Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2025

Épreuve de : Maths Appro ESSEC HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 1 :

1) Soit $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Soit L la matrice representative d'ans deux bases (B_E et B' respectivement pour E et $\mathbb{R}$).

Donc
$$L = \text{Mat}_{B_E B'}(\ell) = (\ell_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_p \end{pmatrix} \in E$.

$$LX = \begin{pmatrix} \ell_1 & \text{———} & \ell_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_p \end{pmatrix} = (\ell_1 x_1 + \dots + \ell_p x_p)$$

$$= (\langle (\ell_1 - \ell_p), (x_1 - x_p) \rangle)$$

$\downarrow$ car $\in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

$$= \langle (\ell_1 - \ell_p), (x_1 - x_p) \rangle$$

Donc $a_0 = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ | \\ \ell_p \end{pmatrix}$ $\qquad = \langle (\ell_1 - \ell_p), x \rangle$.

Il existe donc un unique vecteur $a_0 \in E$ qui est celui qui contient les coefficients de la matrice representative de ℓ dans les bases B_E et B' (de $\mathbb{R}$).

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2)

~~Soient λ et γ deux réels.~~
~~Soien y et v deux éléments de F.~~

~~$u^*(\lambda v + \gamma y) = z_{\lambda v + \gamma y}$~~

~~d'où, $\forall x \in E$, $\langle z_{\lambda v + \gamma y}, x\rangle_E = \langle u(x), \lambda v + \gamma y\rangle_F$~~

~~$= \lambda\langle u(x), v\rangle_F + \gamma\langle u(x), y\rangle_F$~~

~~$= \lambda$~~

3) Soient λ et γ deux réels
$\forall (y,v) \in F^2$, $u^*(\lambda y + \gamma v) \in E$.

donc, puisque $(e_1 - e_p)$ est une b.o.n de E.

$$\boxed{u^*(\lambda y + \gamma v)} = \sum_{i=1}^{p} \langle u^*(\lambda y + \gamma v); e_i\rangle_E e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle z_{\lambda y + \gamma v}, e_i\rangle_E e_i$$ grâce à la qst 2.

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle \lambda y + \gamma v, u(e_i)\rangle_F e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda \langle y, u(e_i)\rangle_F e_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma \langle v, u(e_i)\rangle_F e_i$$

encore grâce à la question 2

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda \langle z_y, e_i\rangle_E e_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma \langle z_v, e_i\rangle_E e_i$$

$$= \lambda z_y + \gamma z_v$$ car $(e_1 - e_p)$ est une b.o.n

$$\boxed{= \lambda u^*(y) + \gamma u^*(v)}$$

Donc u^* est linéaire

4)

$\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$u^*(f_k) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, u^*(f_k) \rangle_E \, e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle f_k, u(e_i) \rangle \, e_i .$$

Donc la matrice $Mat_{B_E, B_F}(u^*)$ est de la forme :

$$B = Mat_{B_E,B_F}(u^*) = \begin{pmatrix} \langle f_1, u(e_1)\rangle & \cdots\cdots & \langle f_n, u(e_1)\rangle \\ \langle f_1, u(e_2)\rangle & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_1, u(e_p)\rangle & \cdots & \langle f_n, u(e_p)\rangle \end{pmatrix}$$

$= (b_{ij})$

ie. de la forme

$$\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \ b_{ij} = \langle f_j, u(e_i) \rangle}$$

D'autre part :

$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_k), f_i \rangle f_i$

donc $A = mat_{B_F B_E}(U) = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), f_1\rangle & \cdots\cdots \\ \langle u(e_2), f_2\rangle & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ \vdots & \cdots \langle f_n, u(e_p)\rangle \end{pmatrix}$

$= \left(\langle u(e_j), f_i \rangle \right)_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

On remarque cela $= (b_{ji})$

Donc $\boxed{Mat_{B_E B_F}(u^*) = {}^t Mat_{B_F B_E}(U) = {}^t A}$

$\forall K \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $rg(K) = rg({}^tK)$.

or $rg(A) = rg(u)$ et $rg(A^t) = rg(A^*) = rg(u^*)$

donc $\boxed{rg(u) = rg(u^*)}$

Soit $\underline{v = u^*}$.

