Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : MathST ESCP BS

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

partie 1

1)

~~a/ On a~~ $\cancel{A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{5}{27} & \frac{17}{27} \end{pmatrix}}$

~~et donc~~ $\cancel{A^2 - \frac{4}{3} A + \frac{1}{3} I}$

$\cancel{= \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{5}{27} & \frac{17}{27} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{27} & \end{pmatrix}}$

A est une matrice carrée d'ordre 2.
un polynôme annulateur est donc donné ainsi :

$$X^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) X + \det(A)$$

$$= X^2 - \frac{4}{3} X + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

$$= X^2 - \frac{4}{3} X + \frac{1}{3}$$

b/ Comme $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$ est un polynôme annulateur de A, alors ses racines sont des valeurs propres possibles de A.

On a $\Delta = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{3}$

$= \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$

donc $x_1 = \dfrac{\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{9}}}{2} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

et $x_2 = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{\frac{6}{3}}{2} = 1$

1 et $\frac{1}{3}$ sont deux valeurs propres éventuelles de A.

c/ On a $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

et $A\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

On en déduit que $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres 1 et $\frac{1}{3}$.

2)

a/ On a $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_2$

b/

On a $PQ = 6I_2 \Rightarrow P \cdot \frac{1}{6}Q = I_2$

On en conclut que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$.

c/

On a $AP = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

et on a $PD = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = AP$

On a $AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1}$ (par inversibilité de P)

et comme D est diagonale et $\text{Spect}(A) = \text{diag}(D)$

alors A est bien diagonalisable.

d/

* pour $n=0$, on a $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_2$ (la proposition est donc valide pour $n=0$)

* soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et prouvons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

On a par hypothèse de récurrence :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

donc $A^{n+1} = PD^nP^{-1}A$

$= PD^nP^{-1} \cdot PDP^{-1}$ (cf d(c))

$= PD^n I_2 DP^{-1}$

$= PD^nDP^{-1}$

$= PD^{n+1}P^{-1}$

* par récurrence, on a $(\forall n \geq 0)$
$A^n = PD^nP^{-1}$.

e/
On a $(\forall n \in \mathbb{N})$ $A^n = PD^nP^{-1}$ (cf (2d))

d'abord $(\forall n \geq 0)$ $PD^n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$

(car D est diagonale)

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$
$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ 1 & -\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$

3)

a/
On a $(\forall n \in \mathbb{N})$ $X_{n+1} = \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} U_n + V_n \\ \frac{1}{9} U_n + \frac{2}{3} V_n \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285 **Nombre de pages :** 33 **Session :** 2025

Épreuve de : Maths T ESCP BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

$$= A X_n$$

b/ procédons ici par récurrence.

- pour $n=0$, on a $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$
  (par position valide pour $n=0$)

- soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $X_n = A^n X_0$
  et prouvons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$

  on a $X_{n+1} = \cancel{X_n} \, A X_n$ (cf 3(a))

  $= A . A^n X_0$ (par hypothèse)

  $= A^{n+1} X_0$

- par récurrence, on a $(\forall n \geq 0)$ $X_n = A^n X_0$

c/

on a $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

(cf 2(e) et 3(b))

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)U_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)V_0 \\ \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)U_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)V_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} U_n = \frac{1}{6}\left(\left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)U_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)V_0\right) \\ V_n = \frac{1}{6}\left(\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)U_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)V_0\right) \end{cases}$

d/

il convient donc de trouver les limites de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{6}(3U_0 + 9V_0)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{6}(U_0 + 3V_0)$

comme $U_0 > 0$ et $V_0 > 0$

et les limites de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des réels strictement positifs

alors il y a un équilibre entre les naissances et les décès.

4)

a/
on peut choisir Enclos pour clé primaire pour la table Animaux puisqu'il caractérise une seule catégorie d'espèce d'animal.

b/
Select Type From ALIMENTATION;

c/
```
Select Espèce
From ANIMAUX
Where count("Adultes") >= 6
```

d/
```
Select Espèce, Effectif
From ANIMAUX join ALIMENTATION
on Animaux.Espèce = ALIMENTATION.Espèce
Where Tarif < 15
```

Partie II.

