Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

exercice 1 :

Partie 1 :

1.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\frac{5}{9}} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix} = A^2$$

$$\square = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{9}$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

$$A^2 - \frac{4}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot I$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \frac{8}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & 0 \\ 0 & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & 0 \\ 0 & \frac{3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$ est bien un polynôme annulateur de A.

b) Les candidats valeur propre de A sont les racines du polynome annulateur.

on cherche:

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0.$$

$$\Delta = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2}$$

$$= \frac{\frac{6}{3}}{2} = 1 \qquad = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Les valeur propres possibles de A sont 1 et $\frac{1}{3}$.

c)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc 1 est une valeur propre de A.

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = A\times\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

donc $\frac{1}{3}$ est une valeur propre de A.

Les valeurs propres de A sont 1 et $\frac{1}{3}$.

2) a)

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} = PQ.$$

b) $PQ = 6\cdot I$

donc $P\cdot\frac{1}{6}\cdot Q = I$

donc P est inversible et $P^{-1}=\frac{1}{6}\cdot Q$

donc

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

c)

$$P=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = AP$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = PD$$

dc $AP = PD$

dc $APP^{-1} = PDP^{-1}$

dc $A = PDP^{-1}$

dc A est par définition diagonalisable car D est diagonale et P inversible.

d) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence.

initialisation : vérifions que : $A^0 = PD^0P^{-1}$

* $A^0 = I$
* $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

dc $A^0 = PD^0P^{-1}$

hérédité : soit $n \geq 0$, n quelconque fixé,

supposons que : $A^n = PD^nP^{-1}$: hypothèse de récurrence

montrons que : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

on a par hypothèse de récurrence : $A^n = PD^nP^{-1}$

dc $A \times A^n = A \times PD^n P^{-1}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

dc $A^{n+1} = PDD^nP^{-1}$ car $AP = PD$

dc $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ $\boxed{}$

conclusion :
La propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe de récurrence,
$\forall n \geq 0,\ A^n = PD^nP^{-1}$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$

La matrice D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$

dc

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} = A^n$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) a)

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u_n + v_n \\ \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3} v_n \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u_n + v_n \\ \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3} v_n \end{pmatrix} = A \times X_n$$

donc $X_{n+1} = A \times X_n$.

b) $X_{n+1} = A \times X_n$
par analogie avec les suites géométriques,

$X_n = A^n \times X_0$.

avec A la raison et X_0 le premier terme de la suite.

c) on a $X_n = A^n X_0$ donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} u_0\left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) + v_0\left(9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) \\ u_0\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) + v_0\left(3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{pmatrix}$$

donc $u_n = \frac{1}{6}\left(3u_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u_0 + 9v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} v_0\right)$

et

$v_n = \frac{1}{6}\left(u_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u_0 + 3 \times v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} v_0\right)$

d) quand $n \to +\infty$:

$\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

idem pour $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

donc $\frac{1}{6}\left(3u_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u_0 + 9v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} v_0\right) \to \frac{1}{6}(3u_0 +$
$9v_0)$

donc $\lim\limits_{+\infty} u_n = \frac{1}{6}(3u_0 + 9v_0)$ avec $u_0 > 0$
et $v_0 > 0$

donc la population des enfants survie

et $\frac{1}{6}\left(u_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u_0 + 3 \times v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} v_0\right) \to \frac{1}{6}(u_0 + 3v_0)$
avec $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$

donc $\lim\limits_{+\infty} v_n = \frac{1}{6}(u_0 + 3v_0)$

donc la population des adultes survie.

4) a) La clé Enclos, Effectifs et Quantité peuvent être choisies car elles sont de type entier. Ce qui est compatible avec la clé primaire.

b)

SELECT Type FROM ALIMENTATION

c) SELECT Espèce, Catégorie, Effectif FROM ANIMAUX

d) SELECT Tarif FROM ALIMENTATION AND Espèce, Effectif FROM ANIMAUX.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 : $w_{n+1} = r\,w_n + w_n = (r+1)\,w_n$

5) a) $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(r+1)w_n}{w_n} = r+1$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = r+1$

donc $w_n = (r+1)^n \times w_0$

b) D'un instant à l'autre, la suite varie de la même proportion.

on a $w_{n+1} = r\,w_n + w_n$

$r \in [-1 ; 0]$ pour que (w_n) puisse évoluer négativement d'un instant à l'autre, entre -100% à une évolution nulle.

et $r \in]0 ; +\infty[$ pour pouvoir évoluer positivement.

donc $r \in [-1 ; +\infty[$.

c) * si $r \in [-1 ; 0[$

$w_n = (r+1)^n \times w_0$

quand $n \to +\infty$:

$r+1 \to 0$ car $-1 < r+1 < 1$
car $r \in [-1 ; 0[$

dc $(r+1)^n \times w_0 \to 0$

dc $\lim\limits_{+\infty} w_n = 0$

* si $r = 0$:

$w_n = w_0$

dc $\lim\limits_{+\infty} w_n = w_0$

* si $r > 0$:

quand $n \to +\infty$:

$(r+1)^n \to +\infty$ car $r+1 > 0$

dc $(r+1)^n \times w_0 \to +\infty$

dc $\lim\limits_{+\infty} w_n = +\infty$.