$\forall y \in F$, $v^*(y) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, v^*(y)\rangle_E \, e_i$ car $(e_1 \ldots e_p)$ b.o.n

$= \sum_{i=1}^{p} \langle v(e_i), y\rangle_F \, e_i$ (q2)

$= \sum_{i=1}^{p} \langle u^*(e_i), y\rangle_F \, e_i$

$= \sum_{i=1}^{p} \langle u(y), e_i\rangle e_i$

$= u(y)$.

$\forall y \in F$, $v^*(y) = u(y)$.

or $v^* = (u^*)^*$

Donc

$$\boxed{\forall y \in F,\ u(y) = (u^*)^*(y)}$$

5) $\boxed{C}$ Soit $x \in Im(u^*)$. $\exists y \in E$, $u^*(y) = x$.

$\forall m \in Ker(u)$, $\langle m, x\rangle_E = \langle m, u^*(y)\rangle_E$

$= \langle \underbrace{u(m)}_{m \in Ker(u)}, y\rangle_F$

$= \langle 0, y\rangle_F$

$= 0$.

Donc $x \in Ker(u)^\perp$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 20	Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths appro ESSEC HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp}$

De plus :

$\dim \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{rg}(u^*)$.

$\dim \mathrm{Ker}(u)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(u)$ car $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous espace vectoriel de E.

i.e Par théorème du rang.

$\dim \mathrm{Ker}(u)^\perp = (\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim(\mathrm{Im}(u))) - \dim \mathrm{Ker}(u)$

$= \dim \mathrm{Im}(u)$

$= \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$.

Par égalité des dimensions et inclusion d'un ensemble dans l'autre. On a

$$\boxed{\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) $\boxed{\subset}$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$

$u(x)=0$.

donc $u^* \circ u(x) = u^*(0) = 0$ car u^* est linéaire

donc $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

$\supset$ ~~soit $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$.~~

~~$u^*(u(x)) = 0$.~~

~~or. $\mathrm{Ker}((u^*)^* \circ u^*)$~~

$\supset$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

donc $u^* \circ u(x) = 0$

Montrons que $u(x) = 0$ ie $x \in \mathrm{Ker}(u)$

$$u(x) \overset{9.4}{=} (u^*)^*(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle (u^*)^*(x), e_i \rangle_E e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle u^*(x), u(e_i) \rangle_F e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, \ldots$$

inabouti

On admet le resultat

$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

6) Soit $x \in \mathrm{Im}(u^4 \circ u)$.

$\exists y \in F,\ u^4 \circ u(y) = x$

ie $u^4(u(y)) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(u^4)$

donc $\mathrm{Im}(u^4 \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^4)$.

. de plus $\dim \mathrm{Im}(u^4) = rg(u^4)$

et $\dim \mathrm{Im}(u^4 \circ u) = \dim E - \dim \ker(u^4 \circ u)$

↳ par théorème du rang. $= \cancel{\dim \ker(u^4 \circ u) + \dim \mathrm{Im}(u^4 \circ u)}$

$= \cancel{rg\, E}$

(on prend E comme ensemble pour le théorème du rang car $(u^4 \circ u) : E \to E$.

$= \dim E - \dim \ker(u)$

$= \dim \mathrm{Im}(u)$

$= rg(u) = rg(u^4)$.

d'où par inclusion et égalité des dimensions:

$\boxed{\mathrm{Im}(u^4 \circ u) = \mathrm{Im}(u^4)}$

7)

$$w : \begin{vmatrix} \mathrm{Im}(u^4) \to \mathrm{Im}(u^4) \\ x \longmapsto u^4 \circ u(x) \end{vmatrix}$$

. Linéarité de w.

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathrm{Im}(u^4),\ w(\lambda x + \mu y) = u^4 \circ u(\lambda x + \mu y)$

$= u^4(\lambda u(x) + \mu u(y))$

$= \lambda u^4 \circ u(x) + \mu u^4 \circ u(y)$

$= \lambda w(x) + \mu w(y)$

$\boxed{\text{Donc } w \text{ est linéaire}}$

5.

~~$x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Im}(u^*))$.~~

On remarque que si $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)$
et que $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp = (\mathrm{Ker}(u^* \circ u))^\perp$

alors

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{Im}(u^* \circ u)}_{=A} = (\underbrace{\mathrm{Ker}(u^* \circ u)}_{=B})^\perp}$$

Donc A et B sont orthogonaux et donc en somme directe.