5)
a/

on a $(\forall n \in \mathbb{N})$ $W_{n+1} = r W_n + W_n$
$= \cancel{r(W)}$
$= (r+1) W_n$

Ainsi, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $(r+1)$

Ainsi, $(\forall n \geq 0)$ $W_n = W_0 \times (r+1)^n$

b/

On sait bien que la population $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croit avec une proportion fixe de $(r+1)$ qui doit être positive ou nulle.

c'est-à-dire : $r+1 \geq 0$

et $r \geq -1$

~~voici~~ d'où le choix de $r \in [-1, +\infty[$.

c/

Si $r \in [-1, 0[$:

alors $0 \leq r+1 < 1$

et donc $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$ car $(r+1) \in]-1, 1[$)

Dans ce cas, il y aura extinction de la population

Si $r = 0$.

alors $(r+1) = 1$

dans ce cas $\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} W_0 = W_0$

Dans ce cas il y aura une survie de la population.

Si $r > 0$, alors $(r+1) > 1$

Dans ce cas $\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} W_0 \times (1+r)^n = +\infty$

car $(r+1) > 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 33 | Session : 2025

Épreuve de : Maths T ESCP BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Dans ce cas, on aura une explosion de la population.

Le modèle reste donc réaliste.

On a $W_{n+1} - W_n = r W_n$

le cas où $r \in [-1, 0[$ signifie que la population est en recule et elle atteindrait 0

le cas où $r = 0$, signifie que la population ne varie pas et donc elle vaut toujours sa première taille, soit W_0.

le cas où $r \in]$ $r > 0$ signifie que la population va toujours augmenter.

6)

a)

On a $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha x \left(1 - \frac{1}{\beta} x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha x = 0$ ou $\frac{1}{\beta} x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \beta$ (car $\alpha > 0$)

Les solutions sont 0 et β

ii/

f est d'abord dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par produit des fonctions qui le sont également.

Ainsi, $\forall x \geqslant 0$:

$$f'(x) = \left(\alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right)\right)'$$
$$= (\alpha x)'\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right) + \alpha x\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right)'$$
$$= \alpha\left(1 - \frac{1}{\beta}x\right) + \alpha x\left(-\frac{1}{\beta}\right)$$
$$= \alpha - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha x}{\beta}$$
$$= \alpha\left(1 - \frac{2x}{\beta}\right)$$

Tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$

x	0		$\frac{\beta}{2}$		β		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$			
f	0	$\nearrow$	$\frac{\alpha\beta}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $(*)$

$(*)$ Car $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{\beta}x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha x = +\infty$

10/30

b) i/

On a $g(x)=0$

$\Leftrightarrow f(x)+x=0$

$\Leftrightarrow \alpha x\left(1-\frac{1}{\beta}x\right)+x=0$

$\Leftrightarrow x\left(\alpha\left(1-\frac{1}{\beta}x\right)+1\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\alpha-\frac{\alpha}{\beta}x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\frac{\alpha}{\beta}x=\alpha+1$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\beta$

et on a $g(x)=x$

$\Leftrightarrow x+f(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\beta$

et finalement $g(x)=\beta$

$\Leftrightarrow f(x)+x=\beta$

$\cancel{\Leftrightarrow \alpha x\left(1-\frac{1}{\beta}x\right)+x=\beta}$

$\Leftrightarrow$

On remarque d'après le tableau de variation de f que $\beta+f(\beta)=\beta+0=\beta$

Ainsi $x=\beta$

~~parisw~~ f admets $\frac{\beta}{\alpha}$ comme une autre solution.

ii/ On a d'abord

$$\beta < \frac{\alpha+1}{2\alpha}\beta \quad (1)$$

car $\frac{\alpha+1}{2\alpha} > 1$

comme $\alpha+1 > 2\alpha$

$(\alpha+1-2\alpha = 1-\alpha \quad (\alpha \in]0,1[)$

en suite.

$$\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)\beta - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta+\beta-2\beta}{2\alpha}$$

$$= \frac{\beta(\alpha-1)}{2\alpha} < 0$$

car $\alpha < 1$

ce qui donne $\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)\beta < \frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$

et on a $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$ (car $\frac{\alpha+1}{\alpha} > 1$) (3)

