Copie anonyme - n°anonymat : 891092

W0-00140 891092 Mat Appro

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 17 | Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 1 :

1) $\forall x \in E$, $x = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle e_k$ car $(e_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est une base orthonormale de E

donc $\ell(x) = \ell\left(\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle_E e_k\right)$

linéarité de ℓ $= \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle_E \, \ell(e_k)$

$= \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \, \ell(e_k) \rangle_E$, car $\forall k \in [\![1,p]\!]$ $\ell(e_k) \in \mathbb{R}$

$= \langle x, \sum_{k=1}^{p} \ell(e_k) e_k \rangle_E$, par bilinéarité du produit scalaire

donc avec $a_0 = \sum_{k=1}^{p} \ell(e_k) e_k$ on a bien $\forall x \in E, \ell(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

Montrons que a_0 est unique, soit $a_1 \in E$ / $\forall x \in E$, $\ell(x) = \langle a_1, x \rangle_E$

donc $\forall x \in E$, $\langle a_1, x \rangle_E = \langle a_0, x \rangle_E$

donc $\forall x \in E$, $\langle a_1, x \rangle_E - \langle a_0, x \rangle_E = 0$

donc par bilinéarité, $\forall x \in E$ $\langle a_1 - a_0, x \rangle_E = 0$

or $(a_1 - a_0) \in E$ donc en particulier $\langle a_1 - a_0, a_1 - a_0 \rangle_E = 0$

donc $\|a_1 - a_0\|^2 = 0$

donc $a_1 - a_0 = 0$ donc $a_1 = a_0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc a_0 est bien unique

Donc $a_0 = \sum_{k=1}^{p} l(e_k)e_k$ est le seul vecteur de E qui vérifie, $\forall x \in E$, $l(x) = \langle a_0, x \rangle_E$

2) Soit $y \in F$

Soit g l'application défini par
$\forall x \in E$, $g(x) = \langle c(x), y \rangle_F$

$\forall x \in E$, $g(x) = \langle c(x), y \rangle_F \in \mathbb{R}$ car le produit scalaire est une forme

Soit $(\lambda, x, z) \in \mathbb{R} \times E^2$

$$g(\lambda x + z) = \langle c(\lambda x + z), y \rangle_F$$

$$\overset{\text{linéarité de c}}{=} \langle \lambda c(x) + c(z), y \rangle_F$$

$$\overset{\text{bilinéarité de <>}}{=} \lambda \langle c(x), y \rangle_E + \langle c(z), y \rangle_F$$

$$= \lambda g(x) + g(z)$$

donc g est linéaire, c'est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$
donc d'après la question 1,
$\exists!\, z_y \in E \,/\, g(x) = \langle z_y, x \rangle_E$

donc $\exists!\, z_y \in E \,/\, \langle c(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$
y est quelconque dans F
Donc $\forall y \in F$, il existe un seul $z_y \in E \,/\, \forall x \in E\ \langle c(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$

3) Soit $(y, v, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}$

$c^*(\lambda y + v) = z_{\lambda y + v}$

avec $z_{\lambda y+v}$ l'unique vecteur de E tel que
$\forall x \in E$, $\langle c(x), \lambda y + v \rangle_F = \langle z_{\lambda y + v}, x \rangle_E$

et $c^*(y) = z_y$ et $c^*(v) = z_v$

avec z_y l'unique vecteur de E tel que
$\forall x \in E$ $\langle c(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$

et z_v l'unique vecteur de E tel que
$\forall x \in E$, $\langle c(x), v \rangle_F = \langle z_v, x \rangle_E$

donc par multiplication par λ
$\forall x \in E$
$\langle c(x), \lambda y \rangle_F = \langle \lambda z_y, x \rangle_E$
et par somme

$\forall x \in E$ $\langle c(x), \lambda y + v \rangle_F = \langle \lambda z_y + z_v, x \rangle_E$

donc $\forall x \in E$, $\langle \lambda z_y + z_v, x \rangle_E = \langle z_{\lambda y + v}, x \rangle_E$

donc $\forall x \in E$, $\langle \lambda z_y + z_v - z_{\lambda y + v}, x \rangle_E = 0$

donc $\lambda z_y + z_v - z_{\lambda y + v} = 0$

donc $\lambda z_y + z_v = z_{\lambda y + v}$

donc $\lambda c^*(y) + c^*(v) = c^*(\lambda y + v)$

λ quelconque dans $\mathbb{R}$ et y et v quelconque dans E

$\boxed{\text{donc } c^* \text{ est linéaire}}$

4) $A = mat_{B_F, B_E}(c)$, $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})_{\substack{i \in [\![1,p]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}}$

