_3$. On a donc $\|p_3(x)\| = x$ d'après la.

D'autre part.

$\forall y \in E, \|p_1(y)\| \leq \|y\|$

on $y = p_2(x)$.

$\|p_1 \circ p_2(x)\| \leq \|p_2(x)\|$

ie $\|p_3(x)\| \leq \|p_2(x)\|$

ie $\|x\| \leq \|p_2(x)\|$.

Cela étant vrai pour tout $x \in F_3$ on a.

$\boxed{\forall x \in F_3, \|x\| \leq \|p_2(x)\|}$

On a aussi que $\forall x \in E, \|p_2(x)\| \leq \|x\|$ (donc a fortiori pour $x \in F_3$)

Donc $\|x\| = \|p_2(x)\|$ ie $\boxed{x \in F_2}$.

c) On a donc

$$F_3 \subset F_1 \cap F_2 .$$

D'où (avec q2a) :

$$\boxed{F_3 = F_1 \cap F_2}$$

d)

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$$

car p_3 est un projecteur orthogonal de E donc c'est un endomorphisme symétrique de E (c'est ce que l'énoncé rappelle).

Soient $(x;y) \in E^2$

(1) $\langle p_3(x), y \rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y \rangle$

(2) $\langle x, p_3(y) \rangle = \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle$

Comme on a que (1) = (2)

$\forall (x,y) \in E^2, \langle x, p_1 \circ p_2(y) \rangle = \langle y, p_1 \circ p_2(x) \rangle$

$\cancel{\forall (x,y) \in E^2}$, $\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_1 \circ p_2(y), x\rangle$

$= \langle p_1 \circ p_2(y).$

$\forall (x,y) \in E^2$,

$\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_2(x), p_1(y)\rangle$ avec p_2 cette fois-ci

car p_1 est un projecteur orthogonal et donc est un endomorphisme symétrique.

$= \langle x, p_2 \circ p_1(y)\rangle$

$= \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle$. je ne suis pas si c'est licite

2)e)

→ Soient $(x,y) \in E^2$.

Donc $\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle - \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle = 0$

avec qd

ie $\langle p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x), y\rangle = 0$

par linéarité à gauche du produit scalaire

ie $\forall x \in E$ (car $y \neq 0$), $p_1 \circ p_2(x) = p_2 \circ p_1(x)$

Donc

$$\boxed{p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1}$$

3) a) Soit $x \in E$.

$p^2(x) = (p_1 \circ p_2)(p_1 \circ p_2)(x)$

$= p_1(p_2 \circ p_1 \circ p_2)(x)$ $\cancel{= (p_1 \circ p_2)(p_1}$

$= p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2(x)$ $\cancel{= p_1 \circ ((p_2 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_2))(x)}$

$= \underbrace{p_1 \circ p_1}_{= p_1} \circ \underbrace{p_2 \circ p_2}_{= p_2}(x)$ $\cancel{= p_1 \circ p_2 \circ}$

$= p_1 \circ p_2(x) = \boxed{p(x)}$ Donc p est un projecteur de E

3) b)

$\forall (x,y) \in E^2,$

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle$$
$$= \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle$$
$$= \langle p_2(y), p_1(x)\rangle \text{ car } p_2 \text{ est symetrique}$$
$$= \langle p_1 \circ p_2(y), x\rangle \text{ car } p_1 \text{ est symetrique}$$
$$= \langle p(y), x\rangle.$$

$\boxed{\text{Donc } p \text{ est symetrique}}$

c) p est un endomorphisme symetrique de E

$\iff$ p est un projecteur orthogonal de E. d'après le cours.

Or p est symetrique (q 3)b)) et donc :

$\boxed{p_1 \circ p_2 \text{ est une projection orthogonale sur } F_1 \cap F_2.}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 34	Session : 2025

Épreuve de : MATHS APPRO EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4) Soit E un espace euclidien
Soit p et q deux projections orthogonaux de E sur F et G respectivement qui commutent.
Alors $p \circ q = q \circ p$ est un projecteur orthogonal de E sur $F \cap G$.

Suite PB :

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $R_n = \{ k \in [\![1; 2n]\!], S_k = 0 \}$

On si $S_{2k} = 0$ cela veut dire qu'il y a autant de X_i qui sont égaux à 1 que ceux qui sont égaux à -1, pour que ça puisse être compensé pour donner 0.

Si $S_{2k} = 0$ alors la moitié des $2k$ (donc k) valent et à chaque fois qu'un se rajoute, il est compensé. (Désolé si ce n'est pas très clair).

b) $P(S_{2k} = 0) = \cancel{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = -1] \bigcap_{k=n+1}^{2n} [X_i = 1]\right)}$
$= P$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

c) ~~$A_k = (S_{2k} = 0) =$~~

~~$R_n = \mathbb{1}_{A_k}(\omega) A_k$~~

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!], R_n = \mathbb{1}_{A_k}(\omega)}$$

11)

on a $B_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

$$2\left(\sqrt{\pi n - 1} - \sqrt{\pi n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \leq 2\left(\sqrt{\pi n} - \sqrt{\pi n - 1}\right)$$

13) a)

$$B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

$$\binom{2n}{n} = 4^n B_n.$$

or $B_n \sim 1/\sqrt{n\pi}$ donc $\frac{1}{B_n} \sim \sqrt{n\pi}$

donc

donc $\boxed{\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4^n} \cdot \sqrt{n\pi}}$

b) $n+2$