Copie anonyme - n°anonymat : 350474

Z3-00011 350474 Mat Appro

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 28	Session : 2025

Épreuve de : MATHS. APPRO. HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1) Si l est nulle :

$\forall x \in E, \quad l(x) = 0 = \langle 0, x \rangle_E$

Donc il existe un unique $a_0 = 0_E$ tel que

$\forall x \in E, \quad l(x) = \langle a_0, x \rangle$

Si l est non nulle :

$\dim(\mathrm{Im}(l)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$

Or $\dim(\mathrm{Im}(l)) \geq 1$ car l est non nulle.

Donc $\dim(\mathrm{Im}(l)) = 1$ Donc $\mathrm{Im}(l) = \mathbb{R}$

Donc : $\exists \tilde{a}_0 \in \mathbb{R} / (\tilde{a}_0)$ soit une base de $\mathrm{Im}(l)$.

On a alors : $\forall x \in E, \quad l(x) = \langle x, \tilde{a}_0 \rangle \cdot \tilde{a}_0 = \langle x, \tilde{a}_0^2 \rangle$

car $\tilde{a}_0 \in \mathbb{R}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

En posant $a_0 = \tilde{a}_0^{2}$, on a alors :

$\forall x \in E, \; \ell(x) = \langle a_0, x \rangle$

Supposons maintenant qu'il existe $a_1 \in E$ tel que :

$$\begin{cases} a_1 \neq a_0 \\ \forall x \in E, \; \ell(x) = \langle a_1, x \rangle_E \end{cases}$$

On a alors :

D'une part,

$\ell(a_1 + a_0) = \langle a_0, a_1 + a_0 \rangle = \langle a_0, a_1 \rangle + \|a_0\|^2$

D'autre part,

$\ell(a_1 + a_0) = \langle a_1, a_1 + a_0 \rangle = \langle a_1, a_0 \rangle + \|a_1\|^2$

Ainsi : $\langle a_1, a_0 \rangle + \|a_0\|^2 = \langle a_1, a_0 \rangle + \|a_1\|^2$

Donc : $\|a_0\| = \|a_1\|$

De plus, on a :

D'une part,

$\ell(a_1 - a_0) = \langle a_0, a_1 \rangle - \|a_0\|^2$

D'autre part,

$\ell(a_1 - a_0) = -\langle a_0, a_1 \rangle + \|a_1\|^2$

Donc : $2 \langle a_0, a_1 \rangle = \|a_1\|^2 + \|a_0\|^2$

Donc : $\|a_1\|^2 - 2\langle a_0, a_1\rangle + \|a_0\|^2 = 0$

Donc : $\|a_1 - a_0\|^2 = 0$

Donc : $a_1 - a_0 = 0$

Donc $a_1 = a_0$.

Finalement : $\exists!\, a_0 \in E \,/\, \forall x \in E,\ \ell(x) = \langle a_0, x\rangle_E$

2) Soit $y \in F$.

$x \in E \mapsto \langle u(x), y\rangle_F$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

En effet :

Soit $(x, a, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$.

$\langle u(x+\lambda a), y\rangle_F = \langle u(x) + \lambda u(a), y\rangle_F$

car u est linéaire

$= \langle u(x), y\rangle_F + \lambda\langle u(a), y\rangle_F$

car $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ est bilinéaire.

De plus : $\langle u(x), y\rangle_F \in \mathbb{R}$ par définition du produit scalaire.

Ainsi, on peut appliquer la question 1 à cette application :

$\exists ! \, z_y \in E \, / \, \forall x \in E, \, \langle u(x), y \rangle_F = \langle z_y, x \rangle_E$

3) Soit $(x, y, \lambda) \in F^2 \times \mathbb{R}$.

$u^*(x+\lambda y) = z_{x+\lambda y}$

Or $z_{x+\lambda y} = z_x + \lambda z_y$.