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $c(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \langle c(e_i), f_k \rangle f_k$
car $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ base orthonormée de F

donc $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ $a_{ij} = \langle c(e_j), f_i \rangle$

et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $c^*(f_i) = \sum_{k=1}^{p} \langle c^*(f_i), e_k \rangle e_k$
car $(e_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ base orthonormée de E

et avec $B = mat_{B_E, B_F}(c^*)$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et
$B = (b_{ij})_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ $b_{ij} = \langle c^*(f_j), e_i \rangle$

donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $b_{ij} \overset{(1)}{=} \langle c(e_i), f_j \rangle$
$= a_{ji}$

$\boxed{\text{on a donc } B = {}^tA \\ \text{donc } mat_{B_E, B_F}(c^*) = {}^tA}$

et on sait que $rg(A) = rg({}^tA)$
et $rg(A) = rg(c)$ et $rg({}^tA) = rg(c^*)$

$\boxed{\text{donc } rg(c) = rg(c^*)}$

Soit $v = c^*$
donc $mat_{B_E, B_F}(v) = {}^tA$ ← on applique ce que l'on vient de montrer à v

donc $mat_{B_F, B_E}(v^*) = {}^t({}^tA) = A$

donc $mat_{B_F, B_E}((c^*)^*) = A = mat_{B_F, B_E}(c)$

$\boxed{\text{donc } (c^*)^* = c}$

Copie anonyme - n°anonymat : 891092

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 17	Session : 2025
Épreuve de : Mathématiques approfondies		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5) Soit $y \in \operatorname{Im}(c^*)$ donc $\exists v \in F \,/\, c^*(v) = y$

Soit $x \in \ker(c)$

donc $\langle x, y \rangle = \langle c^*(v), x \rangle$
$= \langle v, c(x) \rangle$
$= \langle v, 0 \rangle$
$= 0$

donc $\operatorname{Im}(c^*) \subset \ker(c)^\perp$

comme E est de dimension finie, d'après le théorème du rang on a

$\dim(E) = rg(c) + \dim(\ker(c))$

donc $\dim(E) - \dim(\ker(c)) = rg(c) = rg(c^*)$

et comme $\ker(c)$ est un sous espace vectoriel de E de dimension finie

$\dim(E) - \dim(\ker(c)) = \dim(\ker(c)^\perp) = rg(c^*)$
$= \dim(\operatorname{Im}(c^*))$

$\boxed{\text{donc } \operatorname{Im}(c^*) = \ker(c)^\perp}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) Soit $x \in \ker(c)$
donc $c(x) = 0$
donc $c^*(c(x)) = 0$
donc $(c^* \circ c)(x) = 0$
donc $x \in \ker(c^* \circ c)$
donc $\ker(c) \subset \ker(c^* \circ c)$

Soit $x \in \ker(c^* \circ c)$

donc $(c^* \circ c)(x) = 0$
donc $\langle (c^* \circ c)(x), x \rangle = 0$
donc $\langle c^*(c(x)), x \rangle = 0$
donc $\langle c(x), c(x) \rangle \overset{(1)}{=} 0$
donc $\|c(x)\|^2 = 0$ donc $c(x) = 0$

donc $\ker(c^* \circ c) \subset \ker(c)$
donc $\boxed{\ker(c^* \circ c) = \ker(c)}$

Soit $y \in \mathrm{Im}(c^* \circ c)$ donc $\exists x \in E \,/\, (c^* \circ c)(x) = y$
donc $c^*(c(x)) = y$
en notant $z = c(x) \in F$ on a $c^*(z) = y$
donc $y \in \mathrm{Im}(c^*)$ donc $\underline{\mathrm{Im}(c^* \circ c) \subset \mathrm{Im}(c^*)}$

et comme E est de dimension finie, théorème du rang
$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(c^* \circ c)) + \dim(\ker(c^* \circ c))$

donc $\dim(E) - \dim(\ker(c^* \circ c)) = \dim(\mathrm{Im}(c^* \circ c))$
donc $\dim(E) - \dim(\ker(c)) = \dim(\mathrm{Im}(c^* \circ c))$
donc $\dim(\ker(c)^\perp) = \dim(\mathrm{Im}(c^* \circ c))$
donc $\underline{\dim(\mathrm{Im}(c^*)) = \dim(\mathrm{Im}(c^* \circ c))}$

donc $\boxed{\mathrm{Im}(c^*) = \mathrm{Im}(c^* \circ c)}$

7) $\forall x \in \mathrm{Im}(c^*)$, $u(x) = c^*(c(x)) \in \mathrm{Im}(c^*)$

et soit $(\lambda, y, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Im}(c^*)^2$