Cela signifie que si la croissance de la population est négative, la population s'éteint

Si le taux de croissance est nulle, elle survie et si il est positif, elle explose.

Le modèle ne semble pas réaliste car la population doit nécessairement rester identique pour survivre.

6) a) i.

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0.$

$\Leftrightarrow \quad \alpha x = 0 \quad$ ou $\quad 1 - \frac{1}{\beta} x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad \frac{1}{\beta} x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = \beta$

$S = \{0 ; \beta\}$

ii :

$f = uv \quad$ avec $u = \alpha x$ donc $u' = \alpha$

et $v = 1 - \frac{1}{\beta} x$ donc $v' = -\frac{1}{\beta}$.

$f' = u'v + uv'$

donc $f'(x) = \alpha \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) + \alpha x \left(-\frac{1}{\beta}\right)$

$= \alpha - \frac{1}{\beta} \times \alpha x - \frac{1}{\beta} \alpha x$

$= \alpha - \frac{2}{\beta} \alpha x. = \alpha \left(1 - \frac{2}{\beta} x\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha \left(1 - \frac{2}{\beta} x\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\beta} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{2}$

x	0		$\frac{\beta}{2}$		β	$+\infty$	
$1-\frac{2}{\beta}x$		$+$	0	$-$			fonction affine décroissante.
α		$+$		$+$			constante positive
f'		$+$	0	$-$			règle des signes.
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$-\infty$	

quand $x \to +\infty$:

$$f(x) = \alpha x\left(1-\frac{1}{\beta}x\right)$$
$$= \alpha x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\beta}\right)$$

$x^2 \longrightarrow +\infty$ et $\frac{1}{x} \to 0$. de $\frac{1}{x}-\frac{1}{\beta} \to -\frac{1}{\beta}$

de $\alpha x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\beta}\right) \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{+\infty} f(x) = -\infty$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) i $\quad g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0.$

$\Leftrightarrow \quad x\left(1 + \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x\left(1 + \alpha - \frac{1}{\beta} \alpha x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad 1 + \alpha - \frac{1}{\beta} \alpha x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad \frac{1}{\beta} \alpha x = 1 + \alpha$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = \frac{\beta(1+\alpha)}{\alpha}.$

$S = \left\{0 ; \frac{\beta(1+\alpha)}{\alpha}\right\}$

$g(x) = x$

$\Leftrightarrow \quad x + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = x$

$\Leftrightarrow \quad \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0.$

$S = \{0 ; \beta\}$ vu précédemment.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$g(x) = \beta$$

$$\iff x + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right) = \beta$$

$$\iff x + \alpha x - \frac{1}{\beta}\alpha x^2 - \beta = 0$$

$$\iff -\frac{1}{\beta}\alpha x^2 + (\alpha+1)x - \beta = 0.$$

$$\Delta = (\alpha+1)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{\beta}\alpha\right)\times(-\beta)$$

$$= (\alpha+1)^2 - 4\alpha.$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha$$

$$= \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$= (\alpha-1)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\alpha-1)^2}$$

$$= -(\alpha-1) = 1-\alpha.$$

car $\alpha - 1 < 0$

car $\alpha \in]0;1[$.

$$x_1 = \frac{-(\alpha+1)+1-\alpha}{2\times\frac{-1}{\beta}\alpha}$$

$$= \frac{-2\alpha}{\frac{-2}{\beta}\alpha}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\beta}} = \beta$$

$$x_2 = \frac{-(\alpha+1)-(1-\alpha)}{2\times\frac{-1}{\beta}\alpha}$$

$$= \frac{-\alpha-1-1+\alpha}{2\times\frac{-1}{\beta}\alpha}$$

$$= \frac{-2}{-2\times\frac{1}{\beta}\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\beta}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$S = \left\{\beta \,;\, \frac{\beta}{\alpha}\right\}.$$

ii.

$$\beta < \beta\alpha + \beta \quad \text{car } \alpha > 0.$$

$$\text{donc } \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta\alpha+\beta}{\alpha} \quad \text{car } \alpha > 0.$$

$$\text{et } 1 < \frac{\alpha+1}{2\alpha} \quad \text{car } \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \frac{1}{2\alpha} > \frac{1}{2} \text{ car } \alpha < 1$$

$$\text{donc } \beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$$

car $\beta > 0$.