En effet :

$\forall z \in E, \langle u(z), x+\lambda y \rangle = \langle z_{x+\lambda y}, z \rangle$

Donc : $\forall z \in E, \langle u(z), x \rangle + \lambda \langle u(z), y \rangle = \langle z_{x+\lambda y}, z \rangle$

Donc : $\forall z \in E, \langle z_x, z \rangle + \lambda \langle z_y, z \rangle = \langle z_{x+\lambda y}, z \rangle$

Donc par bilinéarité du produit scalaire dans E :

$\forall z \in E, \langle z_x + \lambda z_y - z_{x+\lambda y}, z \rangle = 0$

Ceci pour tout $z \in E$ donc :

$(z_x + \lambda z_y - z_{x+\lambda y}) \in E^{\perp}$

Or $(z_x + \lambda z_y - z_{x+\lambda y}) \in E$ par stabilité de E par les lois de compositions interne et externe.

Donc $z_x + \lambda z_y - z_{x+\lambda y} \in E \cap E^{\perp} = \{0\}$

Donc $z_x + \lambda z_y = z_{x+\lambda y}$

Finalement : $u^*(x+\lambda y) = z_{x+\lambda y} = z_x + \lambda z_y = u^*(x) + \lambda u^*(y)$

Donc u^* est linéaire.

4) ~~Soit $(x,y) \in E \times F$~~ Supposons par l'absurde que $\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*) \neq {}^t A$.

Soit $(x,y) \in E \times F$.

$$<u(x), y>_F = {}^t X {}^t A Y \neq <x, u^*(y)>_E$$

ce qui est absurde.

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*) = {}^t A$

On en déduit que :

- $rg(u^*) = rg({}^t A) = rg(A) = rg(u)$
- $\mathrm{Mat}_{B_F, B_E}((u^*)^*) = {}^t \mathrm{Mat}_{B_E, B_F}(u^*) = {}^t({}^t A) = A$

Donc $(u^*)^* = u$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$.

Il existe $x \in F$ / $u^*(x) = y$.

Soit $z \in \mathrm{Ker}(u)$.

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle &= \langle u^*(x), z \rangle \\ &= \langle x, u(z) \rangle \\ &= \langle x, 0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(u^*) \subset \mathrm{Ker}(u)^\perp$

d'après le théorème du rang

De plus : $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u) = p - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)^\perp)$

Donc $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$

6) • Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$

Alors $u^* \circ u(x) = u^*(0) = 0$ car u^* est linéaire

Donc $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

$\langle u^* \circ u(x), x \rangle = 0$

Donc $\langle u(x), u(x) \rangle = 0$ d'après (1).

Donc $\|u(x)\|^2 = 0$

Donc $u(x) = 0$

Donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$

Ainsi, on a :

$\dim(\mathrm{Im}(u^* \circ u)) = p - \dim(\mathrm{Ker}(u^* \circ u))$ d'après le théorème du rang

$= p - \dim(\mathrm{Ker}(u))$ ~~d'apr~~

~~$= \dim(\mathrm{Im}(u))$ d'après le théorème du rang~~

~~De plus~~ $= \dim(\mathrm{Ker}(u)^{\perp})$

$= \dim(\mathrm{Im}(u^*))$ d'après la question 5.

De plus, il est évident que $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^*)$

Finalement : $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)$

7) Montrons d'abord que v est ~~un endom~~ linéaire.

Soit $(x,y,\lambda) \in \mathrm{Im}(u^*)^2 \times \mathbb{R}$.

$v(x+\lambda y) = u^* \circ u(x+\lambda y)$

$= u^*(u(x)+\lambda u(y))$ car u est linéaire

$= u^*(u(x)) + \lambda u^*(u(y))$ car u^* est linéaire

$= u^* \circ u(x) + \lambda u^* \circ u(y)$

$= v(x) + \lambda v(y)$

Donc v est linéaire.

Montrons maintenant que v est injectif puis surjectif.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$. $\exists x \in F / u^*(x) = y$.

$y \in \mathrm{Ker}(v) \iff v(y) = 0$

$\iff u^* \circ u(y) = 0$

$\iff y \in \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$

$\iff y \in \mathrm{Ker}(u)$ d'après la question 6.

$\iff y \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u^*)$

$\iff y \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)^{\perp}$ d'après la question 5

$\iff y = 0_F$

Donc $\mathrm{Ker}(v) = \{0\}$.