Donc si $x \in (\mathrm{Ker}(u^* \circ u)) \cap (\mathrm{Im}(u^* \circ u))$
alors $\boxed{x = 0_E}$.

Donc $\mathrm{Ker}(w) = 0_{\mathrm{Im}(u^*)}$.

Ainsi, w est injective. De plus puisque $w : \mathrm{Im}(u^*) \longrightarrow \mathrm{Im}(u^*)$, la dimension de l'espace d'arrivée et celle de l'espace de départ sont identiques. Donc :

$\boxed{w \text{ est un isomorphisme de } \mathrm{Im}(u^*)}$

Soit $W = \mathrm{Mat}_{B_E}(w)$.

$= \mathrm{Mat}_{B_E}(u^* \circ u)$

$= \mathrm{Mat}_{B_E B_F}(u^*) \times \mathrm{Mat}_{B_F B_E}(u)$

$$\boxed{W = {}^tA\,A}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 282 **Nombre de pages :** 20 **Session :** 2025
	Épreuve de : Maths appro ESSEC HEC
	Consignes

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

8) ~~$F = \mathrm{Im}(u) \oplus G$.~~ ~~sous un espace vectoriel de E.~~

~~$\forall x \in$~~

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Calculons d'abord QAX.

$\pi \circ u(x) = \pi(\underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{0}_{\in F-\mathrm{Im}(u)}) = u(x)$ car cette écriture est unique et que $u(x)$ s'écrit déjà comme élément de $\mathrm{Im}(u)$.

Donc $\forall x \in F,\ \pi(u(x)) = u(x)$

ie

$QA = A.$

on applique la transposée et on obtient :

${}^t(QA) = {}^tA$ ie ${}^tA\,{}^tQ = {}^tA$

ie ${}^tA\,Q = {}^tA$

car Q est symétrique en tant que matrice qui représente un projecteur orthogonal dans $\mathcal{B}_F$ (une b.on)

Donc $\boxed{{}^tAQ = {}^tA}$

8)b) Q est ~~diagonalisable car symetrique donc~~ .

9) (⇐) Supposons que rg (A) = p
Alors rg (u) = p . i.e. ..

10).
rg (A) = p donc A est inversible .

a)

```
import numpy as np
import numpy .linalg as al
def Python calcule _ Q (A):
        B = np. transpose (A)
        M = np. dot (B, A).
        K = al. inv (M).
        S = np. dot (A, K).
        Q = np. dot (S, B).
          if al. matrix _ rank (Q) = = np. shape(A)[1]:
                return (Q)
        else:
                return ("error")
```

11)
$\langle X, \Pi X \rangle$

II

$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|A(X+H)-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|A(X)-Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\langle AX+AH-Y, AX+AH-Y\rangle - \frac{1}{2}\langle AX-Y, AX-Y\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle AX-Y, AX+AH-Y\rangle + \langle AH, AX+AH-Y\rangle - \langle AX-Y, AX-Y\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle AX-Y, AX+AH-Y-AX+Y\rangle + \langle AH, AX+AH-Y\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\langle AX-Y, AH\rangle + \langle AH, AX+AH-Y\rangle\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\langle AX-Y+AX+AH-Y ; AH\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\big(\langle 2AX-2Y+AH, AH\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^t(AH).(2AX-2Y+AH)$$

$$= \frac{1}{2}\,{}^tH\,{}^tA\,(2AX-2Y+AH)$$

$$= {}^tH\,{}^tA\,AX - {}^tH\,{}^tA\,Y + \frac{1}{2}\,{}^tH\,{}^tA\,AH$$ (on remplace ${}^tAA$ par Π) et on utilise la formule du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$= \langle {}^tAAX, H\rangle - \langle {}^tAY, H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\Pi H$$

$$= \langle {}^tAAX - {}^tAY, H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\Pi H$$

$$= \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}\,{}^tH\Pi H$$

13) $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $D(X)=0$

Alors : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle 0, H\rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH$$

$$= \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$$

grâce à l'inégalité de la q 11.