Ainsi, par (1), (2) et (3) :

$$\beta < \frac{(\alpha+1)}{2\alpha}\beta < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$

iii/ On a $g'(x) = (x+f(x))'$

$$= 1+f'(x)$$

$$= 1+\alpha\left(1-\frac{2x}{\beta}\right)$$

On a $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(1-\frac{2x}{\beta}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2x\alpha}{\beta} = -1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x\alpha}{\beta} = \alpha+1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$$

Tableau de variation de g sur $[0,+\infty[$

x	0	β	$\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$	$+\infty$
g'		$+$	0		$-$	
g	0	$\nearrow$ β	$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right)$	$\searrow$ β	0	$-\infty$

c/ • pour $n=0$, on a $W_0 \in]0,\beta]$ par l'énoncé.
(la proposition est valide dans ce cas)

• Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $W_n \in]0,\beta]$ et prouvons que $W_{n+1} \in]0,\beta]$ l'est aussi.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a par hypothèse de récurrence :

$$0 \leq w_n \leq \beta$$

donc par croissance de g sur $[0, \beta]$

$$g(0) \leq g(w_n) \leq g(\beta)$$

donc $0 \leq w_{n+1} \leq \beta$

• par récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
$w_n \in [0, \beta]$

ii/

D'après le tableau de signe de f (cf f(6a)ii))

on a f positive sur $[0, \beta]$ et négative sur $[\beta, +\infty[$.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$w_{n+1} - w_n = f(w_n)$$

or, $w_n \in [0, \beta]$.

donc $f(w_n) \geq 0$

et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

iii/

On a bien $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée par β et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi, par théorème de la limite monotone. $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

iv/

puisque $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $(\forall n\in\mathbb{N})$

$$W_n \geq W_0$$

et en faisant entrer la limite:

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} W_0$$

d'où $\ell \geq W_0$

V.

On a $\lim_{n\to+\infty} W_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} W_n = \ell$.

en résout

Ainsi, $g(\ell) = \ell$

D'après 6(b)i les solutions sont 0 et β.

Or, $W_0 > 0$ et $W_0 \geq \ell$.

Ainsi, $\ell = \beta$.

comme β est une constante positive. alors la population est dans une situation de survie.

d/

i/

on a $g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) = \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} + \left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right)\alpha\left(1 - \frac{(\alpha+1)\beta}{\beta\, 2\alpha}\right)$

$= \left(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right) + \frac{(\alpha+1)\beta}{2}\left(1 - \frac{\alpha+1}{2\alpha}\right)$

$=$

J'admets que $g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) < \frac{\beta}{\alpha}$.

* prouvons par récurrence que $w_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$

* pour $n=0$, on a $w_0 \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$ déjà supposé par l'énoncé.

* soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $w_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$ et prouvons que $w_{n+1} \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$.

on a

$\beta \leq w_n$

donc $g(\beta)$

* prouvons par récurrence que $w_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$

→ pour $n=0$, on a $w_0 \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$ déjà supposé par l'énoncé.

→ Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $w_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$ et montrons que $w_{n+1} \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 289 | Nombre de pages : 33 | Session : 2025

Épreuve de : MATHS T ESCP BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'après le tableau de variation de g.

g est majorée par $g\left(\frac{\alpha+1}{\alpha\beta}\beta\right)$ sur $\mathbb{R}^+$

Ainsi, comme $w_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$ par hypothèse de récurrence.

alors $g(w_n) \in [\beta, g(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\beta)]$

or, $\frac{\beta}{\alpha} > g(\frac{\alpha+1}{2\alpha}\beta)$

et donc $w_{n+1} \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$

+ par récurrence, on a $(\forall n \in \mathbb{N})$ $w_n \in [\beta, \frac{\beta}{\alpha}]$.

ii/

on a $\cancel{g(w_n) - g(w_n}$ $(\forall n \geq 0)$

$w_{n+1} - w_n$

$= f(w_n)$

or, comme $w_n \geq \beta$
alors $f(w_n) \leq 0$

et donc $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

iii/

puisque $W_n \geq \beta$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

alors par théorème de la limite monotone.

$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers un réel. l.