Donc v est injectif.

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHS. APPRO. HEC / ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(u^*)) = \dim(\mathrm{Ker}(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w))$$

Donc : $\dim(\mathrm{Im}(u^*)) = \dim(\mathrm{Im}(w))$

Donc $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(w)$ par définition de w.

Donc w est surjectif.

Finalement w est un isomorphisme

Il vient alors que :

$W = {}^tAA$ est inversible (car W la matrice représentative de w dans la base $\mathcal{B}_F$)

Donc ${}^tAA$ est inversible.

On peut alors écrire :

$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \;/\; {}^tAAX = 0 \Rightarrow X = 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

8) a) Soit $x \in F$

Comme $F = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)^{\perp}$:

$\exists (x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(u) \times \mathrm{Im}(u)^{\perp} \,/\, x = x_1 + x_2$.

Ainsi, on a :

$$u^* \circ \pi(x) = u^* \circ \pi(x_1 + x_2)$$

$$= u^*(x_1) \quad \text{par définition de } \pi$$

$$= u^*(x_1) + u^*(x_2) \quad \text{car } x_2 \in \mathrm{Ker}(u^*)$$

En effet : $\mathrm{Im}(u)^{\perp} = \mathrm{Ker}(u^*)$ d'après la question 5.

Au final : $u^* \circ \pi(x) = u^*(x_1 + x_2)$ par linéarité de u^*

$$= u^*(x)$$

Ceci pour tout $x \in F$.

Donc $u^* \circ \pi = u^*$

Finalement ${}^{t}AQ = {}^{t}A$

b) $\mathrm{Tr}(Q) = \sum_{i=1}^{m} Q_{i,i}$

$$= \sum_{i=1}^{m} \pi(f_i)$$

Or : $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $\pi(f_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_i \notin \mathrm{Im}(u) \\ 1 & \text{si } f_i \in \mathrm{Im}(u) \end{cases}$

Ainsi : $Tr(Q)$ représente le nombre de vecteurs $(f_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ appartenant à $Im(u)$.

Or $(f_1, \dots, f_m)$ est libre (car c'est une base de F)

Donc en prenant uniquement les vecteurs de $(f_1, \dots, f_m)$ appartenant à $Im(u)$, on obtient une ~~famille libre~~ base de $Im(u)$ ($Im(u)$ étant inclus dans F).

Donc $Tr(Q)$ vaut le nombre de vecteurs dans une base de $Im(u)$.

Donc $Tr(Q) = rg(u)$.

9) ($\Leftarrow$) Supposons que $rg(A) = p$

Alors $rg({}^tA) = p$

Donc $rg(u^*) = p$

Donc $rg(u^* \circ u) = p$ d'après la question 6.

Donc $rg({}^tA A) = p$

Donc $rg(M) = p$

Donc M est inversible.

($\Rightarrow$) Supposons que M est inversible.

Alors $rg(M) = p$

donc $rg({}^t A A) = p$

donc $rg(u^* \circ u) = p$

donc $rg(u^*) = p$ d'après la question 6.

donc $rg({}^t A) = p$

Donc $rg(A) = p$

Finalement M est inversible si et seulement si $rg(A) = p$.

10) a) On sait que :

$${}^t A\, Q = {}^t A$$

Donc : $A M^{-1}\, {}^t A Q = A M^{-1}\, {}^t A$

~~Donc~~ : $\cancel{A M^{-1}\, {}^t A (Q - I_n) = 0}$

Donc : $A(M^{-1}\, {}^t A Q - M^{-1}\, {}^t A) = 0$

Donc : $M^{-1}\, {}^t A Q - M^{-1}\, {}^t A \in \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$

Donc $M^{-1}\, {}^t A Q = M^{-1}\, {}^t A$

b)

```
def Calcule_Q(A):
    if al.matrix_rank(A)==np.shape(A)[1]:
        return np.dot(A,np.dot(al.inv(np.dot(np.transpose
        (A),A)),np.transpose(A)))
    else :
        return('error')
```