Donc :

$$J_0(X+H) - J_0(X) \geq 0.$$

i.e $\boxed{J_0(X) \leq J_0(X+H)}$

or H peut prendre toutes valeurs de $\mathbb{R}^p$ qu'on souhaite, donc

$$\forall K \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J_0(K) \geq J_0(X)$$

donc J_0 admet un minimum global en $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que J_0 possède un minimum global en un point $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\forall K \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\quad J_0(K) \geq J_0(X)$$

i.e $J_0(\underbrace{K}_{X+H}) - J_0(X) \geq 0$

~~i.e .~~

On admet le sens réciproque.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 20 | Session : 2025

Épreuve de : Maths appro ESSEC HEC

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

15)a)

$X \in S_0$ donc

$D(X) = 0$ d'où

$MX - {}^tAY = 0$

i.e.

$\cancel{{}^tAA - {}^tAY = 0}$

$\cancel{{}^tAQA - {}^tAY = 0}$

$\cancel{{}^tA(QA - Y) = 0}$

$\cancel{\langle QA - Y, A\rangle = 0}$

$\cancel{{}^tAQA - {}^tAQY = 0}$

${}^tAAX - {}^tAY = 0$

${}^tAAX - {}^tAQY = 0$

${}^tA(AX - QY) = 0$

$\langle A, AX - QY\rangle = 0$

or $A \neq 0_{n,p}$

donc $AX - QY = 0$

i.e. $AX = QY$.

b) $AX \cancel{AX_0 = QX} - .$

$\langle \cancel{X_0, X - X_0} \rangle = \langle X_0, X\rangle - \langle X_0, X_0\rangle$

b). $\langle X - X_0, X - X_0 \rangle = \| X - X_0 \|^2.$

$= \langle X, X - X_0 \rangle - \underbrace{\langle \underbrace{X_0}_{\in \mathrm{Ker}(A)^\perp}, \underbrace{X - X_0}_{\in \mathrm{Ker}(A)} \rangle}_{= 0}$

$= \langle X, X - X_0 \rangle$

$= \langle X, X \rangle - \langle X, X_0 \rangle$

$= \| X \|^2 - \langle X, X_0 \rangle.$

Si $X \neq X_0$ alors $\| X - X_0 \|^2 \neq 1$

donc

$\| X \|^2 = \| X - X_0 \|^2 + \langle X, X_0 \rangle$

$\geq \| X - X_0 \|^2$

$\geq \| X \|^2 - 2 \langle X, X_0 \rangle + \| X_0 \|^2$

$\geq ($

c)

16)

a)

$$\cancel{T = \| A (X - U_0) \|^2}$$

$$\cancel{= \| A (M^{-1}\, {}^tA Y - U_0) \|^2}$$

$$\cancel{= \| A M^{-1}\, {}^tA Y - A U_0 \|^2}$$

$$\cancel{= \| A M^{-1}\, {}^tA Y - Y + Z \|^2}$$

$$\cancel{= \| A M^{-1}\, {}^tA .}$$

$$T = \| A (X - U_0) \|^2$$

$$= \| AX - AU_0 \|^2$$

$$= \| QY - AU_0 \|^2$$

$$= \| QAU_0 + QZ - AU_0 \|^2$$

$$= \| QAU_0 + QZ - (Y - Z) \|^2$$

$$= \| QAU_0 + QZ - Y + Z \|^2$$

$$= \| QAU_0 + QZ \cdots$$

b)

```
def simulT(A, sigma):
    W = np.normal(0, sigma, n)
    Z = np.transpose(W)
    return(np.prod(np.prod(W, Q), Z)).
```

on reprend Q définit dans la fonction d'avant

15/20

c) def esperance(A, sigma):
N = 1000
S = 0
for i in range(N):
S = S + simule T(A, sigma)
return (S / N)

d) ~~On peut conjoncturer une convergence en probabilité de T vers son esperance~~
~~ou Une relation proportionnelle entre E(T) et T.~~
→ La valeur de T est égale à la somme des coefficient diagonaux supérieurs

e) $Z_1 \hookrightarrow N(0, \sigma^2)$.

~~$E(Z_1 . Z_1) = E(Z_1) . E(Z_1)$ par indépendance~~

$E(Z_1^2) = V(Z_1) + E(Z_1)^2$ par la formule de ~~Bienaymé~~ Tchebychev

$= \sigma^2 + 0$.