~~et par la monotonie de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.~~

~~$W_n \leq W_0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.~~

~~donc $l \leq W_0$.~~

et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_{n+1} = l$.

donc l est la solution de $g(l) = l$.

ayant pour solution 0 et β.

or, $(\forall n\in\mathbb{N})$ $W_n \in \left[\beta, \frac{\beta}{\alpha}\right]$

et donc $l = \beta$.

comme $\beta > 0$ alors on peut dire que la population est en survie.

e/

i/

on a $\frac{\beta}{\alpha} \leq W_0 \leq \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$

donc par décroissance de g sur $[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}]$

(cf 6(b)iii)

$$g\left(\frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right) \leq g(w_0) \leq g\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

donc $0 \leq w_1 \leq \beta$.

ii) D'après 6(c). $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et admet la limite β si et seulement si $(\forall n\in\mathbb{N})\ w_n \in]0, \beta]$.

Dans ce cas, prouvons que $w_n \in [0, \beta]$

* pour $n=1$, $w_1 \in]0, \beta]$. (cf 6(e)i)

* supposons pour $n \geq 1$, que $w_n \in [0, \beta]$ et prouvons que $w_{n+1} \in [0, \beta]$.

On a par hypothèse de récurrence:

$$0 \leq w_n \leq \beta$$

donc $g(0) \leq g(w_n) \leq g(\beta)$ (croissance de g)

d'où $0 \leq w_{n+1} \leq \beta$.

* par récurrence, $w_n \in [0, \beta]$.

et donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge et admet β comme limite.

3/ si on prend $w_0 \geq \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$

on aura dans ce cas, d'après le tableau de variation de g, ($\forall n \in \mathbb{N}^*$ | $w_n \in]-\alpha, 0]$.

ce qui n'est pas possible comme on mesure une population qui ne peut pas avoir une valeur négative.

le choix ne serait pas judicieux.

Exercice 2.

1) a/

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def deplacement_pion(n, k):
        position = np.zeros(k+1)
        for j in range(0, k):
            bille = rd.randint(1, n+1)
            if position[j] < bille :
                position[j+1] = position[j]+1
            else :
                position[j+1] = position[j] - 1
        return(position)
```

b/

```
L = deplacement_pion(20, 10):
print(L[-1])
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : MATHS T ESCP BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c/

le script permet de calculer la ~~moyen~~ position moyenne du pion dans 1000 expériences, avec 10 billes et 100 déplacements.

Ainsi, 5,054 est la position moyenne du pion dans 1000 répétitions d'une même expérience avec 10 billes et 100 déplacements du pion.

2)

À l'instant initial, le pion est sur 0. puisque les ~~boules~~ billes sont numérotés de 1 à n.

alors le numéro choisi sera toujours supérieur à 0 et le pion se déplacera toujours vers 1.

Ainsi, $X_1 = 1$.
et $E(X_1) = 1$.

3)

le pion est toujours sur 1 à l'instant 1. À l'instant 2, il sera sur 2 s'il la bille tirée a un numéro différent 1 et il revient à 0 sinon.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, $X_2(\Omega) = \{0, 2\}$

et on a $p(X_2 = 2) = \frac{n-1}{n}$ (n-1 billes differentes de 1)

et $p(X_2 = 0) = \frac{1}{n}$ (la bille 1)

et alors $E(X_2) = 0\,p(X_2 = 0) + 2\,p(X_2 = 2)$

$= \frac{2(n-1)}{n}$

4)

Le pion peut ~~mmm~~ se déplacer entre l'origine de l'axe et le nombre total des billes

Car en effet le moment où le pion arrive ~~en l'abscisse~~ à la position n, la bille tirée va avoir forcément une valeur inférieur ou égale à n. Dans ce cas, le pion va commencer de revenir en arrière sans qu'il puisse dépasser n.

Ainsi, pour tout $k \geq 1$ $X_k(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$

5)

Puisque le pion ne se déplace que par unité, alors pour que $[X_{k+1} = 0]$ soit réalisé, il faut que le pion soit sur 1 à l'instant k et qu'on obtient la bille 1, parmi les n billes.

ce qui correspond donc à

$$P(X_{k+1}=0) = \frac{1}{n} P(X_k = 1)$$

De même, pour que $[X_{k+1} = n]$ soit réalisé, il faut que le pion sur la position $n-1$ à k et qu'on obtient la seule bille "n" parmi les n billes. ce qui correspond aussi à $P(X_{k+1}=n) = \frac{1}{n} P(X_k = n-1)$

6)

a/ il faut que la bille tirée ~~sur~~ ait un numéro supérieur strictement à $\ell-1$ ce qui correspond à $n-\ell+1$, billes au total.