Copie anonyme - n°anonymat : 350474

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHS. APPRO. HEC / ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$^tXMX = {}^tX\,{}^tAAX$$
$$= {}^t(AX)AX$$
$$= \|AX\|^2$$
$$\geq 0$$

Donc $^tXMX \geq 0$

Partie II

12) Soit $(X, H) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})^2$

$$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2}\left(\|A(X+H) - Y\|^2 - \|AX - Y\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|AX + AH\|^2 + \|Y\|^2 - 2<A(X+H), Y>\right.$$
$$\left. - \|AX\|^2 - \|Y\|^2 + 2<AX, Y>\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|AX\|^2 + \|AH\|^2 + 2<AX, AH>\right.$$
$$\left. - 2<AH, Y> - \|AX\|^2\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(\|AH\|^2 + 2 < AX - Y, AH >\right)$

$\cancel{= \frac{1}{2} {}^t(HA)H}$

$= \frac{1}{2}\left(< AH, AH > + 2\left({}^t(AX-Y)\, AH\right)\right)$

$= \frac{1}{2} {}^t(AH) AH + \left({}^tX\, {}^tA A - {}^tY A\right) H$

$= \frac{1}{2} {}^tH\, {}^tA A H + {}^t\left({}^tM X - {}^tA Y\right) H$

$= \frac{1}{2} {}^tH M H + {}^t\left(M X - {}^tA Y\right) H$

car ${}^t\cancel{A} = \cancel{A}$ $\left({}^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tA\, {}^t({}^tA) = {}^tAA = M\right)$

$= \frac{1}{2} {}^tH M H + < MX - {}^tAY, H >$

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} {}^tHMH + < D(X), H >$

13) ($\Rightarrow$) Supposons que J_0 possède un minimum global en un point $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Alors : $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(X+H) \geq J_0(X)$

i.e $J_0(X+H) - J_0(X) \geq 0$

donc d'après la question 12 : $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$< D(X), H > + \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$

On admet que cela implique que $D(X)=0$.

($\Leftarrow$) Supposons que $D(X)=0$. Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

Alors : $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(X+H) - J_0(X) = 0 + \frac{1}{2} {}^tHMH \geq 0$ d'après la question 11.

Donc : $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(X+H) \geq J_0(X)$.

Ainsi : $\forall Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J_0(Z) \geq J_0(X)$ en posant $H = Z - X$

Donc J_0 admet un minimum global en X.

Finalement J_0 admet un minimum global en un point $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $D(X)=0$.

14)

Soit $X \in \mathcal{S}_0 \cap \ker(A)^\perp$

On a alors :

$$\begin{cases} X \in \mathcal{S}_0 \\ X \in \mathrm{Im}({}^tA) \end{cases}$$ d'après la question 5.

Donc :

$$\begin{cases} D(X) = 0 \\ \exists Z \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tAZ = X \end{cases}$$

Donc $$\begin{cases} {}^tAAX - {}^tAY = 0 \\ \exists Z \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \ / \ {}^tAZ = X \end{cases}$$

On admet ce résultat

15) a)

$X \in \mathcal{S}_0$ donc $D(X) = 0$

i.e ${}^tAAX = {}^tAY$

donc $X = M^{-1}\,{}^tAY$

Au final : $AX = AM^{-1}\,{}^tAY = QY$ d'après la question 10) a)

Copie anonyme - n°anonymat : 350474

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHS. APPRO. HEC / ESSEC

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) Remarquons que $X \in S_0$ et $X_0 \in S_0$ donc

d'après la question précédente :

$$\begin{cases} AX = QY \\ AX_0 = QY \end{cases}$$

Ainsi : $A(X - X_0) = AX - AX_0 = QY - QY = 0$

Donc $X - X_0 \in \operatorname{Ker}(A)$

Ainsi, si $X \neq X_0$, on a :

$$X - X_0 \neq 0$$

Donc

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $rg(A) = p$

donc d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$

Or $X - X_0 \in \mathrm{Ker}(A)$

Donc $X - X_0 = 0$

Donc $X = X_0$.