~~Supposons que $E(Z_1^3)$ existe. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 . \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2}} . dx$ converge~~

~~or $t \mapsto \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.~~

~~Donc $E(Z_1^3) = 0$.~~

~~Rq : on peut montrer qu'elle existe avec du Riemman et une croissance comparée.~~

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2025

Épreuve de : maths appro ESSEC HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

~~$E(Z_1^4)$ existe $\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2}} dx$ converge~~

$E(Z_1^3)$ existe $\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x/\sigma)^2}{2}} dx$ converge

or l'integrande est impaire donc si même $E(Z_1^3)$ existe elle serait nulle. On peut montrer qu'elle existe rapidement avec du Riemman et une croissance comparée.

$$\boxed{E(Z_1^3) = 0}$$

Sous reserve d'existence (que l'on peut montrer avec Riemman)

$$E(Z_1^4) = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x/\sigma)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} 4\sigma^4 u^4 e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma \, du$$

$$\boxed{E(Z_1^4) = \frac{4\sigma^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma(5)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

g)

$$T_1+2T_2 = \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(Q_{ii} z_i^2 + 2\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j\right)$$

$$\cancel{= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} Q_{ij} z_i z_j}$$

$$\cancel{= \sum_{1\leq i<j\leq n} Q_{ij} z_i z_j}$$

$$\cancel{= \sum_{1\leq i,j\leq n} z_i Q_{ij} z_j}$$

$$\cancel{= {}^tZ Q Z}$$

$$\cancel{= T}.$$

$$= \sum_{1\leq i,j\leq n} Q_{ij} z_i z_j$$ d'après le cours

$$= {}^tZQZ.$$

Donc $\boxed{T = T_1+2T_2}$.

i) $V(T) = V(T_1+2T_2)$

$= V(T_1) + 4V(T_2)$ ← variance quadratique $+ 4\,cov(T_1,T_2)$

$= V(T_1) + 4V(T_2) +$ ——

h)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} Q_{k,k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} q_{kk}^2 - 2\sum_{0\leq i<j\leq n} Q_{jj}Q_{ii}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q_{kk}^2 - 2T_2.$$

car p^2 $rg(A) = tr(Q) = \sum_{k=1}^{n} q_{kk}$

$p^2 = 9 + $

III)

17) Soit $X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ réalisant le minimum global de J

Si $BX_0 \neq 0$.

$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J(X) \geq J(X_0)$

ie

$\cancel{\frac{1}{2}\|AX - Y\|^2 + \|BX\|} \geq \cancel{\frac{1}{2}\|AX_0 - Y\|^2 + \|BX_0\|}$

~~Soit K tel que D(K) = 0 et K le minimum global en J.~~

$\frac{1}{2}\|\cancel{AX} - Y\|^2 + \|BX\| \geq \frac{1}{2}\|\cancel{AK} - Y\|^2 + \|\cancel{B}X_0\|$

$-D(\cancel{X_0}) = -M\cancel{X_0} - \cancel{{}^tA}Y$

$=$

On admet l'égalité.

On remarque que

$-\|BX_0\|\, D(X_0) = {}^tB\, BX_0$.

19) b) Soit $H \in \ker(B)$.

$\langle H, D(X_0)\rangle \leq \|BH\| = 0$.

donc $\langle H, D(X_0)\rangle \leq 0$.

~~donc~~

20)
a)

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$,

$$\|u+v\|^2 - \left(\frac{\|u\|^2 + \langle u,v\rangle}{\|u\|^{\cancel{2}}}\right)^2 = \|u+v\|^2 - \frac{\cancel{\|u\|^4 + 2\langle u,v\rangle \|u\|^2}}{\|u\|^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{\|u\|\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle\right)}{\|u\|} - \frac{(\|u\|^2 + \langle u,v\rangle)^2}{\|u\|^2}$$

23)
d)

```
def FoncSom (alpha, Y, lda):
    S = -1
    for i in range (len (alpha)):
        S = S + ((alpha [i] * alpha [i]) *
            (Y[i] * (Y[i]))) / (lamba
            + (alpha [i]) ** 2) ** 2)
    return (S)
```