La probabilité vaut donc $\frac{n-\ell+1}{n}$

b/ il faut dans ce cas que la bille tirée ait un numéro inférieur ou égal à $\ell+1$ ce qui correspond à $\ell+1$, billes parmi les n billes existantes.

La probabilité est donc $\frac{\ell+1}{n}$

c/ Pour $\ell \in [1, n-1]$, on a par formule de probabilité totale :

$$P(X_{k+1}=\ell) = P_{[X_k=\ell]}(X_{k+1}=\ell) \cdot P(X_k=\ell)$$

$$+\ P_{[X_k = \ell+1]}(X_{k+1} = \ell) \cdot P(X_k = \ell+1)$$

$$= \frac{n-\ell+1}{n} P(X_k = \ell-1) + \frac{\ell+1}{n} P(X_k = \ell+1)$$

(D'après 6(a) et 6(b))

7)

On a

$$E(X_{k+1}) = \sum_{\ell=0}^{n} \ell P(X_{k+1} = \ell)$$

$$= n P(X_{k+1} = n) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell P(X_{k+1} = \ell)$$

$$= P(X_k = n-1) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell P(X_{k+1} = \ell)$$

$$= P(X_k = n-1) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n-\ell+1}{n} \cdot \ell P(X_k = \ell-1)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell+1}{n} \ell P(X_k = \ell+1)$$

$$= P(X_k = n-1) + \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{n-(\ell+1)+1}{n} (\ell+1) P(X_k = \ell)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{n-1}$$

J'admets que $E(X_{k+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(X_k)$

par manque de temps !

8)

a/ D'après la forme de $(E(X_m))_{m \geq n}$.

elle est une suite arithmético-géométrique.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : MATHS T ESCP BS

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b/

On a $x = 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x$

$$\Leftrightarrow x = 1 + x - \frac{2x}{n}$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 - 1 + \frac{2}{n}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{2}{n}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{n}{2}$$

c/

On a $x_{k+1} = E(X_{k+1}) - x$

$$= 1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E(X_k) - \frac{n}{2}$$

$$\cancel{= 1 + E(X_k) - \frac{2}{n}E(X_k) - \frac{n}{2}}$$

$$\cancel{= \left(1 - \frac{n}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right)E(X_k)}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(E(X_k + \frac{1}{1-\frac{2}{n}} - \frac{\frac{n}{2}}{1-\frac{2}{n}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(E(X_k) + \frac{\frac{2-n}{2}}{\frac{n-2}{n}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(E(X_k) - \frac{n}{2}\right)$$

et donc $x_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) x_k$

On en déduit que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique

et $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$x_k = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-1} \cdot x_1$$

Exercice 3.

partie 1

1)

* Continuité et positivité.

* pour $t \in [0,1]$

f_0 est continue car polynômiale et positive car $t \geq 0$ et $\alpha > -1$

* pour $t \notin [0,1]$ f est continue car constante et positive car nulle.

Ainsi, f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points.

* Convergence.

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_0(t)\,dt + \int_0^1 f_0(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f_0(t)\,dt$ (relation de Chasles)

$= \int_0^1 f_0(t)\,dt = \int_0^1 (\alpha+1)t^\alpha\,dt$

$= \left[t^{\alpha+1}\right]_0^1 = 1$

Ainsi, f_0 peut être considérée comme densité de probabilité.

2)

a/ f est bien dérivable sur $]0,1[$ puisqu'elle est une fonction polynômiale.

et on a $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$

et $\lim_{t \to 1^-} f(t) = (\alpha+1)(-1)^{\alpha}$ (Deux limites finies)

Ainsi, f_0 est dérivable sur $[0,1]$

b/

~~on~~ on procède à une récurrence.

* Pour $n=0$, on a $f_0 \cdot \alpha^0 = 1 f(\alpha) = f_0$ (la proposition reste valide)

* Soit n de $\mathbb{N}$, Supposons que $f_n = \alpha^n f_0$ et montrons que $f_{n+1} = \alpha^{n+1} f_0$.