Donc $S_0 \cap \mathrm{Ker}(A)^\perp = \{X\}$

Or $\mathrm{Ker}(A)^\perp = F$ car $\mathrm{Ker}(A) = \{0_F\}$

Donc $S_0 = \{X\}$

De plus : $AX = QY$

Donc $AX = AM^{-1}\,{}^t\!AY$ d'après la question 10) a)

Donc $A(X - M^{-1}\,{}^t\!AY) = 0$

Donc $(X - M^{-1}\,{}^t\!AY) \in \mathrm{Ker}(A)$

Donc $X - M^{-1}\,{}^t\!AY = 0$ car $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

Donc $X = M^{-1}\,{}^t\!AY$

16) a)

$$T = \| AX - AU_0 \|^2$$

$$= \| QY - Y + Z \|^2$$

$$=$$

b)
```
def simuleT(A, sigma):
        Z = np.transpose([rd.normal(0, sigma) for k
        in range(np.shape(A)[1]) ])
        return np.dot(np.transpose(Z), np.dot(Calcule_Q(A), Z))
```

c)
```
def esperance(A, sigma):

        return np.sum([simuleT(A, sigma) for k in range(10000)])
        /10 000
```

d) Lorsque les $(Z_1, \ldots, Z_n)$ suivent une loi normale centrée - réduite, on peut conjecturer que $E(T) = rg(A)$.

Avec ce nouveau programme, on peut conjecturer

que : $E(T) = \cancel{\sigma} \cancel{\lambda}$

e). $E(z_1^2) = V(z_1) - E^2(z_1)$

$= \sigma - 0$

$= \sigma$

$\cdot E(z_1^4) = V(z_1^2) - E^2(z_1^2)$

$=$

Copie anonyme - n°anonymat : 350474

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHS. APPRO. HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie III

17) Soit $t \in]-1,1[\setminus t \neq 0$

$$\left(\frac{\|u+tv\| - \|u\|}{t}\right)^2 = \|u\|^2 + \|tv\|^2 + 2\langle u, tv\rangle$$

18) Supposons que $BX_0 \neq 0$.

$J(X_0) = J_0(X_0) + \|BX_0\|^{2}$

Ainsi : $\forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$J(X_0+H) - J(X_0) = J_0(X_0+H) - J_0(X_0) + \|B(X_0+H)\|^2 - \|BX_0\|^2$

$= \langle D(X_0), H \rangle + \frac{1}{2} {}^{t}HMH + \|B(X_0+H)\|^2 - \|BX_0\|^2$

20) a)

$$\|u+v\|^2 - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)^2$$

$$= \|u+v\|^2 - \left(\|u\|^2 + 2\,\|u\|\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|} + \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}\right)$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle - \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \frac{\|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

b) $\cancel{\left(\|u+v\| - \|u\|\right)^2 = \|u+v\|^2 - 2\|u\|\,\|u+v\| + \|u\|^2}$

On a alors :

$$\cancel{\frac{\|u\|^2\,\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}}$$

$$\left(\frac{\|u\|\,\|v\| - \langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\left(\frac{\|u\|\,\|v\| + \langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)$$

$$= \left(\|u+v\| + \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\right)\left(\|u+v\| - \left(\|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right)\right)$$

par identités remarquable.

Donc : $\left(\|u+v\| - \|u\| - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right) = \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$

$$\frac{1}{\|u+v\| + \|u\| + \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}} \geq 0$$

Donc finalement :

$$\|u+v\| - \|u\| \geq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|}$$

21) a)

$$\|BX\| - \|BX_0\| = \|BX_0 + B(X-X_0)\| - \|BX_0\|$$

$$\geq \frac{\langle BX_0, B(X-X_0)\rangle}{\|BX_0\|}$$

d'après la question 20) b).

$$\cancel{\geq \|BX_0\| \cdot \|B(X-X_0)\|}$$

$$= \frac{1}{\|BX_0\|} {}^tX_0 {}^tB \; B(X-X_0)$$

$$= \frac{{}^t({}^tB B X_0)}{\|BX_0\|} (X-X_0)$$

$$= {}^tW \; (X-X_0)$$

$$= \langle W, X-X_0\rangle$$

Finalement, $\|BX\| - \|BX_0\| \geq \langle W, X-X_0\rangle$

b) $J(X) - J(X_0) = \frac{1}{2}\|AX-Y\|^2 + \|BX\|^2 - \frac{1}{2}\|AX_0-Y\|^2 - \|BX_0\|^2$

$$\geq \frac{1}{2}\left({}^t(AX-Y)(AX-Y) - {}^t(AX_0-Y)(AX_0-Y)\right)$$

$+ \langle W, X-X_0\rangle$ d'après la question 21)a)

Copie anonyme - n°anonymat : 350474

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHS . APPRO . HEC / ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $J(X) - J(X_0) \geq \frac{1}{2}\left({}^tX\,{}^tAAX - {}^tX\,{}^tAY - \|Y\|^2 - {}^tX_0\,{}^tAAX_0 + {}^tX_0\,{}^tAY + \|Y\|^2\right)$

$+ \langle W, X - X_0 \rangle$

$\cancel{\geq \frac{1}{2}\left(X - X_0\right)\left(\right.}$

$\cancel{\geq \frac{1}{2}\left({}^tXA\right.}$

$\geq \frac{1}{2}\,{}^t(X - X_0)(MX - {}^tAY + MX_0 - {}^tAY)$

$+ \langle W, X - X_0 \rangle$

$\geq \frac{1}{2}\,{}^t(X - X_0)(2MX_0 - 2\,{}^tAY)$

$+ \langle W, X - X_0 \rangle$

$\geq {}^t(X - X_0)(MX_0 - {}^tAY)$

$+ \langle W, X - X_0 \rangle$

$\geq \langle X - X_0, D(X_0) \rangle + \langle W, X - X_0 \rangle$

Ainsi par bilinéarité du produit scalaire :

$J(X) - J(X_0) \geq \langle D(X_0) + W, X - X_0 \rangle$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

22) On en déduit que : ~~.~~ $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ réalise un minimum global de J

$$\Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ J(X) \geq J(X_0)$$

$$\Longleftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \forall W \in \mathcal{N}(X_0),$$

$$< D(X_0) + W, X - X_0 > = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall\ W \in \mathcal{N}(X_0),\ D(X_0) + W = 0$$ car la ligne au-dessus était pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\Longleftrightarrow \forall\ W \in \mathcal{N}(X_0),\ -D(X_0) = W$$

$$\Longleftrightarrow -D(X_0) \in \mathcal{N}(X_0)$$

23) a)

Remarquons d'abord que :

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ \forall i \in [\![1, r]\!],\ \frac{\alpha_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \leq \frac{1}{4\lambda}$$

En effet : Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit $i \in [\![1, r]\!]$

$$\frac{\alpha_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} = \frac{\alpha_i^2}{\lambda^2 + 2\lambda\alpha_i^2 + \alpha_i^4} \leq \frac{\alpha_i^2}{4\lambda\alpha_i^2} = \frac{1}{4\lambda}$$

Ainsi : $\forall \lambda \in]0, +\infty[$,

$$F(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^2\ y_i^2}{(\lambda + \alpha_i^2)^2} \leq -1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{4\lambda} = -1 + \frac{1}{4\lambda} \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

b) $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

il est clair que

d) i)

```
def EcartSom(alpha, Y, lda):
        F = -1
        for k in range(0, np.shape(Y)[1]+1):
                F = F + (alpha[k]**2)*(Y[k]**2)/
                (lda + alpha[k]**2)**2
        return F
```

ii)

```
def CalcBeta(alpha, Y, epsilon):
    a = 0
    b = (1/Y)* np.sum(Y[k]**2 for k in range(0, np.shape(Y)+1))
    c = (a+b)/2
    while np.abs(EcartSom(alpha, Y, c)) > epsilon:
        if EcartSom(alpha, Y, c)* EcartSom(alpha, Y, a) >0:
            a = c
        else:
            b = c
    return c
```

iii)

```
def CalcSolution(alpha, Y, epsilon):
    ~~return~~
    B = np.diag(alpha)
    V = np.zeros
```