$u(\lambda x + y) = c^*(c(\lambda x + y))$

linéarité c et c^*

$= \lambda c^*(c(x)) + c^*(c(y))$

$= \lambda u(x) + u(y)$

donc u est un endomorphisme

Soit $x \in \ker(u)$ donc $u(x) = 0$

donc $(c^* \circ c)(x) = 0$

donc $c(x) \overset{Q6}{=} 0$

donc $x \in \ker(c) \cap \mathrm{Im}(c^*)$

donc $x \in \ker(c) \cap \ker(c)^\perp$

donc $x \in \{0\}$

donc $\ker(u) \subset \{0\}$, c'est un espace vectoriel

donc $\ker(u) = \{0\}$

$\mathrm{Im}(c^*)$ est de dimension finie donc

$\boxed{\text{u est un isomorphisme}}$

$\mathrm{mat}_{\mathrm{Im}(c^*)}(c^* \circ c)(x)$ est inversible car l'endomorphisme associé est bijectif (je ne sais pas ce que je peux dire d'autre)

8) $Q = \mathrm{mat}_{B_F}(\pi)$

Soit $x \in F$, $x \in \mathrm{Im}(c) \oplus \mathrm{Im}(c)^\perp$

donc $\exists!(y, z) \in \mathrm{Im}(c) \times \mathrm{Im}(c)^\perp \,/\, x = y + z$

donc $\pi(x) = y$

et $c^* \circ \pi(x) = c^*(y)$

et $c^*(x) = c^*(y+z)$
$\underset{\text{linc}}{=} c^*(y) + c^*(z)$
$= c^*(y) + 0$

~~car~~ $\cancel{z \in \mathrm{Im}(c)^{\perp}}$
~~donc~~ $\cancel{z \in \ker(c^*)}$

~~en effet~~ $\cancel{\mathrm{Im}(c^*) = \ker(c)^{\perp}}$
~~donc~~ $\cancel{\mathrm{Im}(c^*)^{\perp} = \ker(c)}$
~~avec c^* ça nous donne~~
$\cancel{\mathrm{Im}(c)^{\perp} = \ker(c^*)}$

~~donc~~

si on admet que $\mathrm{Im}(c)^{\perp} = \ker(c^*)$
si c'est faux ma réponse l'est aussi

donc $\forall x \in F \quad c^*(x) = (c^* \circ \pi)(x)$

donc $\mathrm{mat}_{B_E, B_F}(c^*) = \mathrm{mat}_{B_E B_F}(c^*)\, \mathrm{mat}_{B_F}(\pi)$

$\boxed{\text{donc } {}^tAQ = {}^tA}$

8) Soit une base orthonormée de $\mathrm{Im}(c)$ complétée avec une base de $\mathrm{Im}(c)^{\perp}$, dans cette base la matrice de π est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = B$, avec autant de 1 que de vecteurs dans notre base de $\mathrm{Im}(c)$ donc $\dim(\mathrm{Im}(c)) = \mathrm{rg}(c) = \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(Q)$

$\left(\begin{array}{l} \text{car } \exists P \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, B = PQP^{-1} \\ \text{donc } \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(PQP^{-1}) \\ \quad = \mathrm{tr}(QP^{-1}P) \\ \quad = \mathrm{tr}(Q) \end{array}\right)$

$\boxed{\text{donc } \mathrm{tr}(Q) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(c)}$

9) Supposons que $\mathrm{rg}({}^tA) = p$
donc $\mathrm{rg}({}^tA) = p$
donc $\mathrm{rg}(c^*) = p \quad q \geq p$

donc $\mathrm{rg}(c^* \circ c) = p$
donc $\mathrm{rg}(\mathrm{mat}_{B_E}(c^* \circ c)) = p$
donc $\mathrm{rg}(M) = p$
et $M \in M_{p,p}(\mathbb{R})$ donc inversible
(càd M inversible)

Supposons $\mathrm{rg}(M) = p$ donc $\mathrm{rg}(c^* \circ c) = p$
donc $\mathrm{rg}(c^*) = p$ donc $\mathrm{rg}({}^tA) = p$