On a $f_{n+1}(t) = \begin{cases} t f_n'(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} t(\alpha^n f_0)' & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 289

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Emplacement QR Code

Épreuve de : MATH

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= \begin{cases} t \cdot \alpha^n \cdot \alpha(\alpha+1) t^{\alpha-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha^{n+1}(\alpha+1) t^{\alpha} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \alpha^{n+1} g_0$$

• par récurrence, $g_n = \alpha^n g_0$.

c/

$c_n g_n$ est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement un nombre fini de points.

• il nous reste de trouver $\int_{-\infty}^{+\infty} c_n g_n(t)\,dt = 1$, avec c_n un réel positif.

Il va donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_n f_n(t)dt = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 c_n f_n(t)dt = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 c_n . \alpha^n f_0 \, dt = 1$$

$$\Leftrightarrow c_n \alpha^n \int_0^1 f_0(t)dt = 1$$

$$\Leftrightarrow c_n \alpha^n = 1 \; (cf \; (1))$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{\alpha^n}$$

$c_n f_n$ peut être densité si $c_n = \frac{1}{\alpha^n}$

d/

Dans le cas où $c_n = \frac{1}{\alpha^n}$

on aura $c_n f_n = \frac{\alpha^n}{\alpha^n} f_0 = f_0$.

Or, f_0 est la densité de X_0.

ce qui prouve que X_0 et X_n ont la même densité et donc suivent la même loi

3)

si $x < 0$:

$$F_{X_\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\alpha(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

si $x \in]0,1]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\alpha(t)\,dt = \int_{0}^{x} f_\alpha(t)\,dt$$

$$= \int_0^x (\alpha+1)t^\alpha\,dt$$

$$= \left[t^{\alpha+1}\right]_0^x = x^{\alpha+1}$$

si $x \notin [0,1]$: $x > 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\alpha(t) = \int_0^1 f_\alpha(t)\,dt = 1.$$

et donc

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x^{\alpha+1} \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

4)

la variance de X_α existe si et seulement si X_α admet un moment d'ordre deux.

et or $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\alpha(t)\,dt = \int_0^1 (\alpha+1)t^{\alpha+2}$

$$= \left[\frac{\alpha+1}{\alpha+3} t^{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{\alpha+1}{\alpha+3}.$$

et or $E(X_\alpha) = \int_0^1 (\alpha+1)t^{\alpha+1}\,dt = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}.$

par formule de Huygens.

$$V(X_\alpha) = E(X_\alpha^2) - E(X_\alpha)^2$$
$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+3} - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^2$$

partie 2.

5)

• la fonction $c_0 f_0$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points (car nulle sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et vaut $c_0 e^t$ sur $[0, 1]$)

• on a donc pour que $c_0 f_0$ puisse être une densité.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_0 f_0(t) dt = 1$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 c_0 f_0(t) dt = 1$$
$$\Leftrightarrow c_0 [e^t]_0^1 = 1$$
$$\Leftrightarrow c_0(e-1) = 1$$
$$\Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{e-1}$$

6)

on a $\int_{-\infty}^{+\infty} t c_0 f_0(t) dt = \int_0^1 t c_0 f_0(t) dt$
$$= \frac{1}{e-1} \int_0^1 t e^t dt$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 33 | Session : 2025

Épreuve de : MATHS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Poson :
$U(t) = t$ et $U'(t) = 1$
$V'(t) = e^t$ $V(t) = e^t$

$$\text{d'où } \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\varphi_0(t)\,dt = \frac{1}{e-1}\left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right)$$
$$= \frac{1}{e-1}\left(e - (e-1)\right)$$
$$= \frac{1}{e-1}(1) = \frac{1}{e-1}$$

$E(X_0)$ existe bien et vaut $\frac{1}{e-1}$

7) on a $\int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^1 t f_n'(t)\,dt$

Poson :
$U(t) = t$ et $U'(t) = 1$
$V'(t) = ~~\cdots~~ f_n'(t)$ $V(t) = f_n(t)$

$$\text{d'où } \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt = [t f_n(t)]_0^1 - \int_0^1 f_n(t)\,dt$$
$$= f_n(1) - \int_0^1 f_n(t)\,dt$$

8) pour $n=0$, on a $p_0(t)\,e^t = e^t$

et $f_0(t) = e^t$ $(\forall t \in [0,1])$