Concours blanc national 2026
Prépa HEC 2ème année
Mathématiques toutes options

MATHEMATIQUES
Lundi 23 février 2026

Problème 1. Matrices dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes : (Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ; (Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathscr{D}_n$.

2. Si M est une matrice de $\mathscr{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $\mathrm{M} + \alpha \mathrm{I}_n$ est encore un élément de $\mathscr{D}_n$.

3. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathscr{D}_n$.

   (b) L'ensemble $\mathscr{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

4. (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

   (b) En déduire que l'ensemble $\mathscr{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{D}_3$. Cette matrice est-elle diagonalisable?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $\mathrm{M}(t)$ selon la valeur de t. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\mathrm{M}(t)$ appartient à $\mathscr{D}_3$.

   (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $\mathrm{M}(t)$ est diagonalisable.

PARTIE II. MATRICES NILPOTENTES

Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

7. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M.

8. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.
   Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

   (a) Montrer les inclusions $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}\left(u^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(u^2\right) \subset \mathrm{Ker}\left(u^3\right)$.

   (b) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}\left(u^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(u^3\right)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.

   (c) Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}\left(u^2\right)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

   (d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

9. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   On définit les réels $\gamma(\mathrm{M}) = ac + df + be$ et $\delta(\mathrm{M}) = bcf + ade$.

   (a) Établir l'égalité
   $$\mathrm{M}^3 = \gamma(\mathrm{M})\mathrm{M} + \delta(\mathrm{M})\mathrm{I}_3.$$

   (b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(\mathrm{M})$ et $\delta(\mathrm{M})$ sont nuls.

   (c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.
   Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

   (d) En déduire que l'ensemble $\mathscr{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

   (e) Exhiber une matrice de $\mathscr{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Problème 2. Variables aléatoires discrètes et à densité

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\mathrm{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Dans la partie I, la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement, F_X et f_X. On admet que les formules donnant l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires discrètes, ainsi que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité.

La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Loi exponentielle

1. (a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$. Établir pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$. On pose alors :
$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$
et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt.$$
   (b) Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

2. Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
Justifier les relations : $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

3. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leqslant x])$, pour tout réel x.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

4. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

5. (a) Montrer que pour tout réel t, on a :
$$F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$
Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
   (b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que
$$E(T) = \frac{3}{2\lambda} \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{5}{4\lambda^2}.$$
(on pourra utiliser des changements de variables affines)

6. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

7. (a) Préciser $Y(\Omega)$ et $|Y|(\Omega)$.
   (b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.

(c) Montrer que pour tout réel y, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$$

est convergente et qu'elle vaut

$$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}.$$

(on distinguera les deux cas : $y \geqslant 0$ et $y < 0$)

(d) Établir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$; on admet que c'est une densité de la variable aléatoire Y.

(e) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie II. Loi géométrique

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\dfrac{1}{p}$). On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

8. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$ et $V(X_1 - X_2)$.

   (c) Établir la relation :

$$P([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}.$$

9. (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.

   (b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité :

$$[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k].$$

   En déduire la relation suivante :

$$P([T = k]) = 2P([X_1 = k]) - P([Z = k]).$$

   (c) Établir la formule :

$$V(T) = \frac{q\left(2q^2 + q + 2\right)}{\left(1 - q^2\right)^2}.$$

10. (a) Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'événement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des événements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$. En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z = j] \cap [Z = T])$.

    (b) Montrer que pour tout couple (j, ℓ) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$P([Z = j] \cap [T - Z = \ell]) = 2p^2 q^{2j+\ell-2}.$$

    (c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$,

$$P([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1+q}$$

    (on distinguera 3 cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$).

    (d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

    (e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables aléatoires Z et $T - Z$ sont indépendantes.

11. (a) À l'aide du résultat de la question 10.e, calculer $\mathrm{Cov}(Z, T)$. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes?

    (b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

    (c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).

    (d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'événement $[Z = j]$.

    (e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'événement $[Z = j]$. Calculer $E(D_j)$.