$$\text{et } \frac{\alpha+1}{2} < 1 \quad \text{car } \alpha < 1.$$

$$\text{donc } \frac{\alpha+1}{2} \times \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{car } \frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

$$\text{donc } \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\text{donc } \beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

iii $g(x) = x + f(x)$

donc $g'(x) = 1 + f'(x)$

$$= 1 + \alpha\left(1 - \frac{2}{\beta}x\right).$$

$$g'(x) = 0 \iff \alpha\left(1 - \frac{2}{\beta}x\right) = -1$$

$$\iff 1 - \frac{2}{\beta}x = -\frac{1}{\alpha} \iff -\frac{2}{\beta}x = -\frac{1}{\alpha} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2}\left(-\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\beta}{2\alpha} \quad \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\beta + \beta\alpha}{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\beta\alpha + \beta}{2\alpha}.$$

x	0	β	$\frac{\beta\alpha+\beta}{2\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta(1+\alpha)}{\alpha}$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		
$g(x)$	0	β ↗		↘ β	0	$-\infty$

quand $x \to +\infty$:

$$g(x) = x + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right)$$

$$= x + \alpha x - \frac{1}{\beta}\alpha x^2$$

$$= x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{\beta}\alpha\right)$$

$x^2 \to +\infty$

$\frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{\alpha}{\alpha} \to 0 \qquad$ donc $\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{\beta}\alpha \to -\frac{1}{\beta}\alpha$

donc $x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{\beta}\alpha\right) \longrightarrow -\infty$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

exercice 2 :

1) a)

position [j + 1] = n + 1

position [j + 1] = n - 1

return (position)

b)

```
position = 0
for k in range (0, 10)
    bille = rd. randint (1, 21)
    if position      < bille
            position = position + 1
    else :
            position = position - 1
return (position)
```

c) Cette instruction simule une répétition de l'expérience 1000 fois puis renvoie une moyenne de ces 1000 expériences. Ainsi, l'espérance du déplacement de la boule s'approche de 5.

2) $X_1(\Omega) = 1$ $\qquad P([X_1 = 1]) = 1$

$E(X_1) = 1.$

car au bout du premier déplacement, la

ne peut être que supperieur à la position du pion car le pion est à 0 et la bille au moins égale à 1.

3) $X_2(\Omega) = \{0 ; 2\}$ car en X_1 elle est à la position 1 dc en X_2 elle aura nécessairement bougée.

$P([X_2 = 0]) = \frac{1}{n}$

car sur n bille il faut que ce soit la bille numéro 1 qui soit tirée.

$P([X_2 = 2]) = 1 - P([X_2 = 0])$

$= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

$E(X_2) = \sum_{i=0}^{1} x_i \times P([X_2 = x_i])$

$= 0 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n-1}{n} = 2 \times \frac{n-1}{n}$.

4) à chaque tirage, la bille peut être supperieur au tour précédent jusqu'à ce que il dépasse n.
Ainsi, la limite est n
De plus, le pion peu restés bloqué au départ ou se déplacer staques et repartir ci bien qu'il peut prendre toutes les valeurs entre 0 et n.
dc $X_a(\Omega) = [\![0, n]\!]$

5) pour que $P(X_{k+1}=0)$, il suffit que le pion soit a la position 1 précédament et qu'il recule d'une case.

si le pion est sur la position 1, il y n'y a qu'une seule bille inferieur ou égale, la bille numéro 1.

$$\text{dc} \quad P([X_{k+1}=0]) = \frac{1}{n} P([X_k = 1])$$

car en posant $P([B=1])$ comme probabilité que la bille soit égale a 1 parmi n billes alors $P([B=1]) = \frac{1}{n}$.

de la même manière, a pose $P([B=n])$ comme probabilit que la bille soit égale à n

de plus, pour que le pion soit en n au k ième déplacement, il faut qu'il soit en n-1 au k-1 ième et que la bille n soit tirée.

il n'y a qu'un bille n dc $P([B=n]) = \frac{1}{n}$

$$\text{et} \quad P([X_{k+1}=n]) = P([B=n]) \times P([X_k = n-1])$$

$$= \frac{1}{n} P([X_k = n-1]).$$

6) a)

lorsque le pion est en $l-1$, il y a $n-(l-1)$ billes supperieur a la position du pion qui est en $l-1$ parmis n billes.