Copie anonyme - n°anonymat : 891092

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 17
Session : 2025	
Épreuve de : Mathématiques approfondies	

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

donc $rg(A) = p$

$\boxed{\text{donc } M \text{ inversible ssi } rg(A) = p}$

10) a) ~~${}^tAQ = {}^tA$~~
~~donc ${}^tAQA = {}^tAA$~~
~~donc ${}^tAQA = M$~~

on admet

10) b)

```
def Calcul_Q(A):
        B = np.transpose(A)
        M = np.dot(B, A)
        N = al.inv(M)
        C = np.dot(N, B)
        Q = np.dot(A, C)
        return Q
```

à cette étape si $rg(A) \neq p$ M ne sera pas inversible
il y aura donc un message d'erreur
et si $rg(A) = p$, il n'y aura pas de problème
et on aura Q

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11) Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$$^tXMX = {}^tX\,{}^tA\,AX$$
$$= {}^t(AX)\,AX$$
$$= \|AX\|^2 \geq 0$$

$\boxed{\text{donc } \forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXMX \geq 0}$

Partie II :

12) Soit $(X, H) \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\|AX+AH-Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|AX-Y\|^2 + 2\langle AH, AX-Y\rangle + \|AH\|^2 - \|AX-Y\|^2\right)$$

$$= \langle AH, AX-Y\rangle + \frac{1}{2}\|AH\|^2$$

$$= {}^tH\,{}^tA(AX-Y) + \frac{1}{2}{}^tH\,{}^tAAH$$

$$= {}^tH\,({}^tAAX - {}^tAY) + \frac{1}{2}{}^tH\,{}^tAAH$$

$$= {}^tH\,(MX - {}^tAY) + \frac{1}{2}{}^tH\,{}^tAAH$$

$$= {}^tH\,D(X) + \frac{1}{2}{}^tH\,{}^tAAH$$

$$\boxed{= \langle D(X), H\rangle + \frac{1}{2}{}^tH\,{}^tAAH}$$

13) Supposons que J_0 possède un minimum global en un point $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

donc $\forall H \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$J_0(X+H) \geq J_0(X)$

donc $J_0(X+H) - J_0(X) \geq 0$

donc $\langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$

donc $\langle D(X), H \rangle \geq -\frac{1}{2} {}^tHMH$

j'admet ce sens de l'implication

Supposons que $D(X) = 0$

donc $\forall H \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$J_0(X+H) - J_0(X) = \langle D(X), H \rangle + \frac{1}{2} {}^tHMH$
$= \frac{1}{2} {}^tHM\cancel{H} \geq 0$

d'après la 11

donc $J_0(X+H) \geq J_0(X)$

$\boxed{\text{donc } D(X) = 0 \Rightarrow J_0 \text{ a un minimum global en } X}$

14) /

15) a) Soit $X \in S_0$

donc $D(X) = 0$
donc $MX - {}^tAY = 0$
donc $MX = {}^tAY$
donc $M^{-1}MX = M^{-1}\,{}^tAY$
donc $AM^{-1}MX = AM^{-1}\,{}^tAY$
$\boxed{\text{donc } AX = QY}$

15) b)

$A(X - X_0) = AX - AX_0$
$=$

on admet /

15) c) on admet /

16) a)

$\|QZ\|^2 = {}^tZ\,{}^tQ\,Q\,Z$
$= {}^tZ\,Q^2\,Z$
$= {}^tZ\,Q\,Z$

car Q est la matrice d'un projecteur orthogonal donc ${}^tQ = Q$
et Q matrice de projecteur donc $Q^2 = Q$

~~$T = \|A(X - C_0)\|^2$~~

$X = M^{-1}\,{}^tA\,Y$
et $Y = AC_0 + Z$

donc $X = M^{-1}\,{}^tA(AC_0 + Z)$
$= M^{-1}\,{}^tA\,A\,C_0 + M^{-1}\,{}^tA\,Z$
$= M^{-1}MC_0 + M^{-1}\,{}^tA\,Z$
$= C_0 + M^{-1}\,{}^tA\,Z$

donc $T = \|A(X - C_0)\|^2$
$= \|A(C_0 + M^{-1}\,{}^tAZ - C_0\|^2$
$= \|AC_0 + AM^{-1}\,{}^tAZ - AC_0\|^2$
$= \|AM^{-1}\,{}^tAZ\|^2$
$= \|QZ\|^2$
$= {}^tZQZ$