$$\text{dc} \quad P([X_{k+1} = l]) = \frac{n-(l-1)}{n} P([X_k = l-1])$$

b) lorsque le pion est en $l+1$, il y a $l+1$ billes inférieur ou égales à la position du pion parmi les n billes

dc $P([X_{k+1} = l]) = \frac{l+1}{n} P([X_k = l+1])$

c) D'après la formule des probabilités totales,

$$P([X_{k+1} = l]) = P([B > l-1] \cap [X_k = l-1])$$
$$+ P([B \leq l+1] \cap [X_k = l+1])$$
$$= \frac{n-l+1}{n} P([X_k = l-1]) + \frac{l+1}{n} P([X_k = l+1]).$$

7)

$E(X_{k+1}) =$

8) a) $(E(X_n))_{n \geq n}$ semble suivre un suite arithmético-géométrique car pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par une constante et additionne un constant, si n fixé.

b) $x = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) x$

$\Leftrightarrow x = 1 + x - \frac{2x}{n}$

$\Leftrightarrow 0 = 1 - \frac{2x}{n} \Leftrightarrow \frac{2x}{n} = 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques T.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$\Leftrightarrow \quad 2x = n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n}{2}$.

c) $x_k = E(X_k) - x$

donc $x_{k+1} = E(X_{k+1}) - x$

donc $x_{k+1} = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k) - x$

donc $x_{k+1} = 1 + E(X_k) - \frac{2}{n} E(X_k) - x$

donc $x_{k+1} = 1 - \frac{2}{n} E(X_k) + E(X_k) - x$

donc $x_{k+1} = 1 - \frac{2}{n} E(X_k) + x_k$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques T

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

exercice 3 :

Partie 1 :

1) ① il faut que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(t) \geq 0$

* si $t \in [0, 1]$, $f_\alpha(t) = (\alpha+1)t^\alpha$

$\alpha \geq 1$ donc $(\alpha+1)t^\alpha \geq 0$

* sinon, $f_\alpha(t) = 0 \geq 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(t) \geq 0$.

② il faut que $\forall t \in \mathbb{R}$, f_α soit continue.

* si $t \in [0, 1]$, $f_\alpha(t) = (\alpha+1)t^\alpha$

continue comme composée de fonction continue sur $[0 ; 1]$

* sinon, $f_\alpha(t) = 0$ continue car constante.

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, f_α est continue

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

③ il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge et valle 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} (\alpha+1)\,t^{\alpha}\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} (\alpha+1)\,t^{\alpha}\,dt = \left[t^{\alpha+1} \right]_{0}^{1}$$

$$= 1 - 0 = 1.$$

dc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Le 3 critères sont respectés de f_α peut être considérée comme une densité de probabilité.

2) a) sur $[0\,;1]$, $f_\alpha(t) = (\alpha+1)\,t^{\alpha}$

dc $f_\alpha'(t) = (\alpha+1)\,\alpha\,t^{\alpha-1}$

b)

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : Mathématique T

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

5) pour que $c_0 f_0$ soit une densité de probabilité, il faut que :

① $\forall t \in \mathbb{R}$, $c_0 f_0(t) \geq 0$.

donc il faut que $c_0 \geq 0$.

car sur $[0;1]$ $e^t \geq 0$

et sinon $0 \geq 0$

② $c_0 f_0(t)$ continue sur $\mathbb{R}$.

c_0 étant une constante car c'est un réel
et e^t continue sur $[0,1]$
et 0 continue sinon
cela ne pose pas de problème pour la continuité de la suite.

③ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 f_0(t)\,dt$ converge et vaut 1.

or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} c_0 e^t\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or $\int_0^1 c_0 e^t \, dt = \left[c_0 e^t \right]_0^1$

$= c_0 e^1 - c_0 e^0 = c_0 e - c_0.$

donc il faut résoudre l'équation.

$xe - x = 1$

$\Leftrightarrow x(e-1) = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e-1}$

or pour que $c_0 f_0$ soit considéré comme une densité de probabilité, il suffit que

$c_0 = \frac{1}{e-1}.$

6) pour que $E(X_0)$ existe, il suffit que

$\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 f_0(t) \, dt$ converge.

$\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 f_0(t) \, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \, dt + \int_0^1 \frac{1}{e-1} \times e^t \, dt + \int_1^{+\infty} 0 \, dt$

$$= \int_0^1 \frac{1}{e-1} e^t \, dt = \left[\frac{1}{e-1} e^t \right]_0^1 = \frac{1}{e-1} e^1 - \frac{1}{e-1} e^0$$

$$= \frac{1}{e-1} e - \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1} (e-1) = 1.$$

X_0 admet une espérance $E(X_0)$

et $E(X_0) = 1$.

7) $\cancel{\int_0^1 f_{n+1}(t)\, dt = \int_0^1 t f_n'(t)\, dt}$