$\boxed{\text{ainsi } T = \|QZ\|^2 = {}^tZQZ}$

Copie anonyme - n°anonymat : 891092

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 17	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16) b)

```
def simuleT(A, sigma):
    Z = rd.normal(0, sigma, n)
    B = np.transpose(Z)
    H = np.dot(Calcule_Q(A), Z)
    T = np.dot(B, H)
    return T
```

16) c)

```
def esperance(A, sigma):
    E = 0
    for k in range(0, 1000):
        E = E + simuleT(A, sigma)
    D = E / 1000
    return D
```

16) d) les $(Z_k)_{k\in[[1,n]]}$ suivent donc des loi normale de paramètre $(0, 1)$ et sont indépendante

T étant une somme de loi normale indépendante, elle suit aussi une loi normale

son espérence est le nombre de colonne des $(A_k)_{k\in[[1,r]]}$ donc on peut conjecturer que T suit une loi normale dont le premier paramètre est le nombre de colonne des

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$(A_i)_{i\in[1,n]}$ qui sont leur rang car ce sont des matrices échelonnées

avec $b\in\mathbb{R}$

donc on conjecture que $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{N}(rg(A), b)}$

Pour l'autre : il semble que plus la variance des (z_i) est grande, plus l'espérance de T l'est

16) e) $z_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 6^2)$ a donc une variance

et d'après la formule de Koenig Huygens

$E(z_1^2) - E(z_1)^2 = V(z_1)$

donc $\boxed{E(z_1^2) = 6^2}$

d'après le théorème de transfert

$E(z_1^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{26^2}} dx$

$\hookrightarrow$ converge absolument car $\lim_{x\to\pm\infty} x^5 \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{26^2}} = 0$

par croissance comparée, donc comparaison de fonction positive

Or soit $g : x \mapsto x^3 \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{26^2}}$

$g(x) = -g(-x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{donc } E(z_1^3) = 0}$

et $E((z_1^2)^2) - E(z_1^2)^2 = V(z_1^2)$

donc $\boxed{E(z_1^4) = V(z_1^2) + \sigma^4}$

↳ je ne sais combien cela vaut

1) $T = {}^tZQZ$

donc $T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2 + \sum_{i>j}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} z_i z_j + \sum_{i<j}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$

~~$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2 + \sum_{i=j+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} z_i z_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i<j}^{n} Q_{ij} z_i z_j$~~

~~$= \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=}$~~

$\sum_{n\geq i>j\geq 1} Q_{ij} z_i z_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ji} z_i z_j$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j = T_2$

car Q symétrique (matrice de projection orthogonale

et $\sum_{n\geq j>i\geq 1} Q_{ij} z_i z_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} Q_{ij} z_i z_j = T_2$

donc $\boxed{T = T_1 + 2T_2}$

T_1 et T_2 admettent une variance

16) g) $E(T_1 T_2) = \mathrm{cov}(T_1, T_2) + E(T_1)E(T_2)$

$= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2, \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} Q_{lk} z_l z_k\right) + E(T_1)E(T_2)$

juste pour $l=i$ sinon indépendant par lemme de coalition

$= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} z_i^2, \sum_{k=i+1}^{n} Q_{ik} z_i z_k\right) + E(T_1)E(T_2)$

on admet

Partie 3 :

17) Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $u \neq 0$

$\forall t > 0$

$$\left(\frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t}\right)^2 = \frac{\|u+tv\|^2 - 2\|u+tv\|\|u\| + \|u\|^2}{t^2}$$

$$= \frac{2\|u\|^2 + 2t\langle u,v\rangle + t^2\|v\|^2 - 2\|u+tv\|\|u\|}{t^2}$$

on admet

20) a) Soit $(u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ avec $u \neq 0$

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \|v\|^2 + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} = \boxed{\frac{\|v\|^2\|u\|^2 + \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 891092

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 17

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

20)b) d'après l'inégalité de Cauchy Shwarz

$\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$

donc $\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 \geq 0$

et $u \neq 0$ donc $\|u\|^2 > 0$

donc $\dfrac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} \geq 0$

donc $\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2 \geq 0$

donc $\|u+v\|^2 \geq \left(\|u\| + \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$

et $\|u+v\| \geq 0$ et $\|u\| + \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} \geq 0$

donc $\|u+v\| \geq \|u\| + \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}$

donc $\boxed{\|u+v\| - \|u\| \geq \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}}$

21)a) $w \in \mathcal{N}(x_0)$ donc

$\|Bx_0\|w - Bx_0